

Bogdan STANKIEWICZ  
Politechnika Rzeszowska

## ANALIZA STALOWYCH BELEK NARAŻONYCH NA ZWICHRZENIE METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Analiza stateczności ogólnej elementów stalowych przy zginaniu jest zadaniem trudnym. Metody teoretyczne nie pozwalają na analizę większości typowych belek. Metody inżynierskie, łączące podejście teoretyczne i eksperymentalne, są bardziej użyteczne, jednak ograniczenia w ich stosowaniu bywają bardzo kłopotliwe. Takim ograniczeniem jest na przykład wymóg istnienia podparcia widełkowego. Zastosowanie metody elementów skończonych i podejścia imperfekcyjnego umożliwia obliczanie na zwichrzenie dowolnych belek. W artykule przedstawiono algorytm obliczeń belek stalowych narażonych na zwichrzenie, przy użyciu metody elementów skończonych, i dwa przykłady obliczania dwuteowych belek swobodnie podpartych: belki dwuteowej z żebrami na podporze i belki bez żeber.

### 1. Wprowadzenie

Obliczanie belek stalowych na zwichrzenie było i jest nadal zadaniem trudnym [1-4]. Nie udało się opracować uniwersalnych i relatywnie prostych procedur obliczeniowych, które znalazłyby bezpośrednie zastosowanie w inżynierskich obliczeniach belek. Procedura proponowana przez polską normę z 1990 r. [5] odnosi się do belek jednoprzęsłowych podpartych widełkowo. Bardziej złożone przypadki można analizować, wykorzystując tę procedurę jedynie w sposób przybliżony. Bardzo podobne podejście proponowano w normie europejskiej z 1992 r. [6].

Obowiązująca obecnie norma europejska [7] w kontekście tradycyjnych obliczeń inżynierskich nie wprowadziła nowej jakości. Pozostawiono do wyboru projektanta trzy metody obliczeń: dwie oparte na wiedzy o wielkości momentu krytycznego belki przy zwichrzeniu sprężystym  $M_{cr}$ , przy czym w normie nie podano wzorów na obliczanie  $M_{cr}$ , oraz na metodzie uproszczonej utworzonej przy przyjęciu analogii słupowej:

Metoda 1. Punkt 6.3.2.2 normy [7]: Krzywe zwichrzenia – przypadek ogólny.

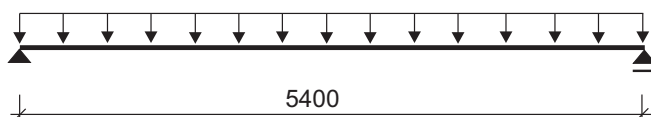
Metoda 2. Punkt 6.3.2.3 normy [7]: Krzywe zwichrzenia dla dwuteowników oraz ich spawanych odpowiedników.

Metoda 3. Punkt 6.3.2.4 normy [7]: Uproszczona ocena zwichrzenia belek w budynkach.

Nową jakość stanowi możliwość stosowania komputerowej metody elementów skończonych (MES) i podejścia imperfekcyjnego wraz z podaniem podstawowych zasad dotyczących sposobu tworzenia modeli komputerowych MES [7, 8]. Najważniejsze zasady tworzenia modeli MES do analizy zwichrzenia belek przedstawiają się następująco:

- do wyznaczania przemieszczeń i sił wewnętrznych stosuje się analizę drugiego rzędu, z uwzględnieniem wpływu deformacji na statykę układu,
- wpływ imperfekcji uwzględnia się wyłącznie za pomocą analizy globalnej,
- rzeczywiste imperfekcje geometryczne i materiałowe uwzględniane są przez zastosowanie zastępczych imperfekcji geometrycznych,
- używa się sprężysto-plastycznego modelu materiału.

Celem niniejszego artykułu jest pokazanie możliwości, jakie daje zastosowanie MES do analizy zwichrzenia belek i przedstawienie sposobu tworzenia modelu MES oraz jego wykorzystania. By cele te osiągnąć, wystarczające jest przeprowadzenie przykładowej analizy nośności na zwichrzenie belki swobodnie podpartej obciążonej obciążeniem ciągłym (rys.1.).



Rys. 1. Schemat statyczny analizowanej belki

Belka ma rozpiętość 5,4 m, wykonana jest z dwuteownika walcowanego IPE 270 ze stali S235. Ciągłe obciążenie wyjściowe ma wartość 1 kN/m.

Analizę MES wykonano, uwzględniając dwa przypadki:

- 1) belka oparta jest w sposób spełniający warunki podparcia wieńcowego – dzięki żebram podporowym (rys. 3., 5.),
- 2) belka oparta jest w sposób niespełniający warunków podparcia wieńcowego – brak żeber podporowych, oparcie na stalowej płycie centrującej (rys. 8., 9.).

Dla porównania wyników obliczeń komputerowych MES z wynikiem uzyskanym metodą tradycyjną wykonano obliczenia belki na zwichrzenie metodą drugą według normy [7, 9].

## 2. Model komputerowy MES belki z żebrami podporowymi

Model komputerowy opracowano za pomocą programu ADINA (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis, ADINA R & D Inc., USA,

www.adina.com) [10]. Głównym autorem programu jest profesor K.J. Bathe z Massachusetts Institut of Technology. Program ADINA umożliwia uwzględnienie nieliniowości materiałowych i geometrycznych oraz modelowanie stref kontaktowych wraz z wpływem tarcia, spełnia więc wszystkie wymagania do modelowania i analizowania belek stalowych.

Model zbudowano, wykorzystując elementy skończone czterowęzłowe typu powłokowego. Słup jest wykonany ze stali S235. Przyjęto model materiału nieliniowy, sprężysto-plastyczny bez wzmocnienia, o charakterystykach odpowiadających charakterystykom stali S235 zgodnie z normą [7]:

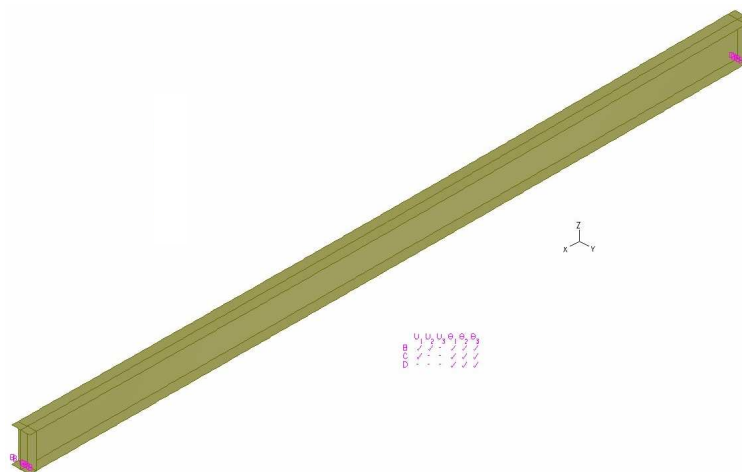
- granica plastyczności:  $f_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$ ,
- moduł sprężystości podłużnej:  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,
- wydłużenie przy zniszczeniu:  $\varepsilon = 15\%$ .

Obliczenia prowadzono w dwóch etapach. Etap I obejmował liniową analizę wyboczeniową, etap II – analizę nieliniową modelu o zmodyfikowanej geometrii, tak by uzyskać kształt będący wynikiem analizy wyboczeniowej (etap I).

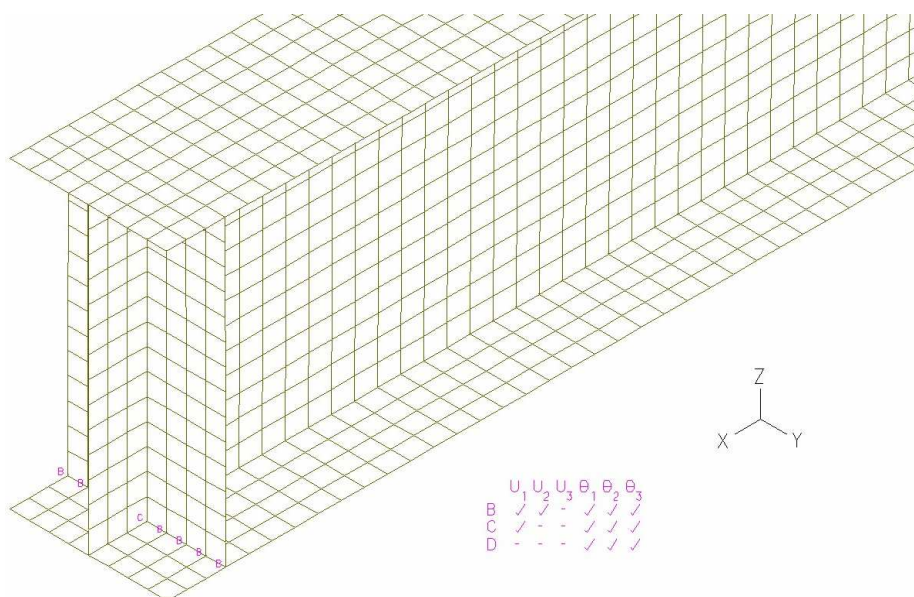
#### Charakterystyka modelu

- 8564 elementów powłokowych czterowęzłowych,
- liczba węzłów 8857,
- liczba równań 32638,
- czas trwania obliczeń etapu I, komputer klasy PC, procesor 2.4 GHz, 1.5 GB RAM: od 10 do 14 s,
- czas trwania obliczeń etapu II, komputer o parametrach jak podczas etapu I: od 54 do 347 s.

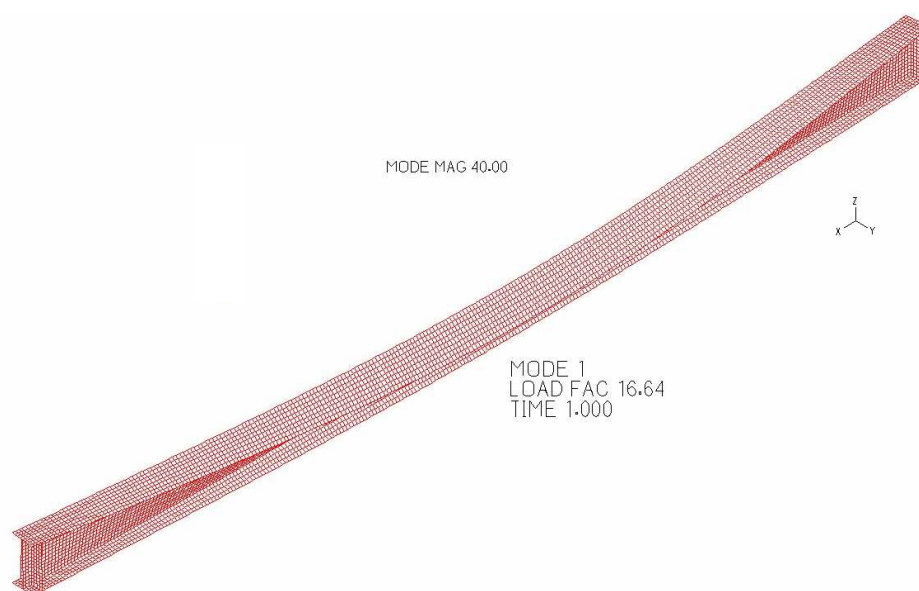
Na rysunku 2. pokazano cały model, na rys. 3. powiększony fragment modelu. Natomiast na rys. 4. i 5. przedstawiono uzyskane w etapie I postaci wyboczenia i sprężyste mnożniki obciążenia.



Rys. 2. Widok całego modelu belki z żebrami



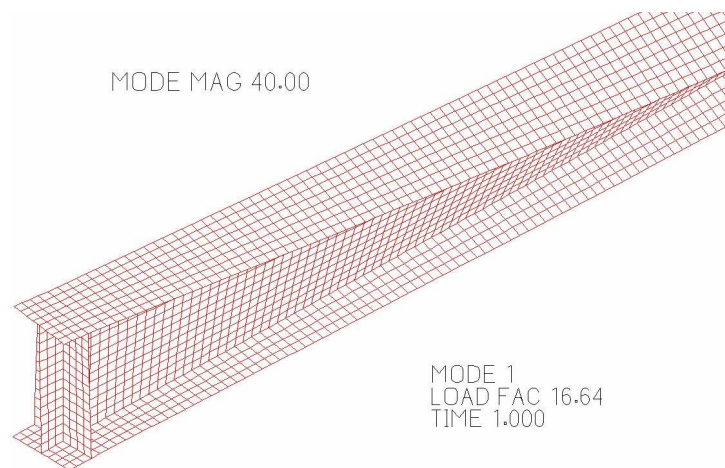
Rys. 3. Model belki z żebrami – fragment podporowy



Rys. 4. Pierwsza postać wyboczenia sprężystego – widok całego modelu belki z żebrami

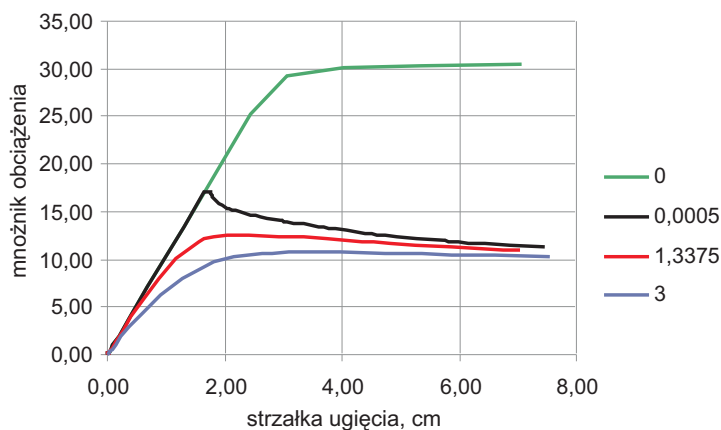
W etapie II obliczeń przeprowadzono analizę nieliniową modelu o zmodyfikowanej geometrii w taki sposób, by uzyskać kształt będący wynikiem analizy wyboczeniowej (etap I obliczeń, rys. 4., 5.). Analiza polegała na zwiększaniu

wstępnie przyłożonego obciążenia ciągłego o wartości 1 kN/m. Wielkość imperfekcji zastępczej uzależniono od wartości przemieszczenia poziomego punktu wspólnego środka i półki górnej w środku rozpiętości belki. Obliczenia wykonano, przyjmując kilka wartości z przedziału od 0 do 30 mm. Uwzględniono również wartość zalecaną przez normę [7], tj. 13,375 mm.

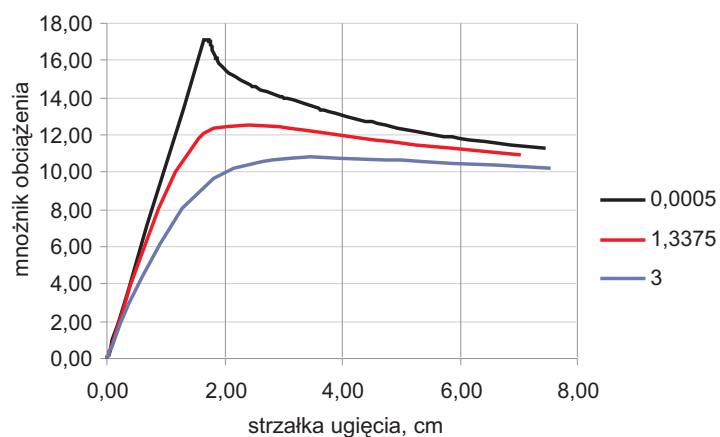


Rys. 5. Pierwsza postać wyboczenia sprężystego – widok fragmentu podporowego belki z żebrami

Rysunki 6. i 7. przedstawiają najbardziej miarodajne wyniki obliczeń w postaci krzywych siła–ugięcie pionowe przy wartościach imperfekcji zastępczych wynoszących 0,0000 cm (co oznacza brak zwichrzenia), 0,0004 cm, 1,3375 cm i 3,0000 cm.



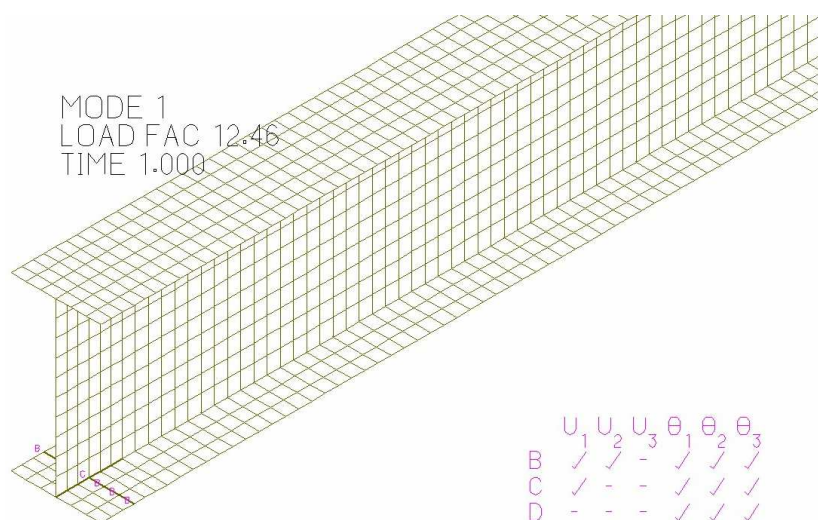
Rys. 6. Krzywe siła–ugięcie pionowe uzyskane dla modelu idealnego belki z żebrami i modeli obarczonych imperfekcjami



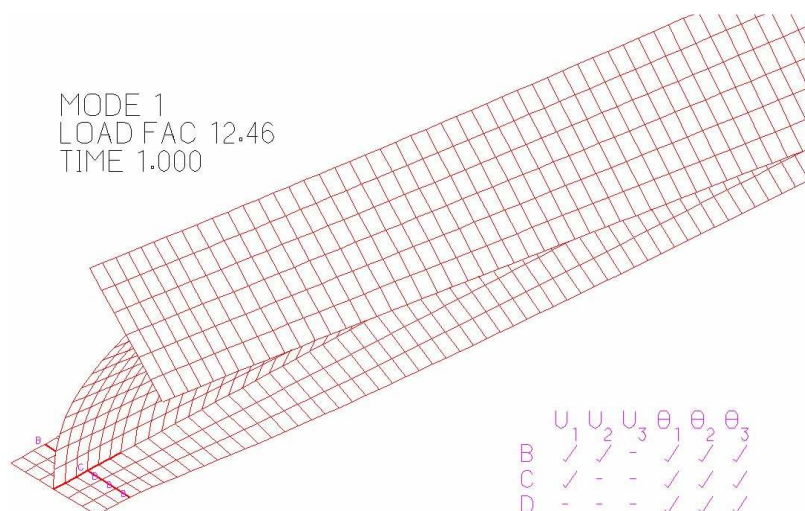
Rys. 7. Krzywe siła-ugięcie pionowe uzyskane dla modeli belki z żebrami i obciążonych imperfekcjami

### 3. Model komputerowy MES belki bez żeber podporowych

Model utworzono w wyniku modyfikacji modelu belki z żebrami, polegającej na usunięciu żeber podporowych i modyfikacji warunków podporowych. Fragment podporowy modelu pokazano na rys. 8. (konfiguracja wyjściowa) i rys. 9. (konfiguracja końcowa). Obliczenia wykonano analogicznie do belki z żebrami podporowymi.

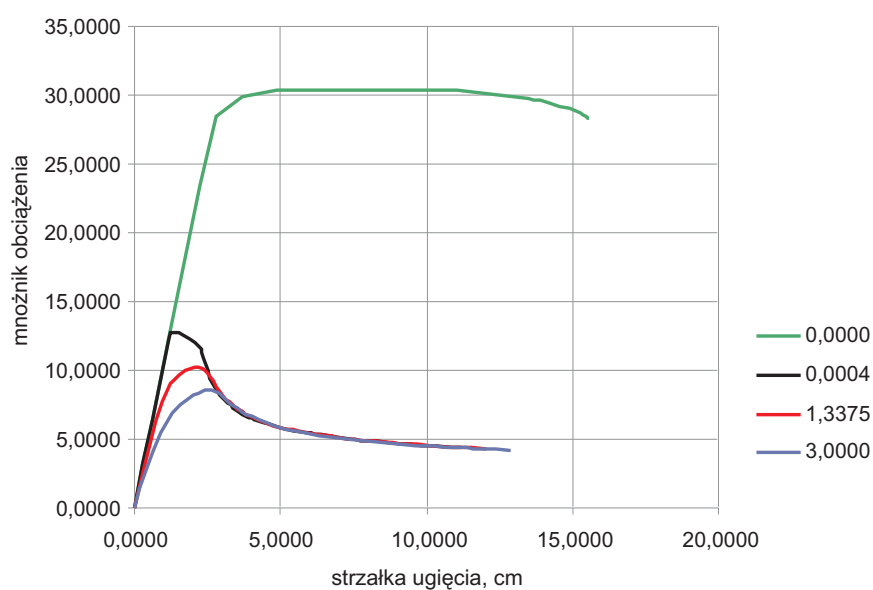


Rys. 8. Model belki bez żeber podporowych



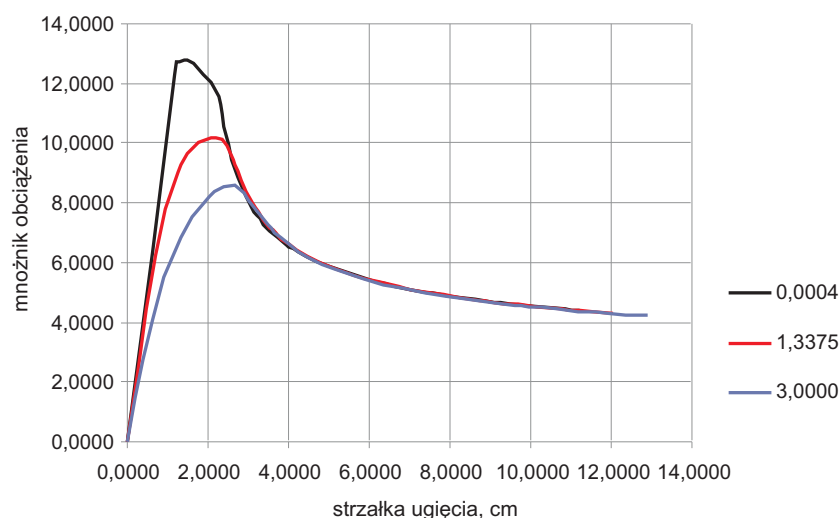
Rys. 9. Model belki bez żebrow podporowych – pierwsza postać wyboczenia sprężystego

Rysunki 10. i 11. przedstawiają najbardziej miarodajne wyniki obliczeń w postaci krzywych siła–ugięcie pionowe przy wartościach imperfekcji zastępczych wynoszących 0,0000 cm (co oznacza brak zwichrzenia), 0,0004 cm, 1,3375 cm i 3,0000 cm.



Rys. 10. Krzywe siła–ugięcie pionowe uzyskane dla modelu idealnego belki bez żebrow i modeli obarczonych imperfekcjami





Rys. 11. Krzywe siła-ugięcie pionowe uzyskane dla modeli belki bez żeber i modeli obarczonych imperfekcjami

#### 4. Zestawienie podstawowych wyników obliczeń

W tabeli 1. przedstawiono maksymalne wartości mnożników obciążenia wstępnego o wartości 1,0 kN/m i wartości współczynnika zwiczenia, obliczone jako iloraz obciążenia maksymalnego belki obarczonej imperfekcją zastępczą i belki bez imperfekcji (zwiczenie nie występuje). W tabeli zestawiono wartości obu analizowanych belek oraz wszystkie wartości imperfekcji uwzględnione w obliczeniach. Współczynnik zwiczenia belki z żebrami podporowymi, obliczony metodą 2., zgodnie z normą [7] wynosi według [11] (przykład 7.2):  $\chi_{LT} = 0,509$ .

Tabela 1. Zestawienie maksymalnych wartości mnożników obciążenia jednostkowego i odpowiadające im wartości współczynników zwiczenia

Wartość imperfekcji zastępczej, cm	Belka z żebrami podporowymi		Belka bez żeber podporowych	
	mnożnik obciążenia wstępnego	współczynnik zwiczenia	mnożnik obciążenia wstępnego	współczynnik zwiczenia
0,0000	30,39	1,00	30,39	1,00
0,0002	30,38	1,00	12,79	0,42
0,0004	30,38	1,00	12,79	0,42
0,1000	16,31	0,54	12,45	0,41
1,0000	13,13	0,43	11,49	0,38
1,3750	12,51	0,41	10,19	0,34
1,5000	12,33	0,41	9,98	0,33
2,0000	11,73	0,39	9,47	0,31
2,5000	11,24	0,37	9,00	0,30
3,0000	10,81	0,36	8,59	0,28



## 5. Podsumowanie

Postęp w rozwoju komputerowych programów metody elementów skończonych i ogólna dostępność komputerów o dużych mocach obliczeniowych spowodowały, że nieliniowe obliczenia MES mogą być wykonywane nie tylko w ośrodkach naukowo-badawczych, ale również przez inżynierów – konstruktorów pracujących w biurach projektowych. Nie znaczy to jednak, że obliczenia MES układów prętowych z wykorzystaniem powłokowych lub trójwymiarowych elementów skończonych wyprą tradycyjne metody obliczeń, gdyż – mimo dokonującego się postępu – są nadal metodą bardzo pracochłonną, wymagającą posiadania programu komputerowego do obliczeń nieliniowych i umiejętności jego stosowania. Sens stosowania obliczeń MES pojawia się, gdy zawodzą metody tradycyjne bądź gdy zależy na szczególnie dużej dokładności wykonywanych obliczeń. Bardzo ważne jest, że zasady prowadzenia obliczeń MES pojawiły się w normach konstrukcyjnych [7, 8].

Można wymienić następujące zalety stosowania imperfekcyjnych nieliniowych modeli MES:

- możliwość analizy belek o dowolnych konfiguracjach (kształt, warunki podparcia i obciążenia),
- brak ograniczeń możliwości obliczeniowych komputerów (wystarczy typowy komputer biurowy z systemem operacyjnym Windows lub Linux),
- niewielkie koszty oprogramowania (ciągły spadek cen),
- łatwość oceny prawidłowości wykonania konstrukcji – poprzez porównanie rzeczywistych imperfekcji z przyjętą w obliczeniach wielkością imperfekcji zastępczej,
- metoda jest łatwa do zrozumienia i intuicyjnej akceptacji.

Wadami stosowania imperfekcyjnych nieliniowych modeli MES są: konieczność posiadania zaawansowanego programu MES oraz relatywnie długi czas tworzenia modelu.

Sensowne stosowanie imperfekcyjnych obliczeń nieliniowych MES do celów naukowo-badawczych (np. opracowanie i weryfikacja sposobów inżynierskich określania nośności na zwichrzenie) oraz w projektowaniu lub ekspertyzach, gdy ekonomicznie uzasadniony jest większy nakład pracy przy obliczaniu konstrukcji (np. uniknięcie konieczności wzmacniania istniejącej konstrukcji).

## Literatura

1. Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej, Arkady, Warszawa 1963.
2. Trahair N.S.: Flexural-torsional buckling of structures, E & FN Spon, London 1993.
3. Weiss S., Giżejowski M.: Stateczność konstrukcji metalowych: układy prętowe, Arkady, Warszawa 1991.

4. Żmuda J.: Problemy niestateczności w projektowaniu dźwigarów stalowych, Studia i Monografie, nr 156, Wydaw. Politechniki Opolskiej, Opole 2004.
5. Norma PN-90/B-03200: Konstrukcje stalowe – Obliczenia statyczne i projektowanie.
6. Norma ENV 1993-1-1: Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, Brussels 1992.
7. Norma PN-EN 1993-1-1: Eurokod 3 – Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, PKN, Warszawa 2006.
8. Norma PN-EN 1993-1-5: Eurokod 3 – Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-5: Blachownice, PKN, Warszawa 2008.
9. Gardner L., Nethercot D.A.: Designers' guides to the eurocodes. Designers' guide to EN 1993-1-1: Eurocode 3 – Design of steel structures. General rules and rules for buildings, series ed. H. Gulvanessian, Thomas Telford, London 2005.
10. Bathe K.J.: Finite element procedures, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New York 1996.
11. Konstrukcje stalowe. Przykłady obliczeń według PN-EN 1993-1, praca zbiorowa pod red. A. Kozłowskiego, wyd. II, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2010.

## FEM ANALYSIS OF LATERALLY UNRESTRAINED STEEL BEAMS

### Summary

In general an analysis of laterally unrestrained steel beams is very difficult to carry out. Theoretical methods cannot be directly used in most practical cases. Engineering methods, that combine theoretical approach with results of experimental tests, are much more useful, but limitations are very troublesome. Especially important is the assumption, Particularly important is the assumption of "fork support". Application of finite element method with using concept of equivalent geometrical imperfections enables calculations of all beams. The article presents the algorithm of finite element method analysis of laterally unrestrained steel I-beams and worked examples of analysis of two simply supported beams, one with stiffeners over the support, the other without any stiffeners.

*Złożono w Oficynie Wydawniczej w maju 2010 r.*

Propozycja artykułu do Zeszytu Naukowego PRz:

dr inż. Bogdan Stankiewicz

**Analiza stalowych belek narażonych na zwichrzenie  
metodą elementów skończonych**

Jako recenzenta proponuję profesora dr hab. inż. Szymona Pałkowskiego (autoritet w tej dziedzinie) z Politechniki Koszalińskiej.

Prof. dr hab. inż. Szymon Pałkowski

Politechnika Koszalińska

Katedra

Konstrukcji

Metalowych

ul. Śniadeckich 2

75-453 Koszalin

email: szp@wb.tu.koszalin.pl

tel.: (+48 94) 34 78 579