

Danuta BRYJA¹
Ryszard HOŁUBOWSKI
Politechnika Wrocławska

MODELOWANIE BELKOWYCH MOSTÓW KOLEJOWYCH Z ZASTOSOWANIEM METODY GFEM. CZĘŚĆ I. SFORMUŁOWANIE TEORETYCZNE

W pracy przedstawiono model obliczeniowy belkowych mostów kolejowych z losowo zmiennymi parametrami podsypki. Model, w którym podsypka toru kolejowego jest ciągłym podłożem lepko-sprężystym, sformułowano metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkina (GFEM). Alternatywnie zastosowano typowe funkcje kształtu elementu skończonego w postaci wielomianów Hermite'a i funkcje specjalne, które wyprowadzono na podstawie ścisłego rozwiązania jednorodnego równania statycznego, opisującego problem zginania belki spoczywającej na podłożu sprężystym. Wyprowadzono równania ruchu opisujące sprzężone, pionowe drgania dźwigara mostowego i toru kolejowego w obrębie mostu i w strefach dojazdowych. Drgania te są wymuszone przejazdem pociągu ze stałą prędkością, przy czym pociąg jest traktowany jako zbiór ruchomych mas skupionych. Zaproponowany model mostu umożliwi w przyszłych badaniach efektywną analizę stochastyczną drgań z zastosowaniem metody symulacyjnej Monte Carlo.

1. Wprowadzenie

W związku z intensywnym rozwojem infrastruktury kolejowej, przeznaczonej do obsługi pociągów poruszających się z dużymi prędkościami, w literaturze światowej pojawiło się ostatnio wiele nowych prac dotyczących różnorodnych zagadnień dynamiki mostów kolejowych, np. [1-4]. Jednym z kierunków prowadzonych badań jest ocena wpływu zmienności parametrów nawierzchni kolejowej na charakterystyki drgań mostów spowodowanych przejazdem pociągów. Ze względu na duże wymagania jakościowe stosowane w wykonawstwie linii kolejowych dużych prędkości ewentualne odchyłki parametrów nawierzchni mają charakter losowych fluktuacji wokół założonych wartości projektowych. Zagadnienie zmienności parametrów jest więc obecnie analizowane raczej w kategoriach probabilistycznych niż deterministycznych.

W literaturze najczęściej rozważany jest problem nierówności toru, który ma istotne znaczenie z punktu widzenia analizy sprzężonych drgań układu

¹ danuta.bryja@pwr.wroc.pl

most–pociąg [1]. W ujęciu probabilistycznym nierówności toru są opisywane zazwyczaj stacjonarną (często gaussowską) funkcją losową zmiennej przestrzennej, a ich wpływ na charakterystyki drgań jest analizowany metodą Monte Carlo [5, 6]. Ze względu na niestacjonarność odpowiedzi dynamicznej układu most–pociąg ruchomy, charakteryzującego się zmienną w czasie konfiguracją rozkładu masy, rzadko stosowane jest podejście alternatywne wykorzystujące aparat matematyczny procesów stochastycznych. Ciekawym przykładem takiego ujęcia tematu jest praca F. Lu i in. [6], w której autorzy rozwinęli sformułowanie metody PEM (*Pseudo-Excitation Method*) na przypadek analizy stochastycznej drgań układów o parametrach zmiennych w czasie. Wcześniej metoda PEM była stosowana wyłącznie do zagadnień dynamiki stochastycznej układów o parametrach niezależnych od czasu.

W odróżnieniu od problemu nierówności toru, który jest w dużej mierze rozpoznany, dotychczas nie zostało dostatecznie zbadane zagadnienie oceny wpływu zmienności parametrów fizycznych podsypki toru kolejowego. Zasadnicze znaczenie w analizie tego zagadnienia ma sposób modelowania podsypki. W modelach mostów kolejowych tworzonych na podstawie metody elementów skończonych reprezentacją podsypki jest na ogół zbiór izolowanych więzi lepko–sprężystych, zlokalizowanych w punktach podparcia szyn na podkładach, stanowiących równocześnie węzły podziału szyny i dźwigara mostowego na elementy skończone [7, 8]. Podejście to wiąże się z koniecznością wprowadzenia do modelu wielu zmiennych losowych, na ogół skorelowanych, opisujących parametry poszczególnych więzi. W przypadku mostów o dużych rozpiętościach (np. mostów z ciągłymi dźwigarami wieloprzęsłowymi lub mostów podwieszonych [9]) analiza drgań losowych przy założeniu dyskretnego modelu podsypki może prowadzić do nieakceptowalnych nakładów obliczeniowych. Alternatywną metodą modelowania jest rezygnacja z metody elementów skończonych i budowa modelu ciągłego, w którym podsypka nawierzchni kolejowej na moście jest reprezentowana przez podłoże sprężyste. Zastosowanie tego podejścia w zasadzie ogranicza się do analizy drgań dźwigarów jednoprzęsłowych mostów belkowych [10], a także wiszących [11], w zakresie problemów typu 2D, przy znacznym uproszczeniu modelu fizycznego układu.

W niniejszej pracy autorzy proponują nową koncepcję modelu obliczeniowego mostów kolejowych opartą na metodzie GFEM (*Galerkin Finite Element Method*) i łączącą ideę ciągłego modelowania podsypki z podziałem szyn i dźwigara belkowego na elementy skończone. Zdaniem autorów proponowana koncepcja umożliwi efektywną analizę probabilistyczną drgań mostów kolejowych z losowymi parametrami podsypki za pomocą metody symulacyjnej typu Monte Carlo. Analiza ta może być przeprowadzona z wykorzystaniem procedur symulacyjnych skutecznie stosowanych w przypadku losowych nierówności toru, ponieważ przyjęty model podsypki pozwala podobnie opisać wielkości losowe – za pomocą jednowymiarowych funkcji losowych.

Jeżeli zmienną na długości szyny sztywność podsypki przedstawi się wzorem:

$$k(x) = k_w [1 + \kappa(x)] \quad (1)$$

to bezwymiarowa funkcja $\kappa(x)$ będzie opisywała fluktuację sztywności wokół założonej stałej wartości projektowej k_w . W przypadku niewielkich losowych zmian sztywności funkcja $\kappa(x)$ może być założona w postaci stacjonarnego procesu Gaussa o zerowej wartości oczekiwanej, który można stosunkowo łatwo numerycznie wygenerować, stosując aproksymację trygonometryczną ([12, 13]):

$$\kappa(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n x + \varphi_n) \quad (2)$$

analogiczną do przypadku funkcji losowych opisujących nierówności toru [5]. Amplitudy a_n i częstości ω_n (rad/m) składowych harmonicznym szeregu (2) oblicza się według następujących wzorów:

$$a_n = \sqrt{2S_{\kappa\kappa}(\omega_n)\Delta\omega}, \quad \omega_n = \omega_l + (n-0,5)\Delta\omega, \quad \Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N \quad (3)$$

gdzie ω_l , ω_u – istotny przedział częstości, $S_{\kappa\kappa}(\omega)$ – znana gęstość widmowa stacjonarnego procesu normalnego $\kappa(x)$, φ_n – wzajemnie niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[0, 2\pi]$. Dokładność aproksymacji jest tym lepsza, im większe N przyjmie się we wzorze (2). Podobnie można opisać zmienne własności tłumiące podsypki $c(x) = c_w[1 + \gamma(x)]$ z analogiczną aproksymacją funkcji losowej $\gamma(x)$.

Opracowanie modelu obliczeniowego belkowych mostów kolejowych zostało podzielone na dwie części, stanowiące dwie odrębne prace. W niniejszej publikacji przedstawiono sformułowanie teoretyczne, natomiast praca [14] jest poświęcona weryfikacji modelu za pomocą komercyjnego systemu komputerowego SOFiSTiK i zawiera testy numeryczne w zakresie: zagadnienia własnego, zagadnienia drgań wymuszonych przejazdem pociągu i zagadnienia quasi-statycznego. W obu pracach są analizowane drgania pionowe dźwigara mostowego i szyny z uwzględnieniem odkształcalnych stref dojazdowych. Modelem pociągu jest zbiór ruchomych nieresorowanych mas skupionych lub sił skupionych. Jest to model uproszczony, celowo przyjęty na etapie weryfikacji proponowanego algorytmu modelowania mostów metodą GFEM. W dalszych badaniach, po wdrożeniu podstawowych procedur numerycznych służących do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych drgań mostu z losowymi parametrami podsypki, przewidywane jest rozbudowanie modelu pociągu na zwykle stosowany zbiór brył sztywnych połączonych więziami odkształcalnymi i ewentualna rozbudowa modelu mostu.

2. Podstawowe założenia

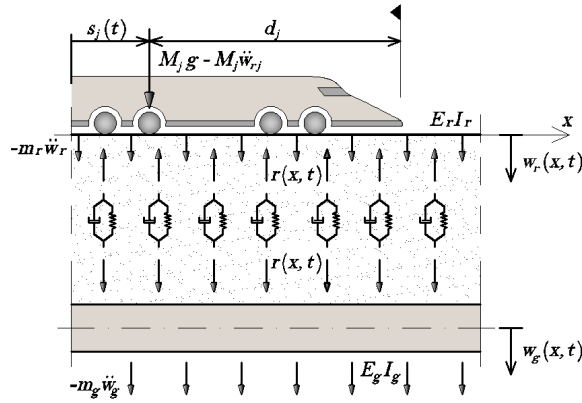
Większość współczesnych modeli obliczeniowych służących do opisu odpowiedzi dynamicznej kolejowych mostów belkowych składa się z trzech zasadniczych podukładów: dźwigara mostowego, nawierzchni kolejowej oraz pociągu. W zależności od rodzaju analizowanego zjawiska poszczególne podukłady są mniej lub bardziej rozbudowane.

W niniejszej pracy uwagę skupiono na drganiach pionowych dźwigara mostowego oraz uwzględnieniu losowych cech podsypki, dlatego też sam pociąg jest opisany w sposób uproszczony za pomocą szeregu nieresorowanych mas skupionych poruszających się po belce modelującej szynę (nazywanej w dalszej części szyną). Układ rozpatrywany jest jako płaski. Punkty przyłożenia poszczególnych mas odpowiadają punktom styku kół pociągu z szyną. Szyna stanowi ciągłą belkę Eulera spoczywającą na liniowo lepko-sprężystym nieinercyjnym podłożu, modelującym warstwę podsypki tłuczniowej. Aby uwzględnić efekt propagacji drgań szyny spowodowany nadjeżdżającym pociągiem, przyjęto dostatecznie długie strefy dojazdowe, pozwalające wyeliminować wpływ warunków brzegowych na końcach szyny na jej drgania w obrębie mostu. Założono, że grunt rodzimy pod warstwą podsypki w obrębie stref dojazdowych jest ciałem sztywnym. Dźwigar mostowy jest przyrzmatyczną, swobodnie podpartą belką Eulera. Rozkład masy szyny i konstrukcji nośnej mostu jest ciągły. W strefie mostu masa podsypki tłuczniowej oraz podkładów kolejowych jest wliczona do masy dźwigara mostowego.

Na rysunku 1. przedstawiono model fizyczny opisywanego układu wraz z wzajemnymi oddziaływaniami poszczególnych podukładów. Reakcja podłoża lepko-sprężystego jest opisana wzorem:

$$r(x, t) = k(x)(w_r - w_g) + c(x)(\dot{w}_r - \dot{w}_g) \quad (4)$$

gdzie przez $k(x) = k_w[1 + \kappa(x)]$ i $c(x) = c_w[1 + \gamma(x)]$ oznaczono funkcyjne parametry sztywności i tłumienia podsypki tłuczniowej w kierunku pionowym,



Rys. 1. Model układu: dźwigar mostu – nawierzchnia kolejowa – pociąg

$(\cdot) = \partial/\partial t$. Indeksy dolne r oraz g odnoszą się kolejno do szyny i dźwigara mostowego. Położenie poruszającej się po szynie j -tej masy ruchomej określa współrzędna $s_j(t) = vt - d_j$, gdzie v jest stałą prędkością ruchu, a d_j odległością masy M_j od czoła pociągu. Przez $\ddot{w}_{rj} = \ddot{w}_r[s_j(t), t]$ oznaczono przyspieszenie drgań szyny śledzące położenie masy M_j (rys. 1.).

Pionowe drgania szyny $w_r(x, t)$ opisuje równanie różniczkowe:

$$E_r J_r w_r^{IV} = p(x, t) - r(x, t) - m_r \ddot{w}_r \quad (5)$$

gdzie $0 \leq x \leq L$ oraz $L = L_1 + L_0 + L_2$ jest sumą długości: lewej strefy dojazdowej (L_1), szyny w obrębie mostu (L_0) i prawej strefy dojazdowej (L_2). W strefach dojazdowych należy podstawić $w_g = 0$, kolejno do wzorów (4) i (5). Równanie drgań pionowych dźwigara mostowego $w_g(x, t)$ ma postać:

$$E_g J_g w_g^{IV} = r(x, t) - m_g \ddot{w}_g \quad (6)$$

gdzie $0 \leq x \leq L_0$, $(\cdot)^I = \partial/\partial x$. Symbole m_r i m_g oznaczają stałe intensywności rozkładu masy szyny i dźwigara, $E_r J_r$ – sztywność giętną szyny, $E_g J_g$ – sztywność dźwigara. Obciążenie szyny określa wzór:

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^{N_M} (M_j g - M_j \ddot{w}_{rj}) \delta(x - s_j) \quad (7)$$

w którym N_M jest liczbą mas modelujących pociąg, a symbol δ oznacza funkcję delta Diraca.

Równania (5) i (6) rozwiązano metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkinia (GFEM), której sformułowanie ogólne można znaleźć w publikacjach [15, 16]. W metodzie GFEM rolę funkcji wagowych pełnią globalne funkcje bazowe, które są złożone z funkcji lokalnych (funkcji kształtu), gdzie aproksymacja odbywa się w obrębie elementu skończonego. W testach numerycznych omawianego algorytmu zastosowano alternatywnie klasyczne funkcje kształtu Hermite'a oraz oryginalnie wyprowadzone funkcje specjalne, oparte na rozwiązaniu ścisłym jednorodnego równania różniczkowego:

$$EJw^{IV} + kw = 0 \quad (8)$$

które opisuje statyczny problem zginania belki na podłożu sprężystym o stałej sztywności k . Rozwiązanie ogólne równania (8), po wprowadzeniu parametryzacji bezwymiarowej $\xi = x/l$, $\alpha^4 = kl^4/EJ$ na długości elementu skończonego l , ma postać:

$$w(\xi) = C_1 S_1(\lambda \xi) + C_2 S_2(\lambda \xi) + C_3 S_3(\lambda \xi) + C_4 S_4(\lambda \xi) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1(\lambda\xi) &= \cosh \lambda\xi \cos \lambda\xi, & S_2(\lambda\xi) &= \sinh \lambda\xi \cos \lambda\xi \\ S_3(\lambda\xi) &= \cosh \lambda\xi \sin \lambda\xi, & S_4(\lambda\xi) &= \sinh \lambda\xi \sin \lambda\xi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

gdzie $\lambda = \alpha / \sqrt{2}$, $0 \leq \xi \leq 1$. Rozwiązanie (9) może być wykorzystane do budowy funkcji kształtu zarówno elementu belkowego szyny, jak i dźwigara mostowego, ponieważ równania (5) i (6) po uwzględnieniu (4) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} E_r J_r w_r^{IV} + k(x)w_r + c(x)\dot{w}_r + m_r \ddot{w}_r &= p(x, t) + k(x)w_g + c(x)\dot{w}_g = \\ &= f_r(x, t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$E_g J_g w_g^{IV} + k(x)w_g + c(x)\dot{w}_g + m_g \ddot{w}_g = k(x)w_r + c(x)\dot{w}_r = f_g(x, t) \quad (12)$$

a więc sprowadzone do jednorodnego równania statycznego są analogiczne do równania (8), jeśli przyjąć, że $k(x) = k_w = \text{const}$.

Biorąc pod uwagę, że $\varphi = dw/dx = (1/l)dw/d\xi$ i postulując spełnienie warunków brzegowych: $w(\xi) = w_i$, $\varphi(\xi) = \varphi_i$, gdy $\xi = 0$ oraz $w(\xi) = w_j$, $\varphi(\xi) = \varphi_j$, gdy $\xi = 1$, na podstawie wzoru (9) wyznaczono następujące funkcje kształtu:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= S_1(\lambda\xi) + G_1(\lambda)S_2(\lambda\xi) - G_1(\lambda)S_3(\lambda\xi) + [G_5(\lambda) + G_6(\lambda)]S_4(\lambda\xi) \\ N_2(\xi) &= \lambda^{-1}G_5(\lambda)S_2(\lambda\xi) - \lambda^{-1}G_6(\lambda)S_3(\lambda\xi) + \lambda^{-1}G_2(\lambda)S_4(\lambda\xi) \\ N_3(\xi) &= -G_3(\lambda)S_2(\lambda\xi) + G_3(\lambda)S_3(\lambda\xi) - 2G_7(\lambda)S_4(\lambda\xi) \\ N_4(\xi) &= \lambda^{-1}G_7(\lambda)S_2(\lambda\xi) - \lambda^{-1}G_7(\lambda)S_3(\lambda\xi) + \lambda^{-1}G_4(\lambda)S_4(\lambda\xi) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \frac{\cosh \lambda \sinh \lambda + \cos \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}, & G_2(\lambda) &= \frac{\cosh \lambda \sinh \lambda - \cos \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}, \\ G_3(\lambda) &= \frac{\sinh \lambda \cos \lambda + \cosh \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}, & G_4(\lambda) &= \frac{\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}, \\ G_5(\lambda) &= \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}, & G_6(\lambda) &= \frac{\sinh^2 \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}, & G_7(\lambda) &= \frac{\sinh \lambda \sin \lambda}{\sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda}. \end{aligned}$$

Funkcje (13) przyjęto w rozważanym zagadnieniu dynamicznym jako funkcje bazowe aproksymacji lokalnej (na długości elementu) przemieszczeń szyny i dźwigara, co wyrażają wzory:

$$w_{rk}(\xi, t) = \mathbf{N}_k^T \mathbf{W}_k \quad (14a)$$

$$w_{ge}(\xi, t) = \mathbf{N}_e^T \mathbf{W}_e \quad (14b)$$

w których $e = 1, 2, \dots, n_g$ oznacza numer elementu dźwigara, a $k = 1, 2, \dots, n_r$ – numer elementu szyny. $\mathbf{W}_k = [w_i, \varphi_i l_k, w_j, \varphi_j l_k]^T$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych elementu szyny o końcach $i-j$, któremu odpowiada wektor sił brzegowych $\mathbf{R}_k = [V_i, M_i, V_j, M_j]^T$. Wektor $\mathbf{N}_k = [N_{1k}, N_{2k}, N_{3k}, N_{4k}]^T$ zawiera funkcje kształtu zależne od parametru $\lambda_k = \alpha_k / \sqrt{2}$, gdzie $(\alpha_k)^4 = k_w l_k^4 / E_r J_r$, symbol $(\)^T$ oznacza operator transpozycji. Analogiczną strukturę mają wektory $\mathbf{W}_e, \mathbf{N}_e, \mathbf{R}_e$ dotyczące elementu dźwigara.

W pracy [14] autorzy przedstawili wyniki testów numerycznych, których celem było porównanie efektywności aproksymacji lokalnej z użyciem funkcji kształtu Hermite’a i funkcji specjalnych (13). Wbrew oczekiwaniom okazało się, że funkcje (13) nie zapewniają lepszej zbieżności rozwiązań, w związku z tym należy dalej przyjąć, że lokalnymi funkcjami bazowymi w metodzie GFEM są funkcje Hermite’a.

3. Zastosowanie metody GFEM

Szynę rozdzielono na trzy odcinki oznaczone dalej indeksem i . Indeks $i = 0$ określa strefę centralną, zlokalizowaną na moście, $i = 1$ – lewą strefę dojazdową, $i = 2$ – prawą strefę dojazdową. Następnie, odcinki szyny (każdy odrębnie) i dźwigar podzielono na elementy skończone, z tym że w obrębie mostu przyjęto taki sam podział szyny na elementy, jak podział dźwigara, czyli $l_k = l_e$. Liczby elementów poszczególnych odcinków szyny wynoszą odpowiednio: n_{r0}, n_{r1}, n_{r2} .

Dalszą procedurę metody GFEM przedstawiono w ujęciu opisanym przez Chunga [16], na przykładzie jednego odcinka szyny, przy czym indeks $i = 0, 1, 2$ pominięto w celu uproszczenia zapisu.

1. Macierzowe równanie ruchu odcinka szyny

Niech \mathbf{q}_r oznacza pełny wektor przemieszczeń węzłowych rozważanego odcinka szyny. Transformacja przemieszczeń węzłowych na przemieszczenia brzegowe elementu k jest zapisana wzorem $\mathbf{W}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{q}_r$. Aproksymacja przemieszczeń szyny w całym obszarze odcinka L_i podzielonym na elementy skończone, nazywana przez Chunga [16] aproksymacją globalną, jest określona wzorem:

$$w_r(x, t) = \sum_{k=1}^{n_r} w_{rk} = \sum_{k=1}^{n_r} \mathbf{N}_k^T \mathbf{W}_k = \sum_{k=1}^{n_r} \mathbf{N}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{q}_r = \mathbf{N}^T \mathbf{q}_r \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{N} = \sum_{k=1}^{n_r} \mathbf{A}_k^T \mathbf{N}_k$ są tzw. globalnymi funkcjami bazowymi. Rozwiązanie (15) równania (11) jest tylko przybliżone, czyli spełnia to równanie z błędem ε , co można zapisać wzorem:

$$E_r J_r w_r^{IV} + k(x) w_r + c(x) \dot{w}_r + m_r \ddot{w}_r - f_r(x, t) = \varepsilon \quad (16)$$

W celu minimalizacji tego błędu żąda się, aby każda funkcja bazowa N_i tworząca wektor \mathbf{N} była ortogonalna względem błędu ε w całym obszarze odcinka szynowego (od 0 do L_i):

$$\int_0^{L_i} \mathbf{N} \varepsilon dx = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{n_r} \mathbf{A}_k^T \int_0^1 \mathbf{N}_k \varepsilon_k l_k d\xi = 0 \quad (17)$$

Warunek (17), nazywany przez Chunga [16] globalną całką Galerkiną (*global Galerkin integral*), jest zapisany za pomocą całek lokalnych zdefiniowanych w obrębie poszczególnych elementów.

Podstawiając za ε_k lewą stronę równania (16), zapisanego dla k -tego elementu po przejściu na współrzędną bezwymiarową $\xi_k = x_k/l_k$, gdzie $0 \leq x_k \leq l_k$, uzyskuje się następujące wyrażenie określające lokalną całkę Galerkiną:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{N}_k \varepsilon_k l_k d\xi &= \frac{E_r J_r}{l_k^3} \int_0^1 \mathbf{N}_k w_{rk}'' d\xi + k_w l_k \int_0^1 [1 + \kappa(\xi)] \mathbf{N}_k w_{rk} d\xi + \\ &+ c_w l_k \int_0^1 [1 + \gamma(\xi)] \mathbf{N}_k \dot{w}_{rk} d\xi + m_r l_k \int_0^1 \mathbf{N}_k \ddot{w}_{rk} d\xi - l_k \int_0^1 \mathbf{N}_k f_{rk}(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie $(\cdot)' = \partial/\partial\xi$. Po podstawieniu relacji (14a) i wykonaniu dwukrotnie operacji całkowania przez części na pierwszym składniku otrzymujemy:

$$\int_0^1 \mathbf{N}_k \varepsilon_k l_k d\xi = -\mathbf{R}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{W}_k + \mathbf{C}_k \dot{\mathbf{W}}_k + \mathbf{B}_k \ddot{\mathbf{W}}_k - \mathbf{F}_k \quad (19)$$

Macierze sztywności \mathbf{K}_k , tłumienia \mathbf{C}_k i bezwładności \mathbf{B}_k elementu oraz wektor sił wzbudzących \mathbf{F}_k są określone wzorami:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \frac{E_r J_r}{l_k^3} \int_0^1 \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k^T d\xi + k_w l_k \int_0^1 [1 + \kappa(\xi)] \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k^T d\xi \\ \mathbf{C}_k &= c_w l_k \int_0^1 [1 + \gamma(\xi)] \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k^T d\xi, \quad \mathbf{B}_k = m_r l_k \int_0^1 \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k^T d\xi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_k = l_k \int_0^1 \mathbf{N}_k f_{rk}(\xi, t) d\xi \quad (21)$$

W dalszym ciągu macierz tłumienia szyny będzie uzupełniona o składnik związany z tłumieniem materiałowym z zadanyam czasem retardacji κ_r , co określa relacja:

$$\mathbf{C}_k = c_w l_k \int_0^1 [1 + \gamma(\xi)] \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k^T d\xi + \frac{\kappa_r E_r J_r}{l_k^3} \int_0^1 \mathbf{N}_k'' \mathbf{N}_k''^T d\xi \quad (22)$$

Po podstawieniu formuły (19) z uwzględnieniem relacji $\mathbf{W}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{q}_r$ do globalnej całki Galerkina (17) otrzymuje się równanie ruchu odcinka szyny:

$$\mathbf{B}_{ri} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_{ri} \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{K}_{ri} \mathbf{q}_{ri} = \mathbf{F}_{ri} + \mathbf{R}_{ri} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_{ri} = \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{A}_k \quad (24a)$$

$$\mathbf{C}_{ri} = \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \quad (24b)$$

$$\mathbf{K}_{ri} = \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k \quad (24c)$$

$$\mathbf{F}_{ri} = \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{F}_k \quad (24d)$$

Wektory sił brzegowych \mathbf{R}_k dotyczące elementów skończonych między pośrednimi węzłami odcinka szyny znikają po wykonaniu sumowania $\mathbf{R}_{ri} = \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{R}_k$. Niezerowe pozostają tylko dwa wektory związane z elementami skrajnymi, które zawierają siły brzegowe w węzłach skrajnych.

2. Równanie łączne trzech odcinków szyny

Po sformułowaniu równań ruchu szyny w obrębie odcinka centralnego i stref dojazdowych, oznaczonych kolejno indeksami $i = 0, 1, 2$, otrzymuje się zbiór trzech równań (23), które można zapisać łącznie, wprowadzając nowy wektor przemieszczeń węzłowych \mathbf{Q}_r . Wektor ten zawiera przemieszczenia węzłów szyny numerowanych na nowo w całym obszarze od 0 do $L = L_1 + L_0 + L_2$, z wyłączeniem węzłów skrajnych, które należy traktować jako utwierdzone. Po określeniu transformacji przemieszczeń $\mathbf{q}_{ri} = \mathbf{A}_{ri} \mathbf{Q}_r$ i dodaniu stronami równań (23), pomnożonych lewostronnie przez macierz transformacji \mathbf{A}_{ri}^T , otrzymuje się równanie ruchu szyny:

$$\mathbf{B}_{rr} \ddot{\mathbf{Q}}_r + \mathbf{C}_{rr} \dot{\mathbf{Q}}_r + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{Q}_r = \mathbf{F}_r \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{rr} = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_{ri}^T \mathbf{B}_{ri} \mathbf{A}_{ri} \quad (26a)$$

$$\mathbf{C}_{rr} = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_{ri}^T \mathbf{C}_{ri} \mathbf{A}_{ri} \quad (26b)$$

$$\mathbf{K}_{rr} = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_{ri}^T \mathbf{K}_{ri} \mathbf{A}_{ri} \quad (26c)$$

$$\mathbf{F}_r = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_{ri}^T \mathbf{F}_{ri} \quad (26d)$$

w którym wektor sił brzegowych $\mathbf{R}_r = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_{ri}^T \mathbf{R}_{ri}$ zeruje się po uwzględnieniu warunków brzegowych na końcach szyny.

Aby równanie (25) było w pełni określone, należy wyznaczyć jawną postać wektora (21), biorąc pod uwagę pełne obciążenie szyny $f_r(x, t)$ wynikające z działania obciążenia użytkowego (7) i reakcji podłoża modelującego podsypkę (por. równanie (11)). Obciążenie elementu skończonego k określa wzór:

$$f_{rk}(x_k, t) = \sum_{j=1}^{N_M} (M_j g - M_j \ddot{w}_{rkj}) \delta(x_k - s_{kj}) + k(x_k) w_{ge} + c(x_k) \dot{w}_{ge} \quad (27)$$

gdzie $0 \leq x_k \leq l_k$, przy czym trzeba podstawić:

$$s_{kj}(t) = \begin{cases} s_j(t) - (k-1)l_k, & \text{gdy } i = 1 \\ s_j(t) - (k-1)l_k - L_1, & \text{gdy } i = 0 \\ s_j(t) - (k-1)l_k - L_1 - L_0, & \text{gdy } i = 2 \end{cases} \quad (28)$$

w zależności od tego, do którego odcinka szyny należy rozważany element. Ponadto w obrębie centralnego odcinka szyny $w_{ge} = \mathbf{N}_e^T \mathbf{W}_e$, $\dot{w}_{ge} = \mathbf{N}_e^T \dot{\mathbf{W}}_e$, na podstawie relacji (14b), w strefach dojazdowych: $w_{ge} = 0$, $\dot{w}_{ge} = 0$. Przyspieszenie pionowego ruchu szyny śledzące położenie masy M_j w obszarze elementu k wynosi:

$$\ddot{w}_{rkj} = \ddot{w}_{rk}[s_{kj}(t), t] = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{N}_k^T [s_{kj}(t)/l_k] \mathbf{W}_k(t)) = \ddot{\mathbf{N}}_k^T \mathbf{W}_k + 2\dot{\mathbf{N}}_k^T \dot{\mathbf{W}}_k + \ddot{\mathbf{N}}_k^T \ddot{\mathbf{W}}_k \quad (29)$$

jeśli $0 < s_{kj} \leq l_k$, przy czym przyjęto oznaczenia: $\ddot{\mathbf{N}}_{kj} = \mathbf{N}_k[\varsigma_{jk}(t)]$, $\varsigma_{jk}(t) = s_{jk}(t)/l_k$. W pozostałych przypadkach, tzn. gdy $s_{kj} \leq 0$ lub $s_{kj} > l_k$, przy-

spieszenie śledzące jest równe zero, wówczas wystarczy przyjąć, że $\ddot{\mathbf{N}}_{kj} = 0$. Uwzględniając, że $\dot{s}_{kj} = v$, bo $s_j(t) = vt - d_j$, otrzymuje się:

$$\dot{\mathbf{N}}_k = \dot{\mathbf{N}}_k[\varsigma_{kj}(t)] = \frac{v}{l_k} \frac{d\mathbf{N}_k}{d\xi} = \frac{v}{l_k} \mathbf{N}'_k, \quad \ddot{\mathbf{N}}_k = \ddot{\mathbf{N}}_k[\varsigma_{kj}(t)] = \frac{v^2}{l_k^2} \frac{d^2\mathbf{N}_k}{d\xi^2} = \frac{v^2}{l_k^2} \mathbf{N}''_k \quad (30)$$

Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej $\xi = x_k/l_k$ funkcja delta Diraca przyjmuje postać $\delta(x_k - s_{kj}) = \delta(\xi l_k - \varsigma_{kj} l_k) = (1/l_k) \delta(\xi - \varsigma_{kj})$. Wtedy

$$\mathbf{F}_k = \sum_{j=1}^{N_M} \tilde{\mathbf{N}}_{kj} (M_j g - M_j \ddot{w}_{rkj}) + \left(l_k \int_0^1 \mathbf{N}_k [k(\xi) w_{ge} + c(\xi) \dot{w}_{ge}] d\xi \right)_{\text{gd}y \ i=0} \quad (31)$$

na podstawie wzoru (21), co po uwzględnieniu równań (29), (30) i (14b) prowadzi do wyniku:

$$\mathbf{F}_k = \tilde{\mathbf{F}}_k - \tilde{\mathbf{K}}_k \mathbf{W}_k - \tilde{\mathbf{C}}_k \dot{\mathbf{W}}_k - \tilde{\mathbf{B}}_k \ddot{\mathbf{W}}_k + (\mathbf{K}_{ke} \mathbf{W}_e + \mathbf{C}_{ke} \dot{\mathbf{W}}_e)_{\text{gd}y \ i=0} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_k(t) &= \frac{v^2}{l_k^2} \tilde{\mathbf{N}}_k \{\mathbf{M}\} \tilde{\mathbf{N}}_k^T, \quad \tilde{\mathbf{C}}_k(t) = \frac{2v}{l_k} \tilde{\mathbf{N}}_k \{\mathbf{M}\} \tilde{\mathbf{N}}_k^T \\ \tilde{\mathbf{B}}_k(t) &= \tilde{\mathbf{N}}_k \{\mathbf{M}\} \tilde{\mathbf{N}}_k^T, \quad \tilde{\mathbf{F}}_k(t) = \tilde{\mathbf{N}}_k \{\mathbf{M}\} \mathbf{1} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_{ke} = k_w l_k \int_0^1 [1 + \kappa(\xi)] \mathbf{N}_k \mathbf{N}_e^T d\xi, \quad \mathbf{C}_{ke} = c_w l_k \int_0^1 [1 + \gamma(\xi)] \mathbf{N}_k \mathbf{N}_e^T d\xi \quad (34)$$

gdzie $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$, $\dim \mathbf{1} = (N_M \times 1)$, $\{\mathbf{M}\} = \text{diag}(M_1, M_2 \dots)$, $\dim \{\mathbf{M}\} = (N_M \times N_M)$ oraz $\tilde{\mathbf{N}}_k = [\tilde{\mathbf{N}}_{k1}, \tilde{\mathbf{N}}_{k2} \dots]$, $\dim \tilde{\mathbf{N}}_k = (4 \times N_M)$. Dalsza procedura prowadzona według wzorów (24d) i (26d), z uwzględnieniem relacji (14a) i transformacji $\mathbf{q}_{ri} = \mathbf{A}_{ri} \mathbf{Q}_r$, powoduje przekształcenie równania (25) do postaci:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{B}_{rr} + \tilde{\mathbf{B}}_{rr}(t)] \ddot{\mathbf{Q}}_r + [\mathbf{C}_{rr} + \tilde{\mathbf{C}}_{rr}(t)] \dot{\mathbf{Q}}_r + [\mathbf{K}_{rr} + \tilde{\mathbf{K}}_{rr}(t)] \mathbf{Q}_r = \\ & = \tilde{\mathbf{F}}_r(t) + \mathbf{A}_{r0}^T \sum_{k=1}^{n_{r0}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{K}_{ke} \mathbf{W}_e + \mathbf{A}_{r0}^T \sum_{k=1}^{n_{r0}} \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_{ke} \dot{\mathbf{W}}_e \end{aligned} \quad (35)$$

przy czym struktura macierzy $\tilde{\mathbf{B}}_{rr}(t)$, $\tilde{\mathbf{C}}_{rr}(t)$, $\tilde{\mathbf{K}}_{rr}(t)$ i wektora $\tilde{\mathbf{F}}_r(t)$ jest określona wzorami (24) i (26), do których należy podstawić definicję macierzy (33).

3. Równanie ruchu dźwigara mostowego

Przekształcając zależność (12) metodą analogiczną do przedstawionej w pkt 1., otrzymuje się następujące równanie macierzowe:

$$\mathbf{B}_g \ddot{\mathbf{q}}_g + \mathbf{C}_g \dot{\mathbf{q}}_g + \mathbf{K}_g \mathbf{q}_g = \mathbf{F}_g + \mathbf{R}_g \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_g = \sum_{e=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_e^T \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{C}_g = \sum_{e=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{K}_g = \sum_{e=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e, \quad \mathbf{F}_g = \sum_{e=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_e^T \mathbf{F}_e \quad (37)$$

gdzie macierz \mathbf{A}_e przekształca przemieszczenia węzłowe dźwigara na przemieszczenia brzegowe elementów skończonych: $\mathbf{W}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{q}_g$. Macierze bezwładności, tłumienia i sztywności elementów są zdefiniowane wzorami (20), przy czym indeksy k i r należy zamienić odpowiednio na indeksy e i g . Macierz tłumienia uzupełniona o składniki związane z tłumieniem materiałowym (z danym czasem retardacji κ_g) i konstrukcyjnym (z danym współczynnikiem tłumienia masowego μ_g) ma postać:

$$\mathbf{C}_e = c_w l_e \int_0^1 [1 + \gamma(\xi)] \mathbf{N}_e \mathbf{N}_e^T d\xi + \frac{\kappa_g E_g J_g}{l_e^3} \int_0^1 \mathbf{N}_e'' \mathbf{N}_e''^T d\xi + \mu_g m_g l_e \int_0^1 \mathbf{N}_e \mathbf{N}_e^T d\xi \quad (38)$$

Wektor równoważników obciążenia \mathbf{F}_e wynika z rozłożonego oddziaływania podsypki (por. równanie (12)), które w obszarze elementu skończonego e jest zdefiniowane wzorem: $f_{ge}(x, t) = k(x_e) w_{rk} + c(x_e) \dot{w}_{rk}$. Pamiętając, że podział dźwigara i szyny na elementy skończone jest taki sam ($l_e = l_k$), na podstawie wzoru (21) otrzymuje się:

$$\mathbf{F}_e = l_e \int_0^1 \mathbf{N}_e f_{ge}(\xi, t) d\xi = \mathbf{K}_{ek} \mathbf{W}_k + \mathbf{C}_{ek} \dot{\mathbf{W}}_k \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_{ek} = k_w l_e \int_0^1 [1 + \kappa(\xi)] \mathbf{N}_e \mathbf{N}_k^T d\xi = \mathbf{K}_{ke}^T, \quad \mathbf{C}_{ek} = c_w l_e \int_0^1 [1 + \gamma(\xi)] \mathbf{N}_e \mathbf{N}_k^T d\xi = \mathbf{C}_{ke}^T \quad (40)$$

Równanie (36) opisuje drgania dźwigara mostowego w bazie przemieszczeń węzłowych \mathbf{q}_g obranych we wszystkich węzłach podziału na elementy skończone. Aby uwzględnić warunki brzegowe wynikające ze sposobu podparcia dźwigara, wprowadzany jest nowy zbiór przemieszczeń węzłowych \mathbf{Q}_g , w którym zostały wyeliminowane zerowe przemieszczenia węzłów. Po zdefiniowaniu przekształcenia $\mathbf{q}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{Q}_g$ równanie ruchu (36) przyjmuje ostateczną postać:

$$\mathbf{B}_{gg} \ddot{\mathbf{Q}}_g + \mathbf{C}_{gg} \dot{\mathbf{Q}}_g + \mathbf{K}_{gg} \mathbf{Q}_g = \mathbf{A}_g^T \sum_{e=1}^{n_g} \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_{ek} \mathbf{W}_k + \mathbf{A}_g^T \sum_{e=1}^{n_g} \mathbf{A}_e^T \mathbf{C}_{ek} \dot{\mathbf{W}}_k \quad (41)$$

$$\mathbf{B}_{gg} = \mathbf{A}_g^T \mathbf{B}_g \mathbf{A}_g, \quad \mathbf{C}_{gg} = \mathbf{A}_g^T \mathbf{C}_g \mathbf{A}_g, \quad \mathbf{K}_{gg} = \mathbf{A}_g^T \mathbf{K}_g \mathbf{A}_g, \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{A}_g^T \mathbf{F} \quad (42)$$

przy czym $n_g = n_{r0}$.

4. Równanie drgań układu: dźwigar – szyna – pociąg

Drgania mostu spowodowane przejazdem pociągu ze stałą prędkością v , a także drgania szyn w strefach dojazdowych opisują dwa sprzężone równania (35) i (41). Po podstawieniu do tych równań zależności:

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{q}_{r0} = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{r0} \mathbf{Q}_r, \quad \mathbf{W}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{q}_g = \mathbf{A}_e \mathbf{A}_g \mathbf{Q}_g \quad (43)$$

można je zapisać łącznie w ogólnie znanej postaci:

$$\mathbf{B}(t) \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}(t) \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}(t) \mathbf{Q} = \mathbf{F}(t) \quad (44)$$

która ma następującą strukturę blokową:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{rr} + \tilde{\mathbf{B}}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}}_r \\ \ddot{\mathbf{Q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rr} + \tilde{\mathbf{C}}_{rr} & -\mathbf{C}_{rg} \\ -\mathbf{C}_{gr} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_r \\ \dot{\mathbf{Q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} + \tilde{\mathbf{K}}_{rr} & -\mathbf{K}_{rg} \\ -\mathbf{K}_{gr} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{Q}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{gr} = \mathbf{A}_g^T \left(\sum_{e=1}^{n_g} \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_{ek} \mathbf{A}_k \right) \mathbf{A}_{r0} = \mathbf{K}_{rg}^T, \quad \mathbf{C}_{gr} = \mathbf{A}_g^T \left(\sum_{e=1}^{n_g} \mathbf{A}_e^T \mathbf{C}_{ek} \mathbf{A}_k \right) \mathbf{A}_{r0} = \mathbf{C}_{rg}^T \quad (45)$$

Rozwiązanie macierzowego równania (44) otrzymuje się numerycznie, np. całkując jawną bezwarunkowo stabilną metodą Newmarka.

5. Podsumowanie

Zdefiniowany równaniem (44) płaski model obliczeniowy belkowego mostu kolejowego umożliwia randomizację własności materiału podsypki przez przyjęcie założenia, że funkcyjne parametry sztywności i tłumienia warstwy podsypki tłuczniowej $k(x) = k_w[1 + \kappa(x)]$ i $c(x) = c_w[1 + \gamma(x)]$ są określone ciągły-

mi, stacjonarnymi funkcjami losowymi $\kappa(x)$ i $\gamma(x)$ o znanych gęstościach widmowych. Zastosowany algorytm modelowania mostu pozwala na odrębną deklarację parametrów rozkładu funkcji gęstości w obszarze każdego z trzech rozważanych odcinków szyny. Można też przyjąć w uproszczeniu, że losowe własności ma jedynie podsypka w obszarze nawierzchni kolejowej na moście. Opisane podejście może być stosowane zarówno do mostów jednoprzęsłowych – stosunkowo krótkich, jak i do mostów wieloprzęsłowych (ciągłych) o większych rozpiętościach, przy czym opis cech losowych pozostaje bez zmian dzięki przyjęciu ciągłego modelu podsypki.

Analiza niestacjonarnych drgań mostu z losowymi parametrami podsypki będzie przedmiotem dalszych badań, przy czym przewidywane jest zastosowanie podejścia symulacyjnego metodą Monte Carlo. Do numerycznej symulacji funkcji losowych jest planowane zastosowanie najprostszej aproksymacji trygonometrycznej zapisanej wzorem (2) lub użycie bardziej zaawansowanych algorytmów sekwencyjnych typu ARMA [12]. W każdym przypadku wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych drgań mostu wiąże się z dużym nakładem obliczeniowym, który w dużym stopniu zależy od efektywności algorytmu symulacji przebiegów drgań mostu. Z tego powodu analizę drgań losowych należy poprzedzić testami numerycznymi zagadnienia deterministycznego, aby ustalić optymalne wartości parametrów decydujących o rozmiarze zadania, który ma istotny wpływ na czas obliczeń. Badania w tym zakresie są przedstawione w pracy [14], która stanowi drugą (numeryczną) część opracowania tematu niniejszej publikacji.

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego nr N N506 0992 40 finansowanego w latach 2011-2013 przez Narodowe Centrum Nauki.

Literatura

- [1] Fryba L.: A rough assessment of railway bridges for high speed trains, *Engineering Structures*, no 23, 2001, s. 548-556.
- [2] Tanabe M., Wakui H., Matsumoto N., Okuda H., Sogabe M., Komiya S.: Computational model of a Shinkansen train running on the railway structure and the industrial applications, *Journal of Materials Processing Technology*, no 140, 2003, s. 705-710.
- [3] Xia H., Zhang N., Guo W.W.: Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge system, *Journal of Sound and Vibration*, no 297, 2006, s. 810-822.
- [4] Takemiya H.: Analysis of wave field from high-speed train on viaduct at shallow/deep soft grounds, *Journal of Sound and Vibration*, no 310, 2008, s. 631-649.
- [5] Lia Y., Qiang S., Liao H., Xu Y.L.: Dynamics of wind-rail-vehicle-bridge systems, *Journal of Wind Eng. and Industrial Aerodynamics*, no 93, 2005, s. 483-507.
- [6] Lu F., Lin J.H., Kennedy D., Williams F.W.: An algorithm to study non-stationary random vibrations of vehicle-bridge systems, *Computers and Structures*, no 87, 2009, s. 177-185.

- [7] Podwórna M.: Determination of the design model for simulating vibrations of steel beam bridges under moving trains, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, no 4(1), 2004, s. 57-69.
- [8] Kłasztorny M.: *Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybko-bieżnymi*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [9] Au F.T.K., Wang J.J., Cheung Y.K.: Impact study of cable-stayed railway bridge with random rail irregularities, *Engineering Structures*, no 24(5), 2002, s. 529-541.
- [10] Biondi B., Muscolino G., Sofi A.: A substructure approach for the dynamic analysis of train-track-bridge system, *Computers and Structures*, no 83, 2005, s. 2271-2281.
- [11] Biondi B., Muscolino G., Sofi A.: Analysis of dynamic interaction between suspension bridges and running trains, *Structural Dynamics EUROLYN2002*, ed. H. Grundmann and G.I. Schueller, 2002, s. 1041-1046.
- [12] Sobczyk K., Spencer B.F.: *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*, PWN, Warszawa 1996.
- [13] Śniady P.: *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
- [14] Bryja D., Hołubowski R., Podwórna M.: Modelowanie belkowych mostów kolejowych z zastosowaniem metody GFEM. Część II. Testy numeryczne, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej*, nr 283, *Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, z. 59, 2012, s. 21-33.
- [15] Chung T.J.: *Computational fluid dynamics*, Cambridge University Press, New York 2006.
- [16] Łodygowski T., Kąkol W.: *Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach konstrukcji inżynierskich*, Wydaw. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1994.

MODELING OF RAILWAY BEAM BRIDGES BY USING GFEM METHOD. PART I. THEORETICAL FORMULATION

Summary

The paper presents the GFEM algorithm for modeling railway beam bridges with random parameters of rail bed (ballast) treated as a continuous non-inertial foundation. To approximate dynamic displacements of the bridge girder and rails, special local shape functions have been derived on the basis of the exact solution of the static equation of an Euler beam resting on elastic foundation. Alternatively, Hermite's shape functions are used. Vertical bridge vibrations caused by the train moving at constant velocity are considered under assumption that the train is idealized as a set of moving masses. In order to simulate the dynamic state of the system when the train arrives at the bridge, it is assumed that the train starts sufficiently far ahead of the bridge girder. The approach zones of the rail track at both bridge ends are analyzed as an Euler beam on viscoelastic foundation. The presented algorithm is expected to be effective in Monte Carlo simulations. In that case it can be easily expanded by taking into account more realistic physical model of a train in the form of MDOF system.