

Danuta BRYJA¹
Ryszard HOŁUBOWSKI
Monika PODWÓRNA
Politechnika Wrocławska

MODELOWANIE BELKOWYCH MOSTÓW KOLEJOWYCH Z ZASTOSOWANIEM METODY GFEM. CZĘŚĆ II. TESTY NUMERYCZNE

Tematem pracy są testy numeryczne modelu obliczeniowego belkowych mostów kolejowych z podsypką w postaci ciągłego podłoża lepko-sprężystego. Model sformułowano w odrębnej pracy [1] metodą GFEM, z uwzględnieniem losowej zmienności parametrów podsypki. Zakres omawianych testów numerycznych ogranicza się do zagadnień deterministycznych i obejmuje: zagadnienie własne, drgania wymuszone przejazdem pociągu ze stałą prędkością oraz stowarzyszone z nimi rozwiązania quasi-statyczne. Przyjęto następujące cele badań: a) dobór funkcji kształtu, b) weryfikacja modelu mostu za pomocą komercyjnego programu SOFiSTiK, c) ustalenie dostatecznej gęstości podziału układu na elementy skończone. Testy wykazały poprawność sformułowania algorytmu i potwierdziły oczekiwaną bardzo dobrą efektywność jego działania. Algorytm umożliwia istotne zmniejszenie rozmiaru zadania, w porównaniu ze standardową metodą elementów skończonych.

1. Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej publikacji jest omówienie wyników testów numerycznych modelu obliczeniowego belkowych mostów kolejowych, który został sformułowany przez autorów w pracy [1], z zastosowaniem metody GFEM (*Galerkin Finite Element Method* [2]). Model opracowano na potrzeby przyszłych badań związanych z oceną wpływu losowej zmienności parametrów podsypki toru kolejowego na charakterystyki drgań mostów na liniach dużych prędkości pociągów. Do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych drgań mostu przewiduje się zastosowanie metody Monte Carlo. Podejście to wiąże się z koniecznością tworzenia wielu realizacji badanych procesów (przebiegów dynamicznych), co sprawia, że kluczowym zagadnieniem jest właściwy dobór dostatecznie efektywnej metody wyznaczania drgań i symulacji losowych parametrów układu. Zdaniem autorów model obliczeniowy zaproponowany przez

¹ danuta.bryja@pwr.wroc.pl

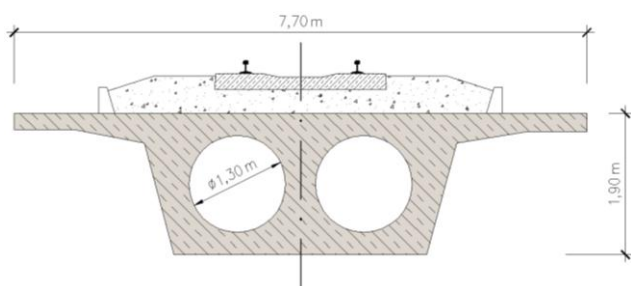
nich w pracy [1] może okazać się korzystniejszy w aspekcie rozważanego zagadnienia od modeli dotychczas stosowanych. Główna koncepcja modelu polega na idealizacji podsypki toru kolejowego za pomocą ciągłego nieinercyjnego podłoża liniowo lepko-sprężystego, z zachowaniem ogólnej idei podziału układu na elementy skończone. Rozważany układ jest złożony z dwóch zasadniczych podukładów: dźwigara mostowego i szyn toru kolejowego, które podzielono na trzy strefy – strefę centralną położoną na moście oraz dwie strefy dojazdowe. Przyjęcie ciągłego modelu warstwy podsypki tłuczniowej umożliwi w przyszłych badaniach deklarację losowych fluktuacji parametrów podsypki za pomocą ciągłych, stacjonarnych funkcji losowych, które mogą być stosunkowo łatwo symulowane numerycznie podczas wyznaczania drgań [1].

Zakres testów numerycznych omawianych w pracy ogranicza się do zagadnień deterministycznych i obejmuje: zagadnienie własne, drgania wymuszone przejazdem pociągu ze stałą prędkością oraz stowarzyszone z nimi rozwiązania quasi-statyczne. Przyjęto następujące cele badań:

- dobór funkcji kształtu elementu skończonego w metodzie GFEM,
- weryfikacja modelu mostu za pomocą komercyjnego programu komputerowego SOFiSTiK,
- ustalenie dostatecznej gęstości podziału układu na elementy skończone, z punktu widzenia dokładności przebiegów drgań wymuszonych przejazdem pociągu.

Założono, że parametry opisujące sztywność i tłumienie podsypki są wielkościami deterministycznymi i są stałe na całej długości toru kolejowego, łącznie ze strefami dojazdowymi. Pociąg jest modelowany zbiorem nieresorowanych mas skupionych lub sił skupionych.

Analizy numeryczne przeprowadzono dla wstępnie zaprojektowanego, swobodnie podpartego jednotorowego mostu kolejowego o rozpiętości $L_0 = 30$ m. Dźwigar mostu, pokazany w przekroju poprzecznym na rys. 1., zaprojektowano jako żelbetowy z betonu klasy C40/50. Sztywność giętna dźwigara wynosi $E_g I_g = 1,0703358 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^2$. Masę warstwy podsypki tłuczniowej o wysokości 50 cm oraz masę podkładów kolejowych wliczono do masy dźwigara, która wynosi łącznie $m_g = 3,3147 \cdot 10^4 \text{ kg/m}$. Przyjęto, że sztywność i parametr tłumienia podsypki mają następujące wartości: $k_w = 1,1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $c_w = 2,8667 \cdot 10^5 \text{ Ns/m}^2$ [3].



Rys. 1. Schematyczny przekrój poprzeczny mostu

W przykładzie zastosowano szyny typu UIC60. Sztywność belki modelującej szyny $E_r I_r = 1,22831 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$ obliczono, sumując momenty bezwładności obu szyn toru; masa jednostkowa belki złożonej z dwóch szyn wynosi $m_r = 1,21 \cdot 10^2 \text{ kg/m}$. Aby zminimalizować wpływ warunków brzegowych na końcach szyny na jej drgania w strefie mostu oraz uwzględnić efekt propagacji drgań szyny, wstępnie przyjęto (na podstawie pracy [4]), że długości stref dojazdowych toru wynoszą $L_1 = L_2 = 300 \text{ m}$. Następnie na podstawie analiz numerycznych stwierdzono, że zmniejszenie długości stref kolejno do 200 i 100 m nie powoduje różnic w wynikach obliczeń dynamicznych, co jest zgodne z wnioskiem autorów pracy [5], którzy uznali, że wystarczające jest stosowanie stref dojazdowych o długościach równych podwojonej rozpiętości mostu. Ostatecznie do obliczeń przyjęto $L_1 = 100 \text{ m}$ oraz $L_2 = 100 \text{ m}$.

W symulacjach przejazdu pociągu przez most wykorzystano japoński pociąg pasażerski typu Shinkansen. Jego maksymalna prędkość eksploatacyjna wynosi 270 km/h. Pociąg składa się z ośmiu dwudziestopięciometrowych powtarzalnych jednostek napędowych, z których każda zawiera dwa dwuosiowe wózki jezdne. Osiowy rozstaw wózków jezdnych wynosi 17,50 m, natomiast osiowy rozstaw zestawów kołowych – 2,50 m. Przy maksymalnym obciążeniu użytkowym łączna masa pojazdu przypadająca na j -ty zestaw kołowy ma wartość $M_j = 13\,875 \text{ kg}$. Skład pociągu jest wobec tego reprezentowany przez 32 masy skupione, a jego długość wynosi 200 m.

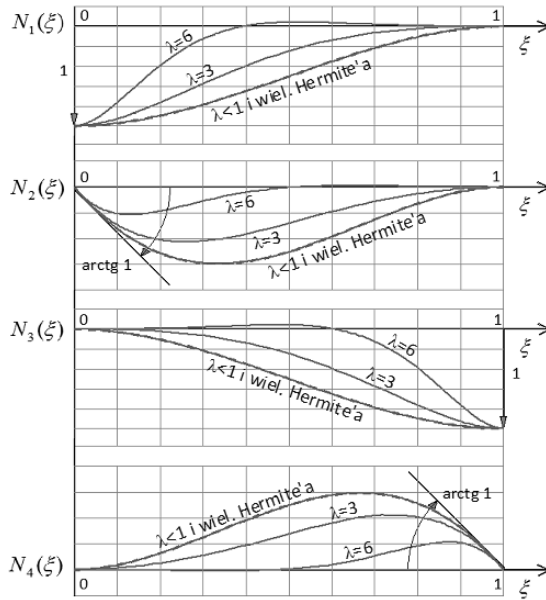
2. Dobór funkcji kształtu

W metodzie GFEM rolę funkcji wagowych pełnią globalne funkcje bazowe, które są złożone z funkcji lokalnych (funkcji kształtu), służących do aproksymacji przemieszczeń w obrębie elementu skończonego. Rozważono dwa typy funkcji kształtu: standardowe wielomiany Hermite’a i funkcje specjalne, wprowadzone przez autorów w pracy [1] na podstawie ścisłego rozwiązania jednorodnego równania różniczkowego opisującego statyczny problem zginania belki spoczywającej na podłożu sprężystym o stałej sztywności. Na rysunku 2. porównano wykresy tych funkcji, przy czym funkcje specjalne zależą od parametru $\lambda = (l/\sqrt{2})\sqrt[4]{k/EJ}$, gdzie EJ jest sztywnością belki, k – sztywnością podłoża, l – długością elementu.

Zgodnie z oczekiwaniami przy ustalonej długości elementu funkcje specjalne zbliżają się do funkcji Hermite’a, gdy maleje sztywność podłoża. Podobna sytuacja ma miejsce, gdy relacja k/EJ jest ustalona, a długość elementu maleje. Trudno jest zatem ocenić, jaki rzeczywisty wpływ na zbieżność rozwiązań ma gęstość podziału belki na elementy skończone. W związku z tym przeprowadzono następujący eksperyment numeryczny: porównano „ściśle” częstości własne belki swobodnie podpartej spoczywającej na podłożu Winklera wyrażone wzorem [6]:

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{EJ / ml^4} \cdot \sqrt{1 + \frac{kl^4}{n^4 \pi^4 EJ}}, \quad n = 1, 2 \dots$$

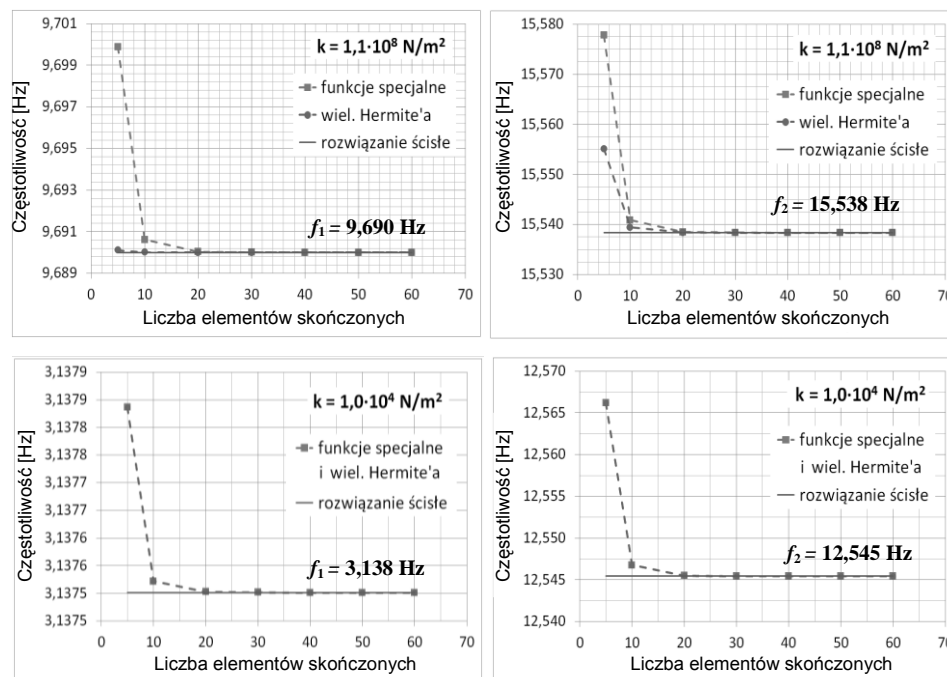
z częstościami własnymi modelu belki utworzonego metodą GFEM z zastosowaniem wielomianów Hermite'a i funkcji specjalnych.



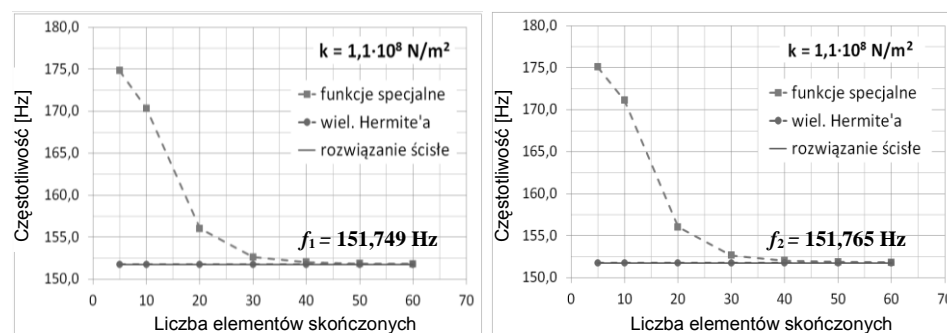
Rys. 2. Funkcje specjalne i funkcje Hermite'a

Przeanalizowano drgania własne dwóch belek o rozpiętości 30 m – belki I o parametrach dźwigara mostu kolejowego oraz belki II, która jest równoważna obu szynom toru. Przykładowe wyniki obliczeń pokazano na rys. 3. i 4., przy czym częstości własne wyrażono w hercach, co oznacza, że częstości kołowe ω_i zastąpiono częstotliwościami $f_i = \omega_i / 2\pi$. Częstości własne belki I wyznaczono, przyjmując dwie różne sztywności podłoża: $k = 1,1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ oraz $k = 1,1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. Pierwsza jest taka sama, jak sztywność podsypki w analizowanym przykładzie mostu kolejowego. Druga, hipotetyczna jest bardzo mała, wzięta pod uwagę m.in. dlatego, by pokazać, że częstości drgań własnych belki I przy bardzo małej sztywności podłoża są prawie takie same, jak częstości mostu kolejowego w początkowej strefie widma własnego.

Rozwiązania przedstawione na rys. 3. różnią się nieznacznie – różnice między nimi nie przekraczają 0,04 Hz, nawet przy najrzadszym podziale belki na 5 elementów skończonych. Funkcje Hermite'a zapewniają jednak lepszą zbieżność rozwiązań niż funkcje specjalne. Skuteczność funkcji specjalnych maleje wraz ze wzrostem sztywności podłoża, co jest dość zaskakujące i wyraźnie wi-



Rys. 3. Dwie pierwsze częstotliwości drgań własnych belki I (dźwigar) obliczone dla dwóch różnych parametrów sztywności podłoża



Rys. 4. Dwie pierwsze częstotliwości drgań własnych belki II (szyna)

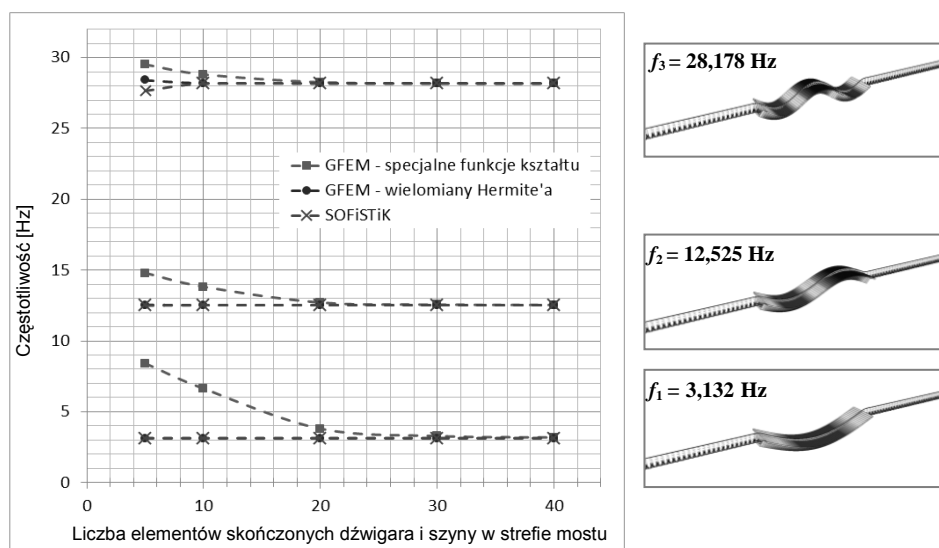
doczne na rys. 4., czyli w przypadku belki II, dla której relatywna sztywność podłoża k/EJ jest znacznie większa niż dla belki I. Im większy jest stosunek k/EJ , tym większa musi być liczba elementów skończonych, aby uzyskać dokładny wynik przy zastosowaniu funkcji specjalnych. Funkcje Hermite'a dają szybko zbieżne rozwiązania niezależnie od relacji k/EJ . Rozważane dwa warianty metody GFEM prowadzą do takich samych rozwiązań, niezależnie od długo-

ści elementu, gdy sztywność podłoża jest bardzo mała, czyli gdy funkcje specjalne stają się funkcjami Hermite'a (por. rys. 2.).

Z rozważań wynika wniosek, że zależność funkcji specjalnych od parametru λ , wiążącego długość elementu z względną sztywnością podłoża, pogarsza zbieżność rozwiązań. Do podobnych wniosków doszli autorzy pracy [7], porównując efektywność funkcji Hermite'a i funkcji specjalnych w zagadnieniu drgań podłużnych mostu kolejowego. Funkcje specjalne wyprowadzili na podstawie ścisłego rozwiązania jednorodnego równania statycznego, opisującego problem rozciągania pręta spoczywającego na stycznym podłożu sprężystym.

3. Weryfikacja modelu obliczeniowego

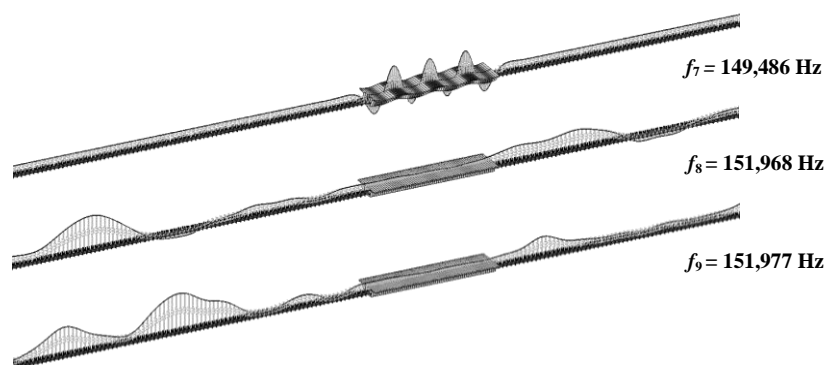
Na rysunku 5. przedstawiono pierwsze trzy częstotliwości drgań własnych rozważanego mostu kolejowego, obliczone przy różnych gęstościach podziału na elementy skończone, jednakowego dla dźwigara i szyn w obrębie mostu. Częstotliwości zostały wyznaczone na podstawie modelu obliczeniowego utworzonego metodą GFEM i porównane z częstotliwościami obliczonymi za pomocą programu komputerowego SOFiSTiK, w którym zbudowano ekwiwalentny model mostu, zastępując podsypkę zbiorem izolowanych więzi lepko-sprężystych, zlokalizowanych w węzłach podziału na elementy skończone.



Rys. 5. Pierwsze trzy częstotliwości i formy drgań własnych mostu

Częstotliwości początkowej strefy widma własnego mostu są bardzo zbliżone do częstotliwości własnych belki testowej I, spoczywającej na podłożu sprężystym o bardzo małej sztywności. Odpowiadają im formy własne, w któ-

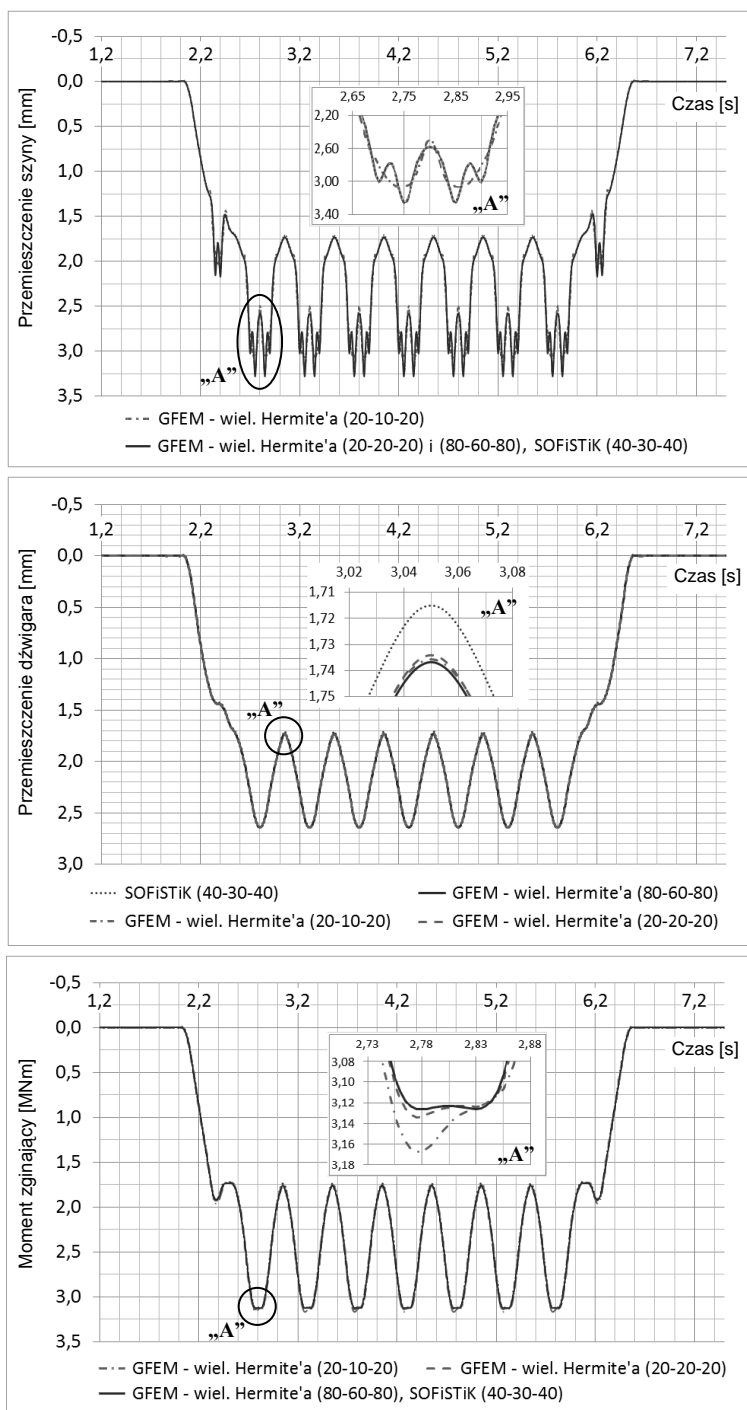
rych widoczny jest wyłącznie ruch dźwigara (rys. 5.). Stąd można wnioskować, że wpływ szyny opartej na podsypce na częstotliwości drgań dźwigara mostu jest znikomy. W dalszej strefie widma pojawiają się częstotliwości niewiele różniące się od częstotliwości własnych belki testowej II (rys. 4.). Odpowiadają im formy własne z dominacją ruchu szyn (rys. 6.). Pierwsza z tych częstotliwości (f_8) jest nieco niższa od częstotliwości podstawowej belki II, co jest zgodne z intuicją inżynierską – belka II jest oparta przez odkształcalne podłoże Winklera na sztywnej ostoji, natomiast dźwigar mostu stanowi dla szyny ostoję odkształcalną.



Rys. 6. Przykładowe formy własne drgań mostu z dominacją ruchu szyn

Przedstawione na rys. 5. wyniki obliczeń wskazują na bardzo dobrą skuteczność metody GFEM, jeśli funkcjami kształtu są wielomiany Hermite'a. Do wyznaczenia z techniczną dokładnością pierwszych trzech częstotliwości własnych wystarcza podział dźwigara na 5 elementów. Zastosowanie funkcji specjalnych powoduje istotne pogorszenie zbieżności w początkowej strefie widma własnego. Wyniki zbliżają się do dokładnych, gdy stosunek długości elementu do rozpiętości mostu nie przekracza jedności. Po osiągnięciu dostatecznej dokładności otrzymuje się w obu wariantach metody GFEM częstotliwości własne, zgodne z obliczonymi za pomocą programu SOFiSTiK, co jest potwierdzeniem poprawności opracowanego modelu obliczeniowego i prawidłowego działania autorskiego programu komputerowego.

O poprawności prezentowanego algorytmu świadczy także zgodność rozwiązań przedstawionych na rys. 7. Rysunek ilustruje przebiegi quasi-statyczne przemieszczeń dźwigara i szyny w środku rozpiętości mostu oraz momentu gnącego w środku rozpiętości dźwigara. Są to rozwiązania statyczne odpowiadające położeniom pociągu na torze w kolejnych chwilach obserwacji jego przejazdu. Czas jest tu jedynie parametrem, który w połączeniu z zadaną prędkością ruchu określa lokalizację sił skupionych, opisujących statyczne naciski na szynę zestawów kołowych pociągu. Do obliczeń przyjęto prędkość ruchu $v = 50$ m/s. W chwili początkowej czoło pociągu znajduje się na początku strefy dojazdowej.



Rys. 7. Rozwiązania quasi-statyczne w środku rozpiętości mostu

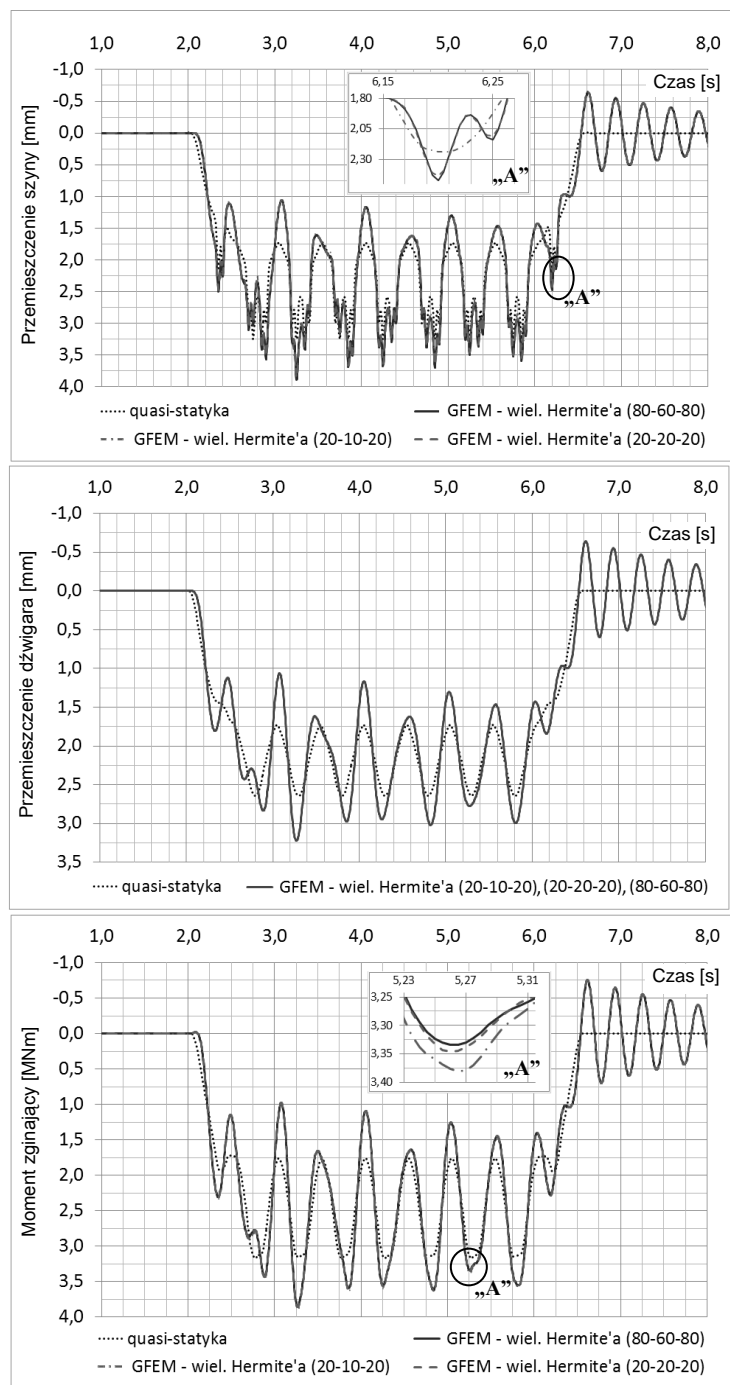
W legendzie rys. 7. zamieszczono oznaczenia typu (20-10-20), które określają gęstość podziału na elementy kolejnych podukładów: lewej strefy dojazdowej – dźwigara mostowego i szyn w obrębie mostu – prawej strefy dojazdowej. Przy podziale (20-20-20) w metodzie GFEM z funkcjami kształtu w postaci wielomianów Hermite’a i podziale (40-30-40) w programie SOFiSTiK otrzymuje się takie same wyniki, z dokładnością rzędu 1,5%. Oznacza to, że zaproponowany przez autorów model obliczeniowy jest poprawny, ponadto jest efektywniejszy od standardowego modelu FEM, umożliwia bowiem zastosowanie rzadszego podziału układu na elementy skończone – głównie szyn w strefach dojazdowych, ale także dźwigara, chociaż w mniejszym stopniu.

4. Gęstość podziału na elementy skończone w rozwiązaniach dynamicznych

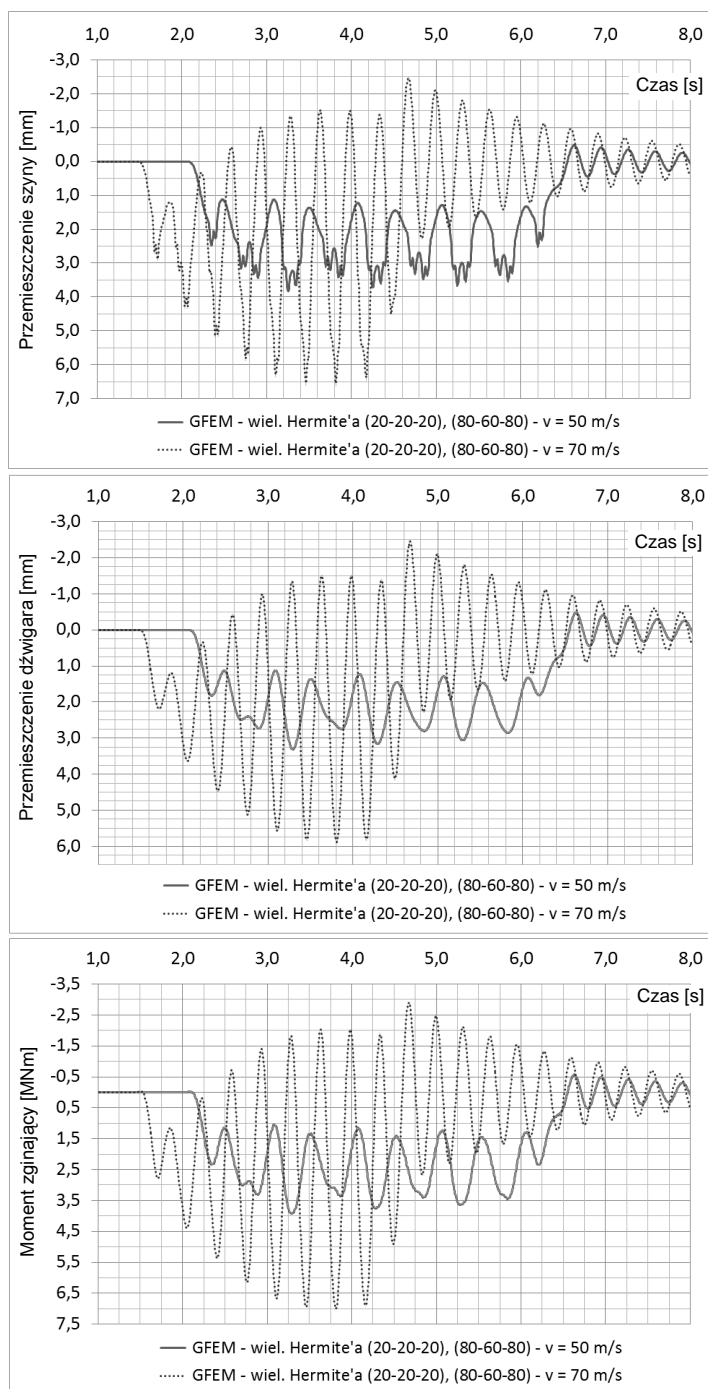
Problem doboru gęstości podziału układu na elementy skończone w rozwiązaniach dynamicznych rozważono tylko dla korzystniejszego wariantu metody GFEM, tzn. dla wariantu z funkcjami kształtu w postaci wielomianów Hermite’a. Obszernej analizie poddano najpierw drgania wymuszone układu, wyznaczone przy założeniu, że modelem pociągu jest zbiór sił skupionych poruszających się ze stałą prędkością $v = 50$ m/s. Wybrane wyniki obliczeń ilustruje rys. 8. W obliczeniach uwzględniono tłumienie materiałowe w szynach z czasem retardacji $\kappa_r = 2,1 \cdot 10^{-4}$ s oraz w przypadku dźwigara – tłumienie konstrukcyjne z parametrem wymiarowym $\mu_g = 0,984$ s⁻¹. Sposób opisu tłumienia w przyjętym modelu obliczeniowym podano w pracy [1]. Do całkowania numerycznego równań ruchu zastosowano bezwarunkowo stabilny wariant metody Newmarka z krokiem czasowym 0,001 s.

Na podstawie analizy zbieżności badanych rozwiązań wybrano dwie charakterystyczne gęstości podziału dźwigara i szyn w strefach dojazdowych: gęstość „dostateczną” z punktu widzenia dokładności rozwiązań (20-20-20) i zdecydowanie większą gęstość „porównawczą” (80-60-80). Następnie, biorąc pod uwagę tak wybrane dwie gęstości, wyznaczono przebiegi drgań mostu, uwzględniając pionowe siły inercji mas skupionych modelujących pociąg (rys. 9.). Rozpatrzono dwie prędkości ruchu pociągu: $v = 50$ m/s i $v = 70$ m/s. Z porównania uzyskanych rozwiązań wynikają następujące wnioski:

- podział stref dojazdowych na elementy skończone może być zdecydowanie rzadszy niż podział dźwigara, jeśli docelowym przedmiotem analizy są drgania mostu,
- gęstość podziału układu na elementy (20-20-20), przyjęta za „dostateczną” na podstawie analizy drgań wymuszonych ruchem sił skupionych, jest również wystarczająca z punktu widzenia dokładności rozwiązań w zakresie drgań wymuszonych ruchem mas skupionych,



Rys. 8. Rozwiązania dynamiczne w środku rozpiętości mostu (model pociągu: siły skupione)



Rys. 9. Rozwiązania dynamiczne w środku rozpiętości mostu (model pociągu: masy skupione)

- zwiększenie prędkości ruchu pociągu do 70 m/s powoduje pojawienie się drgań o znacznie większych amplitudach, a mimo to nie obserwuje się pogorszenia dokładności rozwiązań wyznaczonych przy gęstości podziału (20-20-20),
- gęstość „dostateczna” w aspekcie rozwiązań dynamicznych jest taka sama, jak gęstość podziału układu wyznaczona na podstawie rozwiązań quasi-statycznych (por. rys. 7.).

Analiza przedstawionych wyników badań prowadzi do istotnej konkluzji, według której do określenia właściwej gęstości podziału układu na elementy skończone wystarczy przeanalizować rozwiązania quasi-statyczne, których wyznaczenie nie wymaga dużych nakładów obliczeniowych, bo nie wiąże się z numerycznym całkowaniem równań.

5. Podsumowanie

W publikacji przedstawiono wyniki analiz numerycznych modelu obliczeniowego mostów kolejowych, sformułowanego w pracy [1] metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkinia. Model został opracowany przy założeniu, że podsyпка toru kolejowego jest ciągłym nieinercyjnym podłożem lepko-sprężystym. Testy numeryczne przeprowadzono dla przykładowego, wstępnie zaprojektowanego mostu żelbetowego, jednoprzęsłowego i jednotorowego o rozpiętości 30 m. Do aproksymacji stanu przemieszczenia elementu skończonego zastosowano alternatywnie funkcje Hermite’a i oryginalnie wyprowadzone funkcje specjalne, które w zamierzeniu autorów miały umożliwić zmniejszenie liczby elementów skończonych i w konsekwencji zmniejszyć rozmiar zadania. Testy numeryczne nie potwierdziły tych oczekiwań. Okazało się, że zdecydowanie lepszą zbieżnością charakteryzują się rozwiązania wyznaczone metodą GFEM z zastosowaniem funkcji Hermite’a.

Modelowanie mostu metodą GFEM z funkcjami kształtu w postaci wielomianów Hermite’a okazało się skuteczniejsze od modelowania za pomocą standardowej metody elementów skończonych, gdzie podłoże sprężyste jest opisane dyskretnie – za pomocą więzi sprężystych rozmieszczonych w węzłach podziału na elementy. Lepsza skuteczność modelowania wynika z możliwości podziału układu na mniejszą liczbę elementów skończonych. Stwierdzono, że badany most i strefy dojazdowe wystarczy podzielić łącznie na 80 elementów skończonych (w tym dźwigar na 20), żeby uzyskać wystarczającą dokładność rozwiązań statycznych i dynamicznych. Aby otrzymać te same wyniki za pomocą komercyjnego programu SOFiSTiK, trzeba było użyć łącznie 140 elementów. Uzyskana w ten sposób zgodność wyników w zakresie rozwiązania zagadnienia własnego i rozwiązań statycznych świadczy o poprawności modelu obliczeniowego, zaproponowanego przez autorów. Zaletą modelu jest istotne zmniejszenie wymaganej liczby elementów skończonych, w porównaniu z metodą FEM, które

prowadzi do znacznego skrócenia czasu obliczeń, potrzebnego do wyznaczenia przebiegów drgań.

Ze względu na bardzo dobrą efektywność opracowany algorytm modelowania mostów kolejowych i wyznaczania drgań umożliwi ograniczenie nakładów obliczeniowych w dalszych badaniach, związanych z wykonaniem wielu numerycznych symulacji koniecznych do przeprowadzenia analizy probabilistycznej z użyciem metody Monte Carlo.

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego nr N N506 0992 40 finansowanego w latach 2011-2013 przez Narodowe Centrum Nauki.

Literatura

- [1] Bryja D., Hołubowski R.: Modelowanie belkowych mostów kolejowych z zastosowaniem metody GFEM. Część I. Sformułowanie teoretyczne, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, nr 283, Budownictwo i Inżynieria Środowiska, z. 59, 2012, s. 5-19.
- [2] Chung T.J.: Computational fluid dynamics, Cambridge University Press, New York 2006.
- [3] Klasztorny M.: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybko-bieżnymi, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [4] Lu F., Lin J.H., Kennedy D., Williams F.W.: An algorithm to study non-stationary random vibrations of vehicle-bridge systems, Computers and Structures, no 87, 2009, s. 177-185.
- [5] Biondi B., Muscolino G., Sofi A.: A substructure approach for the dynamic analysis of train-track-bridge system, Computers and Structures, no 83, 2005, s. 2271-2281.
- [6] Langer J.: Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [7] Toth J., Ruge P.: Spectral assessment of mesh adaptations for the analysis of the dynamical longitudinal behavior of railway bridges, Archive of Applied Mechanics, no 71, 2001, s. 453-462.

MODELING OF RAILWAY BEAM BRIDGES BY USING GFEM METHOD. PART II. NUMERICAL TESTS

Summary

The paper presents numerical tests of the GFEM algorithm for modeling railway beam bridges where ballast is treated as a visco-elastic, non-inertial continuous medium. Main objectives of the numerical analysis were the following: 1) to choose appropriate finite element shape functions, 2) to verify the presented GFEM model by comparing to the FEM model constructed in SOFiSTiK software, 3) to determine the sufficient finite element segmentation with regard to accuracy of static and dynamic solutions corresponding to the passage of train. Natural frequencies of an exemplary bridge have been discussed as well as time histories of forced vibrations due to moving forces or moving masses which constitute the train model.

