

WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ W PRZEKŁADNIACH TROCHOIDALNYCH

Edward REJMAN¹

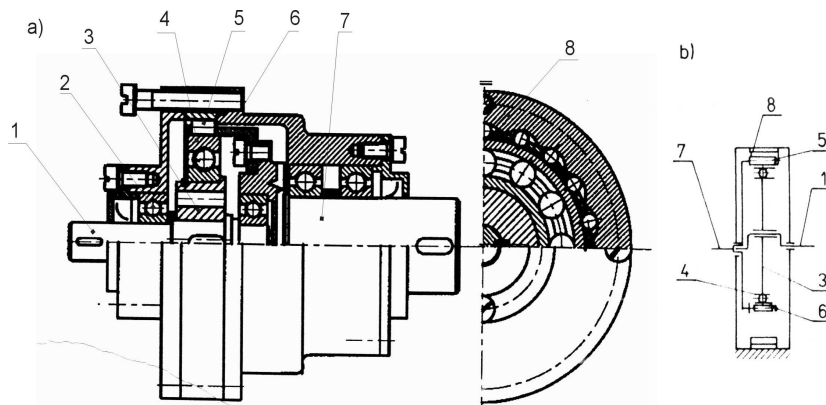
STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono analityczną metodę wyznaczania obciążeń w przekładni trochoidalnej. Rozważania przeprowadzono zarówno dla przekładni o teoretycznym zarysie uzębienia jak również przekładni z uwzględnieniem odchyłek wykonawczych (z luzami międzyzębnymi). Dla rozpatrywanego modelu przeprowadzono obliczenia numeryczne uwzględniające wpływ tolerancji wykonania na obciążalność przekładni.

1. WSTĘP

Przekładnie trochoidalne znajdują dość szerokie zastosowanie ze względu na możliwość uzyskiwania dużych przełożeń na jednym stopniu oraz korzystny stosunek masy do przełożenia. Wśród wielu istniejących rozwiązań tego typu przekładni, jest rozwiązanie opracowane przez autora [5], przedstawione na rysunku 1. W przekładni tej na wale czynnym 1 osadzony jest mimośrodowo pierścień 3, zaś na nim łożysko toczne 4. Zewnętrzny pierścień łożyska stanowi bieżnię dla rolek 5. Rolki te umieszczone są w koszyku 6, połączonym z wałem wyjściowym 7. W czasie pracy przekładni wał czynny wymusza ruch obrotowy pierścienia 3, a wraz z nim łożyska 4. Mimośrodowe umieszczenie pierścienia powoduje promieniowe przemieszczanie się rolek oraz ich współpracę z zarysem koła uzębionego 8. Zarys koła jest najczęściej ekwidystantą zewnętrzną epicykloidy skróconej. Przemieszczające się rolki wymuszają ruch obrotowy koszyka oraz sprzęgniętego z nim wału biernego.

¹ dr inż. Edward Rejman – Politechnika Rzeszowska



Rys. 1 Przekładnia trochoidalna: a) konstrukcja, b) schemat kinematyczny: 1 – wał czynny, 2 – łożysko, 3 – pierścień mimośrodowy, 4 – łożysko toczne, 5 – rolki, 6 – koszyk, 7 -wał wyjściowy, 8 – koło uzębione.

Przełożenie przekładni jest funkcją liczby rolek z_r oraz liczby zębów z_w koła uzębionego 8, przy czym najczęściej zachodzi między nimi relacja $z_r = z_w \pm 1$. Biorąc powyższe pod uwagę, przełożenie wyrazi się zależnością:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_7} = - \frac{z_r}{z_w - z_r} = \pm z_r \quad (1)$$

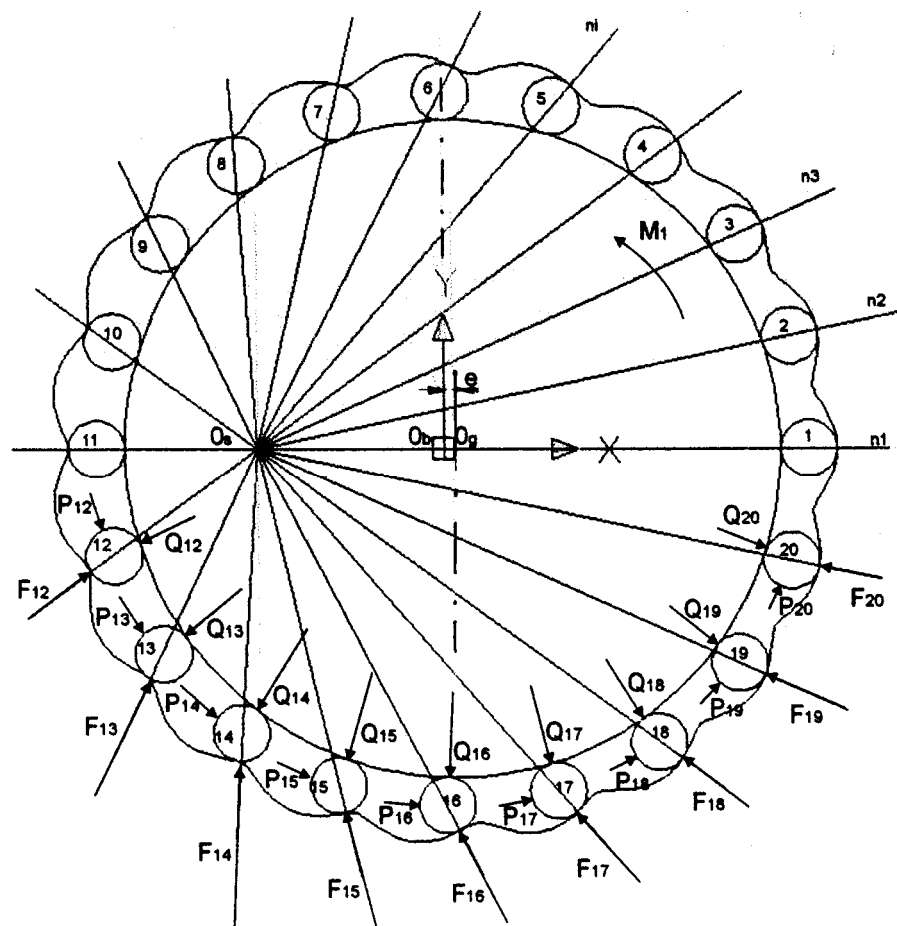
w której znak „+” odpowiada zgodnemu kierunkowi obrotów wału 1 i 7 ($z_w < z_r$), zaś „-” – przeciwnemu, czyli dla rozwiązania gdy $z_w > z_r$.

STAN OBCIĄŻENIA W PRZEKŁADNI TROCHOIDALNEJ Z UZĘBIENIEM NOMINALNYM

Stosowanie przekładni trochoidalnych jako przekładni przenoszących znaczące moce obciąża konstruktora do wyznaczania sił występujących w zażębieniu. Maksymalne wartości sił wynikające przede wszystkim z dopuszczalnych naprężeń kontaktowych limitują zakres zastosowania przekładni. Stan obciążenia przekładni generowany jest przez momenty obciążające, a mianowicie: M_1 – moment na wale czynnym, M_2 – moment na koszyku (na wale biernym), M_3 – moment na kole trochoidalnym, przy czym zachodzi zależność:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0 \quad (2)$$

Wyznaczenie sił międzyzębnych jest o tyle utrudnione, że zadanie jest statycznie niewyznaczalne. Teoretycznie we współpracy bierze udział połowa elementów tocznych z_r . Rozkład sił działających na elementy toczne w przekładni dla wybranego położenia mimośrodowo e pokazano na rysunku 2, gdzie oznaczono:



Rys.2 Rozkład sił w przekładni trochoidalnej dla liczby rolek z_r większej od liczby zębów z_w

F_i – siły oddziaływania koła trochoidalnego, Q_i – siły obciążające łożysko, P_i – siły oddziaływania koszyka. Na podstawie rysunku 3, z sumy rzutów sił działających na rolkę na kierunku t , zachodzi dla i -tej rolki zależność

$$P_i = Q_i \sin \varphi_{oi} + F_i \cos \alpha_{ni} = F_i (\sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi} + \cos \alpha_{ni}) \quad (3)$$

Moment oddziaływania i -tej rolki na koszyk wyraża się w postaci

$$M_{2i} = F l_i + Q_i s_i \quad (4)$$

$$\text{gdzie:} \quad l_i = R_{oi} \cos \alpha_{ni}; \quad s_i = R_{oi} \sin \varphi_{oi} \quad (5)$$

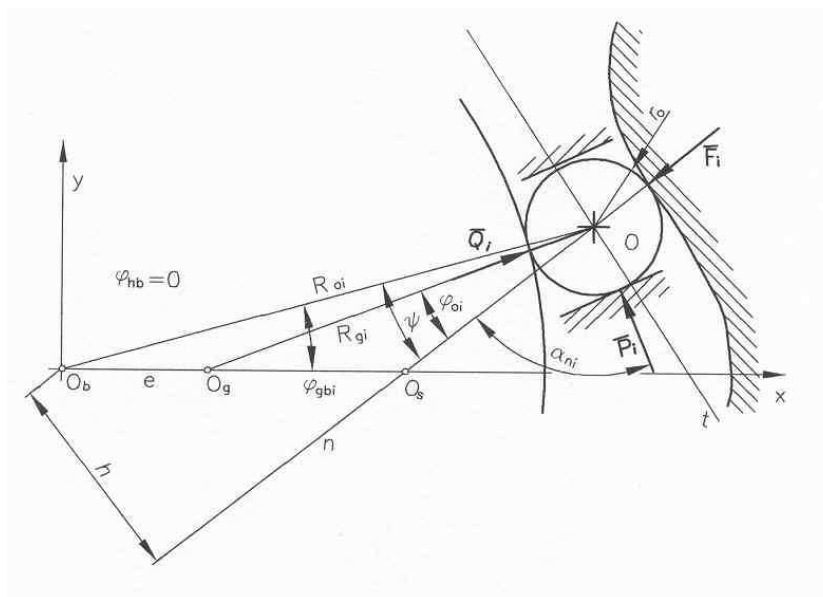
Stad

$$M_i = F_i R_{oi} (\cos \alpha_{ni} + \sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi}) \quad (6)$$

Całkowity moment M_2 jest równy sumie momentów oddziaływania poszczególnych rolek będących we współpracy

$$M_2 = \sum_{i=1}^n M_{2i} \quad (7)$$

gdzie: n – liczba rolek biorących udział we współpracy.



Rys.3 Zależności geometryczne do wyznaczania sił w przekładni z nominalnym zarysem zębów

W celu wyznaczenia wartości sił międzyzębnych wykorzystano warunek współzależności przemieszczeń i obciążeń, a mianowicie

$$P_i = c\delta_i \quad (8)$$

gdzie: c – sztywność kontaktowa pary rolka – koszyk, δ_i - przemieszczenie liniowe, przy czym $\delta_i = R_{oi} \delta\varphi$, gdzie $\delta\varphi$ - kąt sztywnego obrotu koszyka. Stąd

$$M_2 = \sum_{i=1}^n P_i R_{oi} = c \delta\varphi \sum_{i=1}^n R_{oi}^2 \quad (9)$$

Z drugiej strony można napisać:

$$M_2 = \sum_{i=1}^n M_{2i} = \sum_{i=1}^n F_i R_{oi} (\cos \alpha_{ni} + \sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi}) \quad (10)$$

Wykorzystując równania (3 – 10) wyznaczono siły międzyzębne F_i , Q_i , P_i jako funkcję momentu wyjściowego M_2

$$\begin{aligned} P_i &= M_2 \frac{R_{oi}}{\sum R_{oi}^2} \\ Q_i &= F_i \frac{\sin \alpha_{ni}}{\cos \varphi_{oi}} \\ F_i &= M_2 \frac{R_{oi}}{\sum_{i=1}^n R_{oi}^2 (\sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi} + \cos \alpha_{ni})} \end{aligned} \quad (11)$$

Zależności te pozwalają wyznaczyć siły dla przekładni idealnej o teoretycznym zarysie zębów koła oraz braku luzu międzyzębnego, co odpowiada przypadkowi, że połowa liczby rolek bierze udział we współpracy.

3. ROZKŁAD SIŁ MIĘDZYZĘBNYCH W PRZEKŁADNI Z LUZEM

Przekładnia rzeczywista charakteryzuje się występowaniem luzów między współpracującymi elementami. Luzy te są następstwem przede wszystkim odchyłek zarysu oraz tolerancji mimośrodu i promienia zewnętrznego łożyska roboczego. Występowanie luzów powoduje zmniejszanie liczby rolek biorących udział we współpracy, co przy danym momencie M_2 wpływa na obciążenie poszczególnych rolek i zębów.

Uwzględniając wspomniane odchyłki, luz na i -tej rolce opisany jest zależnością [6]:

$$\Delta i = \frac{\Delta r_g (1 - K_1 \cos(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb}) - \sqrt{1 - K_1^2} \sin(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb}))}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb})}} \quad (12)$$

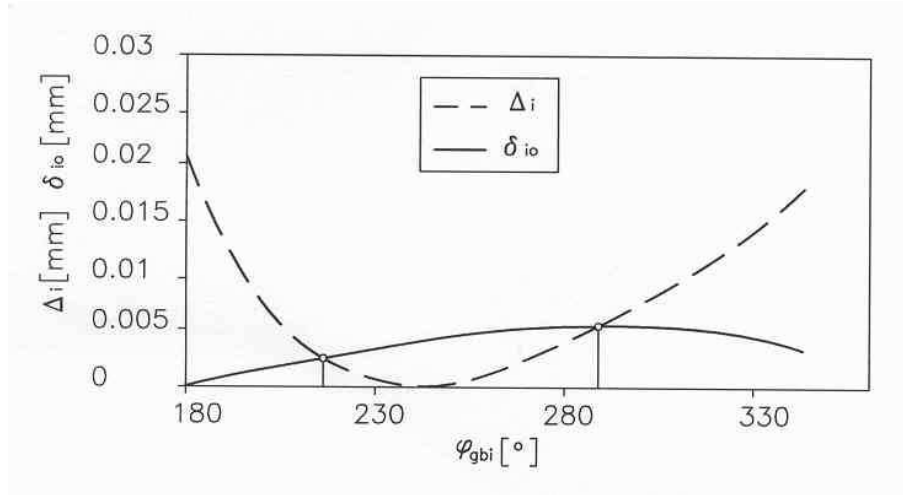
$$+ \Delta r_p \left(1 - \frac{\sin(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb})}{\sqrt{1 + K_1^2 - 2K_1 \cos(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb})}} \right)$$

gdzie: Δr_g – odchyłka promieniowego położenia rolek (uwzględniająca odchyłkę promienia R_g łożyska, promienia rolki oraz mimośrod e),
 Δr_p – odchyłka (modyfikacja) zarysu,

$$K_1 = \frac{ez_r}{R_g}; \quad \varphi_{gbi} = \varphi_{gb0} + \psi_r i; \quad \psi_r = \frac{2\pi}{z_r} \quad (13)$$

φ_{gb0} - kąt położenia środka pierwszej rolki, φ_{hb} - kąt położenia mimośrodu.

Przykładowy rozkład luzu Δi w funkcji kąta $\varphi_{gbi} \in (180, 360^\circ)$ pokazano na rys. 4. Kąt ten odpowiada teoretycznemu obszarowi współpracy.



Rys. 4 Rozkład luzów i przemieszczeń w przekładni trochoidalnej

W czasie pracy przekładni w każdym punkcie kontaktu zęba z rolką będzie występować deformacja sprężysta tych elementów w kierunku normalnym. Dla i-tej rolki przemieszczenie to wyraża się zależnością

$$\delta_{io} = \frac{l_i}{r_b} \delta_{\max o}$$

gdzie:

$$l_i = R_{oi} r_b \frac{\sin(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb})}{\sqrt{R_{oi}^2 + r_b^2 - 2R_{oi} r_b \cos(\varphi_{gbi} - \varphi_{hb})}} \quad (14)$$

$$r_b = e z_w$$

Maksymalną wartość przemieszczenia $\delta_{\max o}$ można wyznaczyć ze wzoru [6]:

$$\delta_{\max o} = \frac{2(1-\nu^2)F_{\max o}}{E\pi b} \left(\frac{2}{3} + \ln \frac{16|r_o||\rho|}{C^2} \right) \quad (15)$$

$$C = 0.00499 \sqrt{\frac{2(1-\nu^2)F_{\max o}}{E} \frac{\rho_m r_0}{\rho_m + |r_0|}} \quad (16)$$

gdzie:

ν – liczba Poissona materiału przekładni,

E – moduł Younga materiału przekładni [MPa],

$F_{\max o}$ - maksymalna wartość siły dla idealnego profilu [N],

b – długość rolki [mm],

r_0 – promień rolki [mm]

ρ_m – promień krzywizny krzywej zarysu zęba w miejscu gdzie występuje największa siła [mm].

Rozkład przemieszczeń δ_{io} pokazano na rys.4. Jeżeli przekładnia przenosi moment, wówczas pary zębów i rolek, dla których przemieszczenia δ_{io} są większe od wartości luzu na i-tej rolce wejdą do współpracy, podczas gdy inne znajdą się poza obszarem zazębienia. Na rys.4 widoczne są punkty przecięcia krzywych opisujących luzy i przemieszczenia. Pary rolek i zębów znajdujące się pomiędzy punktami przecięcia krzywych są w zazębieniu, natomiast pary położone na zewnątrz tych punktów do współpracy nie wchodzi. W porównaniu z przekładnią idealną widać, że we współpracy bierze udział znacznie mniejsza (nawet o 30%)liczba par zębów, a co za tym idzie przy dużych wartościach przenoszonego momentu wzrasta obciążenie poszczególnych par.

W celu wyznaczenia sił międzyzębnych z uwzględnieniem luzów, wykorzystano wzór na moment M_2 wyprowadzony dla przekładni idealnej

$$M_2 = \sum_{i=1}^n F_i R_{oi} (\cos \alpha_{ni} + \sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi}) \quad (17)$$

oraz zależność

$$\frac{F_i}{F_{\max}} = \frac{\delta_i - \Delta_i}{\delta_{\max}} \quad (18)$$

gdzie: F_{\max} – maksymalna siła na jednej rolce.

Stąd

$$M_2 = \frac{F_{\max}}{\delta_{\max}} \sum_{i=1}^n R_{oi} (\delta_i - \Delta_i) (\cos \alpha_{ni} + \sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi}) \quad (19)$$

gdzie: δ_{\max} – maksymalne przemieszczenie kontaktowe.

Maksymalna siła F przenoszona przez jedną rolkę przyjmie wartość:

$$F_{\max 1} = M_2 \frac{\delta_{\max o}}{\sum_{i=1}^n R_{oi} (\delta_{io} - \Delta_i) (\cos \alpha_{ni} + \sin \alpha_{ni} \operatorname{tg} \varphi_{oi})} \quad (20)$$

W przypadku gdy $\delta_{io} - \Delta_i \leq 0$, przyjmujemy wartość wyrażenia równą zero, co oznacza brak kontaktu.

Siłę na i -tej rolce można wyznaczyć z zależności

$$F_{i1} = F_{\max 1} \frac{\delta_{io} - \Delta_i}{\delta_{\max o}} \quad (21)$$

Ponieważ przemieszczenie δ_i jest funkcją obciążenia którego wartość nie jest znana, więc do wyznaczenia sił zastosowano metodę iteracyjną, przyjmując wartość początkową odpowiadającą zazębieniu teoretycznemu dla przekładni bezluzowej. Proces iteracji zostaje przerwany, gdy zachodzi warunek

$$|F_{\max k+1} - F_{\max k}| \leq 0.01 F_{\max k} \quad (22)$$

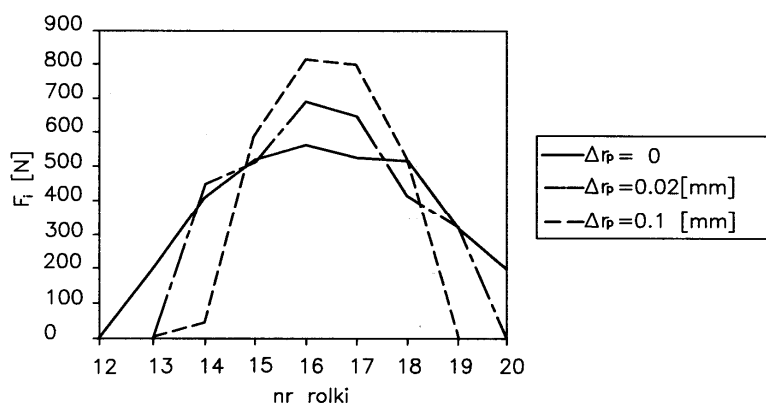
4. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ NUMERYCZNYCH

W celu zobrazowania praktycznego zastosowania przedstawionej metody przeprowadzono obliczenia dla przekładni o parametrach: $z_w = 20$, $z_r = 19$, $e = 2$ mm, $r_o = 6$ mm, $R_g = 76$ mm obciążonej momentem $M_2 = 100$ Nm z różnymi wartościami modyfikacji profilu zęba $\Delta r_p = 0; 0.02; 0.1$ mm. Przykładowe wyniki obliczeń pokazano na rysunku 5 dla dwu wartości kąta położenia wału wejściowego $\varphi_{hb} = 0^\circ$ i 180° . Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że luz ma bardzo istotny wpływ na obciążenie elementów zazębienia przekładni trochoidalnej. Zwiększenie luzu powoduje zmniejszenie liczby zębów i

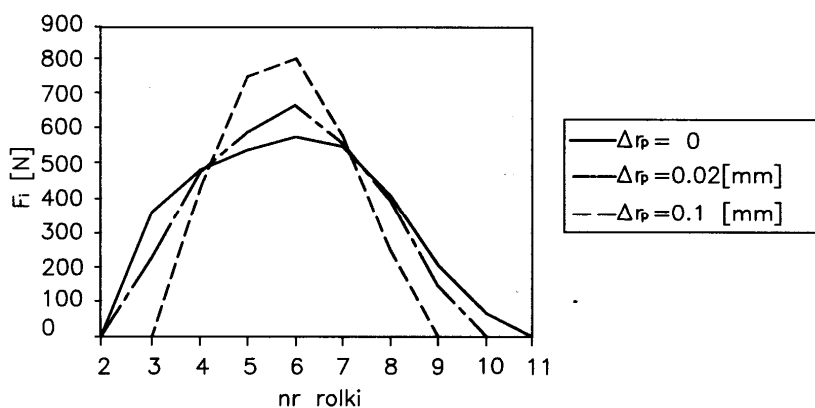
rolek biorących udział we współpracy. To z kolei wpływa na wzrost obciążenia poszczególnych par, a co za tym idzie wzrost naprężeń kontaktowych. Zmiana kąta obrotu wału φ_{hb} wymusza przemieszczanie się obciążenia i wchodzenie do współpracy kolejnych par.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

a)



b)



Rys. 5. Wpływ luzu na siłę międzyzębną F_i w przekładni trochoidalnej a) dla kąta $\varphi_{hb} = 0^\circ$, b) dla kąta $\varphi_{hb} = 180^\circ$

Przekładnie trochoidalne są obiektami złożonymi i poprawne ich projektowanie wymaga znajomości praw rządzących ich ząbieniem jak również znajomości sił międzyzębnych. Dla poprawnego wyznaczenia sił niezbędnym jest uwzględnienie rzeczywistych wymiarów elementów przekładni, szczególnie odchylek zarysu koła trochoidalnego.

W przekładniach rzeczywistych występuje znaczne zmniejszenie liczby przyporu, a co za tym idzie zwiększenie obciążenia poszczególnych elementów zazębienia.

Występowanie luzów międzyzębnych powoduje również zwiększanie luzów obwodowych wału wyjściowego, co ogranicza zakres zastosowania przekładni.

LITERATURA

- [1] Jakovlev A.F.: Primenenije planetarno-cikloidalnych reduktorov w mobilnych sistemach i letatelnych apparatach. Westnik Masinostroenia, 9 (1996), s. 16-20.
- [2] Lehmann M.: Sonderformen der Zykloidenverzahnung, Konstruktion 11 (1979), s. 429-433.
- [3] Litvin F.L.: Gear geometry and applied theory, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1994.
- [4] Malhotra S.K., Parameswaran M.A.: Analysis of cycloid speed reducer, Mechanic and Machinery Theory 6 (1983), p. 491-499.
- [5] Rejman E.: Geometria reduktora trochoidalnego, Zeszyt Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika Nr 39, Rzeszów 1993, s.69-81.
- [6] Rejman E.:The analysis of decompositions of forces and stresess in the cycloidal gears, International Scientific Conference MECANICS 2004, Rzeszów 2004.
- [7] Stryczek J.: Zazębienie cykloidalne w budowie pomp i silników zębatych, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Pol. Wrocławskiej Nr 61, seria Monografie 15, Wrocław 1991.

ANALYTICAL METHOD OF LOADS DETERMINING IN TROCHOIDAL GEARS

SUMMARY

In the paper the analysis of decompositions of forces in the elements of cycloidal gears for the theoretical model and the model allowing for clearance has been presented. The results obtained were the basic to determine the decompositions of stresses by analytical method and for an introduction of constructional changes in the cycloidal gears.