

Kamil LIBERADZKI
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

MIERZENIE RYZYKA STOPY PROCENTOWEJ PORTFELA POLSKICH OBLIGACJI SKARBOWYCH O STAŁYM OPROCENTOWANIU Z WYKORZYSTANIEM DURATION WIELOCZYNNIKOWEGO

Stosowana klasycznie miara wrażliwości wartości obligacji o stałym kuponie na zmianę stóp procentowych, zwana duration, opiera się na nierealistycznym założeniu o wyłącznie równoległym przesunięciu struktury terminowej stóp procentowych. Celem niniejszego opracowania jest prezentacja sposobów oceny wrażliwości ceny portfela polskich obligacji skarbowych na zmiany stóp procentowych, z uwzględnieniem niepłaskiej struktury terminowej stóp procentowych. Dokonano obliczeń dla portfela wybranych obligacji skarbowych o stałym oprocentowaniu, będących przedmiotem obrotu na rynku międzybankowym. Analiza obejmuje okres jednego miesiąca, tj. od 18 lutego do 18 marca 2005 r.

1. Wprowadzenie

„Zysk bez ryzyka” – pod takim hasłem reklamowym polskie Ministerstwo Finansów zachęca inwestorów do nabycia obligacji skarbowych. Stawka jest wysoka, albowiem obligacje skarbowe stanowią zdecydowanie najważniejszy instrument finansowania deficytu budżetowego i długu publicznego w arsenale dostępnym Ministrowi Finansów. Niskie ryzyko, przy określonym poziomie oczekiwanego dochodu ma być podstawowym wyróżnikiem obligacji skarbowych na tle innych instrumentów finansowych konkurujących na rynku o pieniądze inwestorów. Celem niniejszego opracowania jest prezentacja metodyki oceny wrażliwości cen obligacji na zmiany stóp procentowych.

Podstawowym miernikiem wrażliwości obligacji o stałym oprocentowaniu na zmiany stóp procentowych jest klasyczne duration. Ponieważ opisowi konstrukcji wskaźnika duration, jak też skuteczności strategii opartych na nim (np. immunizacji) poświęcono wiele miejsca w opracowaniach naukowych, w niniejszej pracy zagadnienie to nie będzie prezentowane¹. Na podstawie otrzymanych

¹ Tematyka ta została dogłębnie przeanalizowana w następujących opracowaniach polskich i zagranicznych: J. Nowakowski, P. Niedziółka, *Modelowanie portfela papierów wartościowych*,

rezultatów można następująco podsumować założenia i wnioski klasycznej koncepcji duration:

1. Wartość instrumentu *fixed-income* bądź portfela takich instrumentów (w dalszej części przyjęto, że instrumentem tym jest obligacja) da się przybliżyć pierwszym wyrazem rozwinięcia Taylora, innymi słowy: metody oparte na klasycznym duration działają przy założeniu małych zmian stopy procentowej.
2. Przyjmuje się, że zmiany stóp procentowych polegają wyłącznie na równoległym przesunięciu krzywej dochodowości.
3. Wskaźnik duration jest miarą wrażliwości ceny na zmiany stóp procentowych: większa (mniejsza) wartość duration oznacza większe (mniejsze) ryzyko cenowe instrumentów *fixed-income*.
4. Duration jest funkcją wpływającego czasu.

Założenie 1. może zostać rozluźnione przez uwzględnienie drugiego wyrazu szeregu potęgowego, czyli tzw. wypukłości (*convexity*)². Słabym punktem klasycznej koncepcji duration jest założenie 2., dopuszczające jedynie równoległe przesunięcie krzywej zerokuponowej. W praktyce taka zmiana struktury terminowej prawie się nie zdarza.

2. Model Vasicek 1 struktury terminowej stóp procentowych

Właściwe oszacowanie ryzyka stopy procentowej obligacji wymaga zastosowania odpowiedniego modelu aproksymującego rzeczywistą strukturę terminową stóp procentowych. Prezentację koncepcji struktury terminowej stóp procentowych, jak też klasyfikację i zastosowanie wybranych modeli w warunkach polskich można znaleźć w literaturze³. Na potrzeby niniejszego artykułu zastosowano model parametryczny struktury terminowej stóp procentowych, określany mianem Vasicek 1. Jest to modyfikacja znanego, poprawnego teoretycznie modelu dynamiki stóp procentowych Vasicka⁴.

[w:] *Bankowość. Podręcznik akademicki*, pod red. W.L. Jaworskiego, Z. Zawadzkiej, Poltext, Warszawa 2002, s. 812-814; J. Utkin, *O warunkach dostatecznych uodpornienia na pewne zmiany stóp procentowych*, „Przegląd Statystyczny”, z. 1-2, 2001, s. 111-118; G.M. Soto, *Immunitization derived from a polynomial duration vector in the Spanish bond market*, „Journal of Banking & Finance”, nr 25, 2001, s. 1037-1057; A. Balbas, A. Ibanez, *When can you immunize a bond portfolio?*, „Journal of Banking & Finance”, nr 22, 1998, s. 1571-1595.

² Uwzględnienie wypukłości daje wystarczające przybliżenie zmiany wartości portfela. Źródło: ibidem.

³ K. Liberadzki, J. Wójcik, *Wyznaczanie zerokuponowej krzywej dochodowości z wykorzystaniem hybrydowego algorytmu genetycznego*, „Bank i Kredyt”, nr 2, 2006.

⁴ O.A. Vasicek, *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*, „Journal of Financial Economics”, nr 5(2), 1977, s. 177-188.

W klasycznej postaci modelu Vasicka przyjmuje się, że dynamika stopy krótkoterminowej r_t jest opisana stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

gdzie: σ – wielkość zaburzeń losowych,
 b – położenie równowagi modelu,
 a – szybkość reakcji modelu na zaburzenia,
 W_t – proces Wienera, zwany także geometrycznym ruchem Browna.

Wartości W_t zmieniają się losowo i mają niezależny rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i odchyleniu standardowym równym 1.

Stopę ciągłą natychmiastową $R^c(0, t)$ dla terminu zapadalności t wylicza się z równania:

$$R^c(0, t) = R_\infty - (R_\infty - r_0) \left[\frac{1 - \exp(-at)}{at} \right] + \frac{\sigma^2}{a^2} \left[\frac{(1 - \exp(-at))^2}{4at} \right] \quad (2)$$

przy czym:

$$R_\infty = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

W modelu Vasicka struktura terminowa może być płaska, rosnąca, malejąca oraz garbata (wpierw rosnąca, potem malejąca). Funkcja nie dopuszcza formacji U -kształtnych czy też garbatej odwróconej. Z tego powodu wykorzystuje się zmodyfikowaną postać funkcji Vasicka, zwaną funkcją rozszerzoną Vasicka 1, oznaczaną dalej jako Vasicek 1. Stopa ciągła zerokuponowa $R^c(0; t)$ jest modelowana następującą funkcją z czterema parametrami L_0 , S_0 , γ_0 , a^5 :

$$R^c(0; t) = L_0 - S_0 \left[\frac{1 - \exp(-at)}{at} \right] + \gamma_0 \left[\frac{(1 - \exp(-at))^2}{4at} \right] \quad (3)$$

Należy zauważyć, że modyfikacja modelu Vasicka polega na pominięciu ograniczenia: $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{a^2}$, dzięki czemu krzywa dochodowości przyjmuje pożądane kształty.

⁵ L. Martellini, P. Priaulet, S. Priaulet, *Fixed income securities*, Wiley 2003, s. 125.

Korzystając z pokrewieństwa z oryginalnym modelem Vasicka, można dokonać ekonomicznej interpretacji wszystkich parametrów modelu⁶:

- L_0 oznacza stopę procentową długookresową (dla t dążącego do nieskończoności); zmiana tego parametru oznacza przesunięcie równoległe struktury terminowej,
- S_0 w praktyce określa różnicę pomiędzy stopą długo- a krótkoterminową, czyli tzw. *short-term to long-term spread*; zmiana wartości parametru odpowiada zmianie nachylenia struktury terminowej,
- γ_0 przyjmuje rolę parametru krzywizny krzywej dochodowości powiązanego ze zmiennością stopy krótkoterminowej (σ),
- a to parametr oznaczający szybkość dążenia stopy krótkoterminowej do jej poziomu równowagi (patrz: klasyczny model Vasicka⁷); w praktyce zakłada się, że przyjmuje on wartość od 0,2 do 0,6, często również ustala się go *a priori*, szacując wartość pozostałych trzech parametrów.

Podstawową korzyścią wykorzystania modelu Vasicek 1 do zarządzania ryzykiem stopy procentowej jest możliwość zastosowania sprawdzonej koncepcji duration, przy jednoczesnym rozluźnieniu nierealistycznego założenia o równoległym przesunięciu krzywej dochodowości. Największe zalety modeli parametrycznych w tym aspekcie polegają na:

- powiązaniu parametrów modelu z podstawowymi składowymi zaburzeń struktury terminowej,
- liniowej zależności stopy zerokuponowej od parametrów mających interpretację ekonomiczną,
- „rozsądnej” liczbie parametrów umożliwiającej w praktyce kontrolę ryzyka portfela.

3. Rezultaty obliczeń dla portfela wybranych obligacji skarbowych o stałym kuponie

W dalszej części artykułu wskaźnik duration uwzględniający nierównoległe przesunięcia krzywej rentowności będzie nazywany duration wieloczynnikowym. Zasada kalkulacji duration wieloczynnikowego zostanie zobrazowana przy wykorzystaniu modelu struktury terminowej stóp procentowych Vasicka 1. Model ten spełnia warunki, które przedstawiono wcześniej, ponadto zawiera tylko trzy czynniki ryzyka, umożliwiając w miarę dokładną symulację wrażliwości wartości portfela na zmiany struktury terminowej z wykorzystaniem duration trzyczynnikowego.

W przykładzie będą wykorzystane obligacje skarbowe, aczkolwiek identyczne metody mogą być zastosowane dla np. swapów. Duration wieloczynni-

⁶ Ibidem, s. 124.

⁷ O.A. Vasicek, *An Equilibrium Characterisation...*, op.cit.

kowe wyznacza się przez wyliczenie wpływu poszczególnych parametrów na cenę obligacji⁸:

$$D_L = \frac{dP_0}{dL_0}, \quad D_S = \frac{dP_0}{dS_0}, \quad D_\gamma = \frac{dP_0}{d\gamma_0} \quad (4)$$

gdzie: P_0 – cena obligacji w chwili obecnej,

D_L – $\$L_0$ duration, czyli zmiana ceny obligacji pod wpływem zmiany parametru L_0 ,

D_S – $\$S_0$ duration, czyli zmiana ceny obligacji pod wpływem zmiany parametru S_0 ,

D_γ – γ_0 duration, czyli zmiana ceny obligacji pod wpływem zmiany parametru γ_0 .

Zmiana wartości parametrów L_0 , S_0 , i γ_0 oznacza odpowiednio: przesunięcie równoległe, zmianę nachylenia oraz zmianę krzywizny krzywej dochodowości. Wskaźnik duration oblicza się, korzystając z następującej formuły:

$$\left. \begin{aligned} D_L &= -\sum_i^n t_i CF_i e^{-t_i R^c(0;t_i)} \\ D_S &= \sum_i^n t_i \left[\frac{1 - \exp(-at_i)}{at_i} \right] CF_i e^{-t_i R^c(0;t_i)} \\ D_\gamma &= -\sum_i^n t_i \left[\frac{(1 - \exp(-at_i))^2}{4at_i} \right] CF_i e^{-t_i R^c(0;t_i)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

gdzie CF_i oznacza przepływ gotówki w chwili t generowany przez instrument.

Obliczenia dla obligacji skarbowych o stałym oprocentowaniu z wybranych serii zamieszczono w tab. 1-3. Wartość D_γ wynosząca –51,1 oznacza, że jeżeli parametr gamma wzrośnie o 1%, to cena obligacji DS1110 spadnie o 5,11 PLN.

Tabela 1. Duration trzyczynnikowe dla portfela obligacji z dnia 18 lutego 2005 r.

Parametr	Wartość	Obligacja	Lata do wykupu	Cena obligacji	D_L	D_S	D_γ
L_0	0,06137	DS1110	5,76	1029,9	–514,5	314,9	–51,1
S_0	0,00311	DS0509	4,26	1056,2	–394,9	270,3	–37,2
γ_0	–0,049	PS0507	2,23	1123,4	–225,6	183,1	–16,0
–		portfel*	–	3209,6	–1134,92	768,32	–104,30

* portfel składa się z 1 jednostki każdej obligacji.

Źródło: opracowanie własne.

⁸ L. Martellini, P. Priaulet, S. Priaulet, *Fixed income...*, op.cit., s. 199, a także: L. Martellini et al., *Beyond Duration*, „Journal of Bond Trading and Management”, nr 1(2), 2002, s. 103-119.

Wyniki obliczeń duration trzyczynnikowego dla obligacji kuponowych wybranych serii z dnia 28 lutego przedstawiono w tab. 1. Zaprezentowano czynniki wrażliwości poszczególnych obligacji, jak też portfela złożonego z jednostki każdego papieru. Potwierdzają się spostrzeżenia dokonane w przypadku klasycznego duration: im dłuższy termin do wykupu, tym większa wrażliwość na zmiany cen obligacji. Ponadto można zauważyć, że największy wpływ na zmiany cen ma równoległe przesunięcie krzywej dochodowości. Stosunkowo najmniej działa na wartość portfela zmiana krzywizny struktury terminowej. Porównanie danych z tab. 1. z wynikami z dnia 18 marca (tab. 2.) pozwala odpowiedzieć na pytanie, w jakim stopniu za zmianę wartości portfela w ciągu miesiąca odpowiada zmiana struktury terminowej, a w jakim inne czynniki, przede wszystkim upływ czasu.

Tabela 2. Duration trzyczynnikowe dla portfela obligacji z dnia 18 marca 2005 r.

Parametr	Wartość	Obligacja	Lata do wykupu	Cena	D_L	D_S	D_γ
L_0	0,0599	DS1110	5,67	1038,5	-511,0	314,7	-50,6
S_0	0,00595	DS0509	4,18	1066,6	-390,3	268,8	-36,6
γ_0	-0,028	PS0507	2,15	1135,1	-218,4	178,5	-15,2
–		portfel*	–	3240,3	-1119,67	762,02	-102,45

* portfel składa się z 1 jednostki każdej obligacji.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Wpływ przesunięcia krzywej zwrotów na wartość portfela trzech obligacji w okresie 18 lutego – 18 marca 2005 r.

Parametr	Δ parametrów (liczona addytywnie)	Czynnik ryzyka	Zmiana wartości portfela w PLN wytłumaczona czynnikiem ryzyka	Zmiana wartości portfela w PLN wytłumaczona upływem czasu	Całkowita zmiana wartości portfela w PLN
L_0	-0,147%	D_L	16,7	14,4	30,7
S_0	0,28%	D_S	21,5		
γ_0	2,1%	D_γ	-21,9		
–		razem	16,3		

Źródło: opracowanie własne.

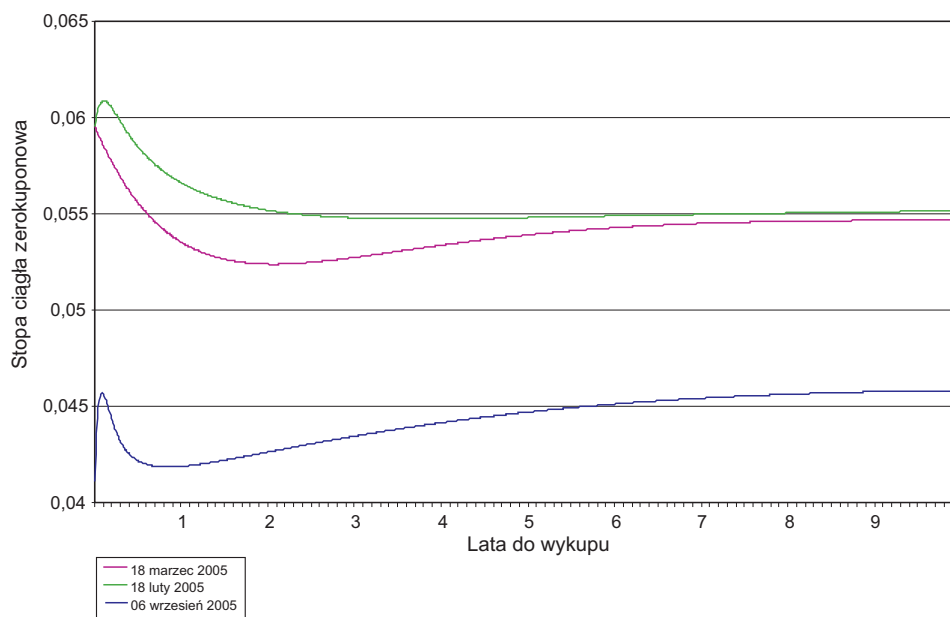
W wyniku przesunięcia równoległego krzywej zwrotów w ciągu miesiąca wartość portfela wzrosła o 16,6 PLN. Zmiana nachylenia spowodowała wzrost cen obligacji o 21,812 PLN, zmiana krzywizny zaś obniżyła ceny o 21,9 PLN. Globalnie wartość portfela wzrosła o 30,7 PLN. Wniosek jest następujący: w ciągu miesiąca za zmianę wartości portfela obligacji w ok. 50% odpowiada jest zmiana struktury terminowej stóp, a w pozostałej części oddziałuje upływ czasu. Wydaje się, że błąd oszacowania zmian cen przez duration nie jest

duży, o czym świadczy mała zmiana wartości czynników duration na przestrzeni miesiąca (mały efekt wypukłości). Należy uwzględnić błąd wynikający z niedokładności modelu Vasicka 1 w wycenie obligacji. Z pewnością zastosowanie modelu o większej liczbie parametrów (np. Vasicek 2)⁹ pozwoliłoby uzyskać dokładniejsze wyniki, oczywiście kosztem bardziej pracochłonnych obliczeń. Wyniki symulacji obrazuje tab. 3.

Znając wartości czynników duration oraz korzystając z dobrze oszacowanego modelu parametrycznego, można zastosować strategię hedgingową w celu wyeliminowania ryzyka zmian struktury terminowej. Przykładowym rozwiązaniem mogłoby być zajęcie krótkiej pozycji w instrumencie *fixed-in-come*, względnie w portfelu takich instrumentów, o identycznych wartościach poszczególnych czynników duration. Instrumentem dobrze nadającym się do tego rodzaju transakcji jest IRS.

4. Podsumowanie

Zastosowanie koncepcji duration wieloczynnikowego na podstawie modelu struktury terminowej Vasicek 1 pozwala uchylić założenie o wyłącznie równoległym przesunięciu krzywej dochodowości. Jednocześnie zachowane zostały



Rys. 1. Porównanie zerokuponowych skarbowych krzywych dochodowości z różnych dni w 2005 r.

Źródło: opracowanie własne.

⁹ K. Liberadzki, J. Wójcik, *Wyznaczanie zerokuponowej krzywej...*, op.cit.

podstawowe zalety klasycznego duration, takie jak łatwość interpretacji oraz łatwość kalkulacji duration całego portfela opartego na duration poszczególnych jego elementów. W analizowanym okresie zmiany struktury terminowej stóp procentowych przyczyniły się w znacznym stopniu do wzrostu wartości portfela zanotowanego w tym czasie. Pozostały wzrost wartości portfela tłumaczy się upływem czasu, a także pewnym błędem wyceny generowanym przez model.

A przecież, jak wynika z rys. 1., przesunięcie krzywej zerokuponowej było niewielkie i tak naprawdę dotyczyło wyłącznie krótko- i średniookresowego segmentu krzywej, czyli tych stóp, które w o wiele mniejszym stopniu niż stopy długookresowe wpływają na zmiany cen obligacji. Zatem łatwo uzmysłowić sobie, że w razie niepokojów na rynku pieniądza w Polsce skala zmian portfeli obligacji może być znacząca i mogą to być spadki. Kierunek zmian (opadanie) krzywej dochodowości działał na korzyść inwestorów trzymających papiery skarbowe w swoich księgach. Naturalnie inwestorzy wiedzą, że papiery skarbowe są obciążone pewnym ryzykiem. Jednakże utrata kontroli nad krzywą dochodowości, w wyniku np. niefrasobliwej polityki fiskalnej czy też pieniężnej, może znacząco zwiększyć skalę ryzyka, czego owocem będzie spadek cen obligacji (wzrost kosztów obsługi długu), spadek wartości aktywów w posiadaniu inwestorów – w ostatecznym rozrachunku problemy państwa ze zbyciem swojego długu.

MEASURING THE INTEREST RATE RISK OF POLISH FIXED COUPON TREASURY BOND PORTFOLIO WITH THE USE OF MULTI-FACTOR DURATION

S u m m a r y

The article refers to the issue of measuring sensitivity of selected Polish treasury bond portfolio with fixed coupon to the interest rate changes. Classic duration fails in effective estimation of bond prices sensitivity to the fluctuations of the interest rates as it is based upon strong assumptions. Taking into consideration only parallel shifts of the yield curve is the main drawback of duration. Meanwhile, the term structure of interest rates can change its shape in many ways.

The main goal of the article is to present the methodology concerning proper measurement of sensitivity of bonds prices to the term structure of interest rates changes. Some calculations based on market data have been conducted. The term structure of interest rates has been approximated with the use of so called Vasicek 1 model. Vasicek 1 model allows to relax assumption of the parallel shift. What is more, some risk factor of interest rate changes can be identified. Estimation of the influence of each factor to the bond price is the main issue concerning multi-factor duration calculation.

Wpłynęło do Oficyny Wydawniczej w styczniu 2008 r.