ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ Nr 283
Budownictwo i Inżynieria Środowiska z. 59 (1/12/I) 2012

Małgorzata STOJEK
Politechnika Krakowska

ZASTOSOWANIE FALOWYCH FUNKCJI KSZTAŁTU W ZAGADNIENIACH PROPAGACJI FAL – PRZEGLĄD METOD

Otrzymanie efektywnych metod dyskretyzacyjnych dla równania Helmholtza w zakresie wysokich częstotliwości zostało uznane za jedno z największych wyzwań dla analizy numerycznej XXI wieku, ze względu na tzw. dyspersję numeryczną powodującą propagację kumulującego się błędu rozwiązania na cały obszar (tzw. *pollution effect*). Zaproponowano wiele nowych niestandardowych sformułowań, w tym wykorzystujących wiedzę o oscylacyjnym charakterze rozwiązania, celem zniwelowania tego efektu i poprawy efektywności wielomianowych elementów skończonych. W artykule krótko zarysowano przegląd nowych MES opartych na funkcjach falowych oraz podano wybrane publikacje dotyczące tego zagadnienia.

1. Wprowadzenie

Zjawisko propagacji fal występujące w zagadnieniach praktycznych, takich jak akustyka, elektromagnetyzm, dynamika ośrodków sprężystych, geofizyka itp., jest uważane za jedno z największych wyzwań badawczych XXI wieku dla inżynierii obliczeniowej [1, 2]. Nowe metody numeryczne są najczęściej formułowane i testowane w kontekście problemów opisanych w dziedzinie częstotliwości skalarnym równaniem Helmholtza:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0,$$

gdzie k oznacza liczbę falową. Dwa główne wyzwania to [3]: efektywne podejście do obszarów nieograniczonych oraz numeryczna dyspersja, która występuje przy aproksymacji krótkich fal w skali mikro (rząd długości fali) i zaburza wyniki w całym obszarze (na skalę makro).

W przypadku problemów brzegowych zdefiniowanych w obszarach nieograniczonych mamy dodatkowo do spełnienia warunek Sommerfelda, gwarantujący dodatni strumień energii w nieskończoności, a tym samym jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia. W przeszłości, ze względu na obniżenie wymiaru problemu (mniejszą liczbę stopni swobody), preferowaną metodą obliczeniową w akustyce były elementy brzegowe, niewymagające specjalnego podejścia do obszaru nieograniczonego i prowadzące do mniejszych, aczkolwiek pełnych macierzy układu. Obecnie argument o ujemnej stronie metody elementów brzegowych (MEB), związanej z brakiem pasmowości macierzy układu, w wyniku rozwoju w ostatnich latach szybkich wielobiegunowych metod (*fast multipole methods*, FMM) [4], stał się mniej ewidentny, jednakże metoda elementów skończonych (MES) zachowała swoją przewagę związaną z możliwością modelowania złożonych, niejednorodnych obszarów i zagadnień sprzężonych. Ograniczoność MEB do jednorodnego medium można jednak obejść, łącząc technikę tę z MES w obszarze z niejednorodnym medium. Efektywność obliczeniowa FMM (zwłaszcza tzw. *windowed*-FMM) jest wprawdzie praktycznie nieosiągalna dla jakichkolwiek algorytmów MES, jednak zakres stosowania tej metody (w połączeniu z klasyczną MEB) jest nadal ograniczony do obszarów (obiektów), których charakterystyczny wymiar L jest co najwyżej kilkaset razy większy od długości fali λ [5]. Z obecnymi metodami brzegowych równań całkowych w odniesieniu do zagadnień rozpraszania akustycznego i kierunkami badań dla problemów z $L/\lambda \rightarrow \infty$ można zapoznać się w publikacji [5]. W przypadku MES przeglądu różnych sposobów podejścia do obszarów zewnętrznych, opartych na dziedzinie rozwiązywanego problemu, takich jak metody Dirichlet-to-Neumann (DtN), absorbcyjne warunki brzegowe, elementy nieskończone czy też całkowicie dopasowana warstwa tłumiąca (*perfectly matched layer*, PML), dokonano w pracach [3, 6].

Numeryczna dyspersja dotyczy efektu, kiedy to schemat numeryczny zawodzi podczas odtwarzania propagacji fali z prawidłową prędkością, prowadząc do wyprzedzenia lub opóźnienia fazowego numerycznej aproksymacji. Jest ona często odpowiedzialna nie tylko za niewystarczająco dokładne rozwiązanie jednej długości fali, lecz również za wyniki globalnie jakościowo nieprawidłowe! Świadomość znaczenia numerycznej dyspersji jest powszechna, stąd jest ona często używana do oceny jakości schematów numerycznych, a także do rankingu różnych metod elementów skończonych [7].

W dalszej części artykułu przedstawiono metody redukcji numerycznej dyspersji i powodowanych nią zaburzeń rozwiązania w odległych punktach obszaru (tzw. *pollution error*) z użyciem niewielomianowych funkcji kształtu. W przypadku aproksymacji z zastosowaniem wielomianów niższego stopnia można wykorzystać analityczne informacje dotyczące liczby falowej celem wyprowadzenia stabilizowanych sformułowań o zmniejszonej dyspersji i błędach typu *pollution*. Wielomiany wyższego stopnia, w tym wersja *hp* MES, mogą być również stosowane do kontroli numerycznej dyspersji. Przegląd tego typu metod, jak i zasad doboru siatek MES można znaleźć w pracach [3, 6, 8-12]. Niemniej nieakceptowalny w praktyce długi czas obliczeń wymagany dla dokładnej aproksymacji rozwiązań w skali rzędu długości fali oraz kontroli błędów numerycznej dyspersji leży u źródeł ostatnio rozwijanych niestandardowych metod elementów skończonych.

2. Przestrzenie „wzbogacone" (*enriched spaces*)

Wspólnym mianownikiem sformułowań określanych jako metody ze „wzbogaceniem" (*enrichment methods*) jest włączenie do przestrzeni aproksymacyjnych (algorytmu numerycznego) funkcji, które zawierają informacje o charakterze rozwiązania problemu, np. funkcji falowych w przypadku równania Helmholtza. Przykładem takich funkcji są też całki ogólne jednorodnych równań różniczkowych – często znane, ale mające charakter globalny i stąd wymagające w praktyce specjalnego podejścia.

Uogólniona metoda elementów skończonych (*generalized finite element method*, GFEM) [13, 14] jest rozszerzeniem metody podziału jedności (*partition of unity method*, PUM) [15], gdzie jednorodne całki ogólne są przemnażane przez standardowe funkcje kształtu. Wielomianowe funkcje lokalizują całki ogólne, zapewniając ciągłość rozwiązania między elementami. W metodzie PUM iloczyny całek ogólnych i wielomianów aproksymują cały obszar, gdy w przypadku GFEM stosuje się je tylko lokalnie w skali mikro, łącznie z aproksymacją wielomianową w skali makro. W wyniku tego uzyskuje się dla GFEM poprawę uwarunkowania macierzy, w porównaniu z metodą PUM, która szczególnie prowadzi do układów znacząco źle uwarunkowanych [8].

W nieciągłej metodzie ze wzbogaceniem (*discontinuous enrichment method*, DEM) [16], w przeciwieństwie do PUM, bazowe funkcje falowe są dodane do standardowych wielomianowych funkcji kształtu, a nie przemnożone przez nie. Na brzegach elementów wprowadza się dodatkowo mnożniki Lagrange'a celem wymuszenia ciągłości rozwiązania w sensie słabym. Przed agregacją globalnej macierzy sztywności dokonuje się lokalnej kondensacji statycznej na poziomie elementu, by ostatecznie otrzymać (jak wskazują testy numeryczne) lepiej uwarunkowane wynikowe macierze układu niż w przypadku PUM. Nieciągłą metodę ze wzbogaceniem można również sformułować w ramach podejścia wieloskalowego [17].

DEM może być również przedstawiona jako nieciągła metoda Galerkina (*discontinuous Galerkin method*, DGM) z mnożnikami Lagrange'a jako stopniami swobody. W publikacji [18] pokazano, że dla dużej klasy problemów opisanych równaniem Helmholtza wielomianowe funkcje kształtu nie są niezbędne do otrzymania rozwiązania dobrze oddającego charakter falowy problemu. Pominięto więc pole wielomianowe, co przekształciło DEM w DGM z płaskimi falami jako funkcjami kształtu [19]. W pracach [18, 20] ciągłość w sensie słabym między oscylującymi polami wymuszono za pomocą odcinkowo oscylujących mnożników Lagrange'a zdefiniowanych na brzegach elementów. Należy zauważyć, że w pracy [20] zaobserwowano pogorszenie uwarunkowania lokalnych macierzy elementów (w przeciwieństwie do zagregowanej macierzy globalnej) dla pewnych kombinacji wyższego rzędu funkcji falowych i mnożników Lagrange'a i (co ważniejsze) w przypadku zwiększonej gęstości siatki w stosunku do długości jednej fali.

3. Metody dyskretyzacyjne typu Trefftza (falowe)

Określenie metody typu Trefftza jest używane w kontekście metod aproksymacyjnych, w których funkcjami bazowymi dla danego elementu, tzw. ***T***-podobszaru, są całki równania różniczkowego opisującego problem (z definicji spełniają one ściśle równanie w każdym punkcie wewnętrznym elementu). Nieznane współczynniki kombinacji liniowych tak określonych funkcji kształtu są znajdywane z warunku wymuszenia w sensie słabym ciągłości rozwiązania między elementami i spełnienia warunków brzegowych [21]. Sama koncepcja jest blisko związana z aproksymacjami niezależnymi od siatki elementów [22], gdyż wielkość *T*-podobszaru nie musi być powiązana z długością fali. Podejście to obejmuje [3]: metodę słabych elementów (*weak element method*, WEM) [23], ultrasłabe sformułowanie wariacyjne (*ultra weak variational formulation*, UWVF) [24], metodę najmniejszych kwadratów (*least-squares method*, LSM) zaproponowaną w [25, 26]. Typowymi przykładami funkcji bazowych są płaskie fale [27] i funkcje Bessela [25]. Wszystkie te metody są metodami niedostosowanymi, w których należy zapewnić ciągłość rozwiązań i jego pochodnych na granicy elementów [28].

W metodzie UWVF najpierw przybliża się liniową kombinację rozwiązania i jego pochodnej w kierunku normalnej na brzegu elementu za pomocą sumy funkcji wykładniczych, a następnie aproksymuje rozwiązanie wewnątrz każdego podobszaru, rozwiązując lokalnie problem Helmholtza z warunkami brzegowymi typu Robina. LSM różni się od WEM głównie sposobem wyrażenia warunków ciągłości na granicy elementów. UWVF w formie zaproponowanej w pracy [24] jest niezmiernie skomplikowana. LSM jest wprawdzie łatwiejsza do zaimplementowania i prowadzi do macierzy hermitowskich, jednak wynik obliczeń jest uzależniony od wartości parametru kary, którego optymalna wartość pozostaje do określenia [18]. Natomiast w artykule [28] pokazano, że rozważana metoda residuów ważonych typu Galerkina jest równoważna UWVF sformułowanej oryginalnie przez Cessenata i Desprésa.

W pracy [28] zaprezentowano testy numeryczne metod LSM i UWVF dla zagadnień propagacji akustycznej w dwuwymiarowych ograniczonych obszarach: dla jednorodnego przewodu i obszaru typu *L-shaped* (obszaru w kształcie litery *L* z osobliwością rozwiązania w wierzchołku kąta rozwartego). Metody dostosowaną PUM i niedostosowaną UWVF przestudiowano w publikacji [29]. Najnowsze porównanie efektywności następujących metod falowych: nieciągłej metody Galerkina [30], metody ultrasłabej i najmniejszych kwadratów przedstawiono w pracy [31], w ramach zunifikowanego podejścia typu Trefftza. Ogólny przegląd metod typu Treffza dla równania Helmholtza można również znaleźć np. w artykule [32]. Ważnym rezultatem otrzymanym w kontekście metod Trefftza jest tzw. *T*-zupełność, która wskazuje, czy przyjęty ciąg lokalnych rozwiązań jest wystarczający do aproksymacji rozwiązania [25, 33].

Falowe funkcje bazowe

Najnowsze wyniki i otwarte problemy związane z metodami Trefftza dla równania Helmholtza dotyczą wyboru zarówno rodzaju funkcji falowych, jak i ich liczby na jeden element. Dotychczas uważano, że płaskie fale są bardziej praktyczne niż funkcje Bessela ze względu na większą łatwość ich generacji oraz możliwość dokładnego obliczenia wielu całek. Większość numerycznych testów była przeprowadzana dla problemów regularnych oraz stosunkowo niewielkich liczb płaskich fal na element (np. [34]).

Niemniej teoretyczne i numeryczne rezultaty przedstawione w pracy [27] zwracają uwagę na pewne ograniczenia w stosowaniu płaskich fal jako funkcji bazowych, związane ze skończoną dokładnością obliczeń komputerowych. Perrey-Debain formułuje wniosek, że w praktyce należy wyraźnie rozróżnić obszary osobliwe/z zanikającymi falami (będące wynikiem źródeł, nieregularności brzegu, takich jak wierzchołki, gwałtownych zmian warunków brzegowych itp.), w których rozwiązanie nie może być aproksymowane za pomocą płaskich fal, od obszarów regularnych/z rozchodzącymi się falami, dla których płaskie fale są odpowiednie, a tak wybrane funkcje bazowe są najkorzystniejsze z numerycznego punku widzenia. Podobne wnioski dla obszaru *L*-kształtnego są zawarte w publikacji [28] – zastosowanie specjalnych funkcji Bessela rzędu ułamkowego w otoczeniu osobliwości, w przeciwieństwie do płaskich fal, prowadziło do stabilnych rozwiązań, pomimo numerycznej osobliwości macierzy układu.

Autorzy pracy [35] sugerują, że otrzymane przez nich wyniki nie potwierdzają przekonania, że wersja *h* nieciągłej metody Galerkina (DGM) z płaskimi falami jest wolna od efektów typu *pollution*. Uważają, że w praktycznych zastosowaniach tej metody preferowane powinny być duże elementy i aproksymacje oparte na większej liczbie funkcji falowych *p*. Rozsądna strategia typu *hp*, prowadząca wprawdzie do notorycznie źle uwarunkowanych układów liniowych, również w pracy [36] jest rekomendowana jako najciekawsza opcja. W artykule [31] zbadano uwarunkowanie układów dla trzech różnych metod (DG, UWVF, LS), otrzymując interesujące wyniki, sugerujące, że uwarunkowanie jest prawie niezależne od sposobu wymuszania ciągłości rozwiązania między elementami. Prowadzi to do wniosku, że złe uwarunkowanie układów wydaje się być związane przede wszystkim z właściwościami płaskich fal.

Na koniec kilka uwag dotyczących optymalnej liczby funkcji bazowych i sposobu jej doboru. Niestety własności aproksymacyjne płaskich fal nie są w pełni zrozumiałe, stąd w pracy [37] liczba funkcji bazowych była dobierana w wyniku kontroli uwarunkowania bloków macierzy lokalnych. W pracy [29] otrzymano poprawę uwarunkowania układu przez dopuszczenie zmiennej liczby funkcji falowych dla różnych elementów. Wymiar bazy był określany dla każdego elementu za pomocą formuły *ad hoc* (bez dowodu na jej optymalność), która brała pod uwagę przeskalowaną liczbę falową dla każdego podobszaru.

Metoda najmniejszych kwadratów, LSM

Elementy skończone LSM typu Trefftza zostały wprowadzone w publikacji [25]. Podobne sformułowanie opublikowano niezależnie w pracy [26], dodatkowo wymuszając ciągłość pochodnej stycznej. Praca Monka i Wanga zawiera także teoretyczną analizę metody, jednak dotyczy ona tylko obszarów regularnych, natomiast w pracy Stojek wprowadzono również specjalne funkcje bazowe i sformułowanie dla obszarów z narożnikami. W obu pracach wartość parametru kary w funkcjonale najmniejszych kwadratów była testowana tylko numerycznie, stąd sposób jej automatycznego i równocześnie optymalnego doboru pozostaje nadal do określenia. Zapewne niejasności związane z wyborem współczynnika ważącego w jakimś stopniu ograniczyły zainteresowanie dalszym rozwojem metod najmniejszych kwadratów. W ostatniej dekadzie UWVF i DGM były bardziej popularne w środowisku naukowym, mimo że prowadzą do niehermitowskich macierzy układów liniowych.

Dopiero w pracy [21] opublikowano nowe wyniki dla podejścia LSM zbliżonego do metody zaprezentowanej w artykule [25]. Główne różnice w sformułowaniu polegają na wyborze innych funkcji bazowych w nieskończonym podobszarze (funkcje Hankela zastąpiono rozwiązaniami podstawowymi) i na samym ustawieniu procedur rozwiązania numerycznego (autorzy rozwiązują problem najmniejszych kwadratów zamiast wynikowego źle uwarunkowanego układu równań liniowych). Dodatkowo otrzymane stopnie zbieżności (z zastosowaniem specjalnych funkcji bazowych związanych z osobliwością w narożniku obszaru) są niezależne od liczby falowej. Niemniej autorzy stwierdzili, że minimalna liczba funkcji bazowych N niezbędnych do osiągnięcia zakresu zbieżności eksponencjalnej zależy liniowo od liczby falowej k. Pozostaje do wyjaśnienia, czy ta ostatnia zależność wpłynęła (i w jakim zakresie) na stopniowe pogarszanie się stopnia zbieżności LSM wraz ze zmniejszaniem się długości fali (przy tej samej liczbie funkcji bazowych w testach numerycznych) zaobserwowane w pracy [31].

Warto także odnotować stwierdzenie autorów pracy [21], że całkowity czas obliczeń w zaprezentowanym przez nich podejściu (MATLAB toolbox [38]) dla zakresu niskich i średnich częstotliwości, np. obiekt rozpraszający o wymiarze rzędu kilkudziesięciu długości fali z siatką MES o h rzędu kilkunastu λ, jest konkurencyjny z metodą elementów brzegowych, niezależnych od długości fali, sformułowaną w publikacji [39]. Warto tu przypomnieć, że elementy skończone w przeciwieństwie do brzegowych pozwalają na modelowanie skomplikowanych, niejednorodnych obszarów i można je w przypadku zagadnień sprzężonych stosunkowo łatwo zintegrować z innymi dyskretnymi modelami fizycznymi.

4. Podsumowanie

Standardowe metody obliczeniowe, zwłaszcza te oferowane przez tradycyjne programy komercyjne, często nie są zdolne do prawidłowego odtworzenia propagacji fal o wysokich częstotliwościach. Pomimo stosowania do dziesięciu elementów na długość krótkiej fali i związanych z tym zaporowych w praktyce inżynierskiej czasów obliczeń, nieświadomy użytkownik programu może otrzymać numeryczne artefakty zamiast prawidłowego obrazu propagacji już na odcinku rzędu kilkudziesięciokrotnej wielokrotności długości fali. Jest to związane z występowaniem numerycznej dyspersji i spowodowanych nią błędów typu *pollution*. Opracowanie elementów skończonych wolnych od numerycznej dyspersji to olbrzymie wyzwanie naukowe ostatnich lat i nadal, mimo znaczącego postępu, aktywne pole badań, zwłaszcza tych koncentrujących się na wykorzystaniu w algorytmach wiedzy o oscylacyjnym charakterze rozwiązania, eliminujących dyspersję numeryczną.

W artykule przedstawiono przegląd najnowszej literatury i metod opracowanych w ostatnich latach dotyczących zastosowania falowych funkcji kształtu. Przyjmując, że metody te pozwalają na wybór rozmiaru elementu niezwiązanego wprost z długością fali (znaczący zysk w całkowitym CPU), to i tak nadal należy brać pod uwagę problemy związane ze złym uwarunkowaniem globalnych macierzy układu, aż po ich osobliwość numeryczną (dla małych h i/lub wysokich p). Skutkuje to każdorazowo koniecznością świadomego doboru rodzaju i rozmiaru baz, a także wielkości elementów. W świetle obecnego stanu wiedzy i dotychczas opublikowanych wyników testów porównawczych nadal pozostaje otwarte pytanie, jak w optymalny sposób złagodzić problemy związane z uwarunkowaniem układów i stabilnością rozwiązań. Dyskusyjna pozostaje również kwestia, która metoda jest najkorzystniejsza z inżynierskiego punktu widzenia, ze względu na jej efektywność, w tym całkowity czas obliczeń. Artykuł [40] porównuje metody DEM, UWVF i PUM dla zakresu średnich częstotliwości i zagadnienia rozpraszania fal na cylindrze o średnicy równej 19 długościom fali akustycznej przy wymiarze charakterystycznym siatki elementów skończonych h rzędu dwóch długości fali λ. W przygotowaniu do druku jest również praca przeglądowa [41] na temat stabilności i dyskretyzacji problemów opisanych równaniem Helmholtza, dotycząca zarówno standardowych, jak i niestandardowych elementów skończonych.

Należy także odnotować najnowsze bezdyspersyjne sformułowanie wykorzystujące wielomianowe funkcje kształtu – nieciągłą optymalną metodę Petrova-Galerkina dla jednowymiarowego problemu [2] i jej uogólnienie na więcej wymiarów [42]. Samo podejście prowadzące, podobnie jak LSM, do macierzy hermitowskich różni się od metod opisywanych wcześniej głównie tym, że zamiast na doborze najkorzystniejszych z numerycznego punktu widzenia funkcji aproksymujących (*trial functions*) koncentruje się na doborze optymalnych funkcji testowych dla konkretnych (aczkolwiek dowolnych) *trial functions*.

W testach numerycznych przedstawionych w pracy [42], dla wielomianów niższego stopnia i czterech elementów na długość fali, otrzymano praktycznie pomijalne przesunięcie fazowe rozwiązania, jednak bez teoretycznego uzasadnienia tak dobrych wyników. Autorzy w komentarzach (zamieszczonych w obu pracach) dotyczących możliwości wyboru *trial functions* w metodzie DPG nie wykluczają zastosowania w przyszłości funkcji typu Trefftza.

Literatura

[1] Zienkiewicz O.C.: Achievements and some unsolved problems of the finite element method, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 47(1-3), 2000, pp. 9-28.

[2] Zitelli J., Muga I., Demkowicz L., Gopalakrishnan J., Pardo D., Calo V.M.: A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part IV: The optimal test norm and time-harmonic wave propagation in 1D, J. Comput. Physics, vol. 230(7), 2011, pp. 2406-2432.

[3] Thompson L.L., Pinsky P.M.: Acoustics, [in:] Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 2: Solids and Structures, E. Stein, R. de Borst and TJ.R. Hughes (eds.), John Wiley & Sons, 2004.

[4] Gumerov N.A., Duraiswami R.: Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions, Elsevier, Oxford, UK 2004.

[5] Chandler-Wilde S.N., Graham I.: Boundary integral methods in high frequency scattering, [in:] Highly Oscillatory Problems: Computation, Theory and Applications, B. Engquist, T. Fokas, E. Hairer and A. Iserles (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, UK 2009.

[6] Thompson L.L.: A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics, J. Acoust. Soc. Am., vol. 119(3), 2006, pp. 1315-1330.

[7] Ainsworth M.: Discrete dispersion relation for hp-version finite element approximation at high wave number, SIAM J. Numer. Anal., vol. 42(2), 2004, pp. 553-575.

[8] Harari I.: A survey of finite element methods for time-harmonic acoustics, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 195(13-16), 2006, pp. 1594-1607.

[9] Harari I.: Multiscale finite elements for acoustics: Continuous, discontinuous, and stabilized methods, Int. J. Multiscale Comp. Eng., vol. 6(6), 2008, pp. 511-531.

[10] Hughes T.J.R.: Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 127(1-4), 1995, pp. 387-401.

[11] Hughes T.J.R., Feijoo G.R., Mazzei L., Quincy J.B.: The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 166(1-2), 1998, pp. 3-24.

[12] Melenk J.M., Sauter S.: Wavenumber explicit convergence analysis for Galerkin discretizations of the Helmholtz equation, SIAM J. Numer. Anal., vol. 49(3), 2011, pp. 1210-1243.

[13] Babuška I., Ihlenburg F., Paik E.T., Sauter S.A.: A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 128(3), 1995, pp. 325-359.

[14] Strouboulis T., Babuška I., Hidajat R.: The generalized finite element method for Helmholtz equation: theory, computation, and open problems, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 195(37-40), 2006, pp. 4711-4731.

[15] Babuška I., Melenk J.M.: The partition of unity method, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 40(4), 1997, pp. 727-758.

[16] Farhat C., Harari I., Franca L.P.: The discontinuous enrichment method, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 190(48), 2001, pp. 6455-6479.

[17] Farhat C., Harari I., Hetmaniuk U.: The discontinuous enrichment method for multiscale analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 192(28-30), 2003, pp. 3195-3209.

[18] Farhat C., Harari I., Hetmaniuk U.: A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 192(11-12), 2003, pp. 1389--1419.

[19] Amara M., Djellouli R., Farhat C.: Convergence analysis of a discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems, SIAM J. Numer. Anal., vol. 47(2), 2009, pp. 1038-1066.

[20] Farhat C., Tezaur R., Weidemann-Goiran P.: Higher-order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 61(11), 2004, pp. 1938-1956.

[21] Barnett A.H., Betcke T.: An exponentially convergent nonpolynomial finite element method for time-harmonic scattering from polygons, SIAM J. Sci. Comput., vol. 32(3), 2010, pp. 1417-1441.

[22] Fries T.P., Belytschko T.: The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 84(3), 2010, pp. 253-304.

[23] Goldstein C.I.: The weak element method applied to Helmholtz type equations, Appl. Numer. Math., vol. 2(3-5), 1986, pp. 409-426.

[24] Cessenat O., Despres B.: Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem, SIAM J. Numer. Anal., vol. 35(1), 1998, pp. 255-299.

[25] Stojek M.: Least-squares Trefftz-type elements for the Helmholtz equation, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 41(5), 1998, pp. 831-849.

[26] Monk P., Wang D.Q.: A least-squares method for the Helmholtz equation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 175(1-2), 1999, pp. 121-136.

[27] Perrey-Debain E.: Plane wave decomposition in the unit disc: Convergence estimates and computational aspects, J. Comput. Appl. Math., vol. 193(1), 2006, pp. 140-156.

[28] Gamallo P., Astley R.J.: A comparison of two Trefftz-type methods: The ultraweak variational formulation and the least-squares method, for solving shortwave 2-D Helmholtz problems, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 71(4), 2007, pp. 406-432.

[29] Huttunen T., Gamallo P., Astley R.J.: Comparison of two wave element methods for the Helmholtz problem, Commun. Numer. Meth. Eng., vol. 25(1), 2009, pp. 35-52.

[30] Gabard G.: Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems, J. Comput. Physics, vol. 225(2), 2007, pp. 1961-1984.

[31] Gabard G., Gamallo P., Huttunen T.: A comparison of wave-based discontinuous Galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 85(3), 2011, pp. 380-402.

[32] Pluymers B., van Hal B., Vandepitte D., Desmet W.: Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics, Arch. Comput. Methods Eng., vol. 14(4), 2007, pp. 343--381.

[33] Herrera I.: Trefftz method: a general theory, Numer. Meth. Part. Diff. Eq., vol. 16(6), 2000, pp. 561-580.

[34] Strouboulis T., Babuška I., Hidajat R.: The generalized finite element method for Helmholtz equation. Part II: Effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 197(5), 2008, pp. 364-380.

[35] Gittelson C.J., Hiptmair R., Perugia I.: Plane wave discontinuous Galerkin methods: analysis of the h-version, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., vol. 43(2), 2009, pp. 297-331

[36] Hiptmair R., Moiola A., Perugia I.: Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p-version, SIAM J. Numer. Anal., vol. 49(1), 2011, pp. 264-284.

[37] Huttunen T., Kaipio J.P., Monk P.: An ultra-weak method for acoustic fluid-solid interaction, J. Comput. Appl. Math., vol. 213(1), 2008, pp. 166-185.

[38] mpspack. A MATLAB toolbox to solve Helmholtz PDE, wave scattering, and eigenvalue problems using particular solutions and integral equations, http://code.google.com/p/mpspack/.

[39] Chandler-Wilde S.N., Langdon S.: A Galerkin boundary element method for high frequency scattering by convex polygons, SIAM J. Numer. Anal., vol. 45(2), 2007, pp. 610-640.

[40] Wang D., Tezaur R., Toivanen J., Farhat C.: Overview of the discontinuous enrichment method, the ultra-weak variational formulation, and the partition of unity method for acoustic scattering in the medium frequency regime and performance comparisons, Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 89(4), 2012, pp. 403-417.

[41] Esterhazy S., Melenk J.M.: On stability of discretizations of the Helmholtz equation, [in:] Numerical Analysis of Multiscale Problems, I.G. Graham, T.Y. Hou, O. Lakkis and R. Scheichl (eds.), Springer LNCSE, vol. 83 (2012), pp. 285-324.

[42] Demkowicz L., Gopalakrishnan J., Muga I., Zitelli J.: Wavenumber explicit analysis of a DPG method for the multidimensional Helmholtz equation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 213-216, 2012, pp. 126-138.

APPLICATION OF WAVE-BASED SHAPE FUNCTIONS TO WAVE PROPAGATION PHENOMENA – REVIEW OF METHODS

A b s t r a c t

The efficient finite element discretization of the Helmholtz equation at high frequencies has been recognized as an outstanding challenge in numerical analysis of XXI century because of numerical dispersion, or what is often referred to in the literature as the pollution effect. A number of FEMs have been proposed to alleviate this effect, and improve on the unsatisfactory performance of the polynomial FEM. In this paper we shortly outline the recent advances in non-standard finite element formulations with wave based basis functions and provide a respective bibliography review.