ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ Nr 283
Budownictwo i Inżynieria Środowiska z. 59 (1/12/II) 2012

Joanna JANICKA[1]

ODPORNA NA BŁĘDY GRUBE TRANSFORMACJA HELMERTA ZE ZMODYFIKOWANĄ KOREKTĄ HAUSBRANDTA

Streszczenie

Transformacja współrzędnych oznacza przeliczenie współrzędnych z jednego układu do drugiego. Powszechnie stosowaną metodą estymacji parametrów transformacji jest metoda najmniejszych kwadratów. Metoda ta nie jest jednak odporna na błędy grube. Zatem estymowane parametry transformacji będą również obarczone tymi błędami Uodpornienie procesu transformacji współrzędnych na ewentualne błędy grube, można uzyskać przez zastosowanie odpornej M-estymacji. Poprze zastosowanie odpowiednich funkcji wagowych można zminimalizować wpływ obserwacji odstających na estymowane parametry przez nadanie im ekwiwalentnych wag.

Po wykonaniu transformacji współrzędnych należy także wykonać korektę post-transformacyjną Hausbrandta w celu pozostawienia niezmienionych wartości katalogowych punktów łącznych. Jeżeli współrzędne punktów łącznych są obarczone błędami grubymi, poprawki do tych współrzędnych również będą obarczone wpływem tych błędów. Zatem należy również zmodyfikować korektę post-transformacyjną Hausbrandta aby „uodpornić" ją na wpływ ewentualnych obserwacji odstających.

Słowa kluczowe: transformacja współrzędnych, odporna M-estymacja

1. Wprowadzenie

Na przestrzeni lat opracowano wiele różnych metod transformacji. Różnice pomiędzy nimi polegają na odmiennych formułach matematycznych ujmujących związki między rozpatrywanymi układami współrzędnych. Decydując o wyborze modelu transformacji, należy dokładnie zbadać posiadany materiał oraz zwrócić uwagę na kilka elementów, a mianowicie: ustalić elipsoidę, na której były obliczone współrzędne, rodzaj zastosowanego odwzorowania, wielkość obszaru, na którym znajdują się punkty będące przedmiotem transformacji, liczbę i rozmieszczenie punktów dostosowania. Bardzo ważnym elementem jest także dokładność współrzędnych punktów łącznych, ponieważ to w oparciu o nie wyznaczane są parametry transformacji.

W praktyce geodezyjnej zdarzają się sytuacje, gdy wyniki pomiaru są obarczone błędami o dużych wartościach. Błędy tego typu mogą mieć różną genezę, a nazywa się je błędami grubymi [1], [2]**.** Takimi błędami mogą być także obarczone współrzędne punktów łącznych. Jeżeli błędy popełniono podczas pierwotnych pomiarów, wówczas zaburzone są współrzędne punktów w układzie pierwotnym. W przypadku, gdy błędy grube mają związek np. ze wznowieniem punktu, wówczas obarczone tymi zaburzeniami będą współrzędne w układzie wtórnym. Jednakże bez względu na ich pochodzenie, punkty powinny być "zidentyfikowane" i usunięte z procesu wyznaczania parametrów transformacji. Można także ograniczyć ich wpływ na wyznaczane parametry przez zastosowanie odpowiednich metod obliczeniowych [3], [4], [5]**.**

Uodpornienie procesu transformacji współrzędnych na ewentualne błędy grube, można uzyskać przez zastosowanie odpornej M-estymacji podczas wyznaczania parametrów transformacji [3], [5].

Po transformacji współrzędnych, zgodnie z obowiązującymi przepisami i wytycznymi, należy wykonać korektę post-transformacyjną Hausbrandta w celu pozostawienia niezmienionych wartości katalogowych punktów łącznych. Poprawki Hausbrandta do współrzędnych punktów transformowanych są ogólnymi średnimi arytmetycznymi poprawek do współrzędnych punktów łącznych [3]. Jeżeli współrzędne punktów łącznych są obarczone błędami grubymi, poprawki do tych

[1]dr inż., Wydział Geodezji i Gospodarki Przestrzennej, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

współrzędnych również będą obarczone wpływem tych błędów. Oznacza to, że poprawki Hausbrandta do współrzędnych punktów transformowanych także zostaną obarczone błędami grubymi. Zatem korekta post-transformacyjna Hausbrandta może mieć negatywny wpływ na transformowane punkty znajdujące się w sąsiedztwie punktów łącznych obarczonych błędami grubymi [6].

2. Odporna M-estymacja

Istnieje wiele metod estymacji, wśród których wyróżnia się metody zaliczane do klasy M-estymacji. Ogólny problem optymalizacyjny w tej szerokiej klasie ma następującą, ogólną postać [7], [8], [9]

$$\min_{\mathrm{X}} = \left\{ \xi(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(v_i) \right\} = \xi(\hat{\mathrm{X}}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\hat{v}_i) \tag{1}$$

gdzie ρ *(v)* jest funkcją wypukłą, i często wymaga się, aby była co najmniej dwukrotnie różniczkowalna. Zatem M-estymacja polega na minimalizowaniu funkcji celu, która jest sumą składowych funkcji celu. Metody wyrównania należące do klasy M-estymacji można opisać funkcjami charakterystycznymi. Podstawą do zdefiniowania tych funkcji jest określenie zewnętrznej funkcji celu oraz jej składowych: funkcji wpływu, funkcji rygoru i funkcji wagowej [8]. Szczególną rolę w analizie własności metod należących do M-estymacji odgrywa funkcja wagowa. Funkcja ta określa w jaki sposób zmieniają się wagi i-tej obserwacji w zależności od uzyskiwanych w poszczególnych krokach iteracyjnych wartości estymatora $\bar{v}_i$.

Przedziałem dopuszczalnym $\Delta \bar{v}$ dla wyznaczanych poprawek określa się przedział, w którym losowe błędy mają wysokie, chociaż mniejsze od jedności prawdopodobieństwo wystąpienia. Granice przedziału dopuszczalnego określone są następująco:

$$\Delta \bar{v} = \langle -k, k \rangle \tag{2}$$

k – współczynnik określający granice przedziału dopuszczalnego [10]

Analiza, czy standaryzowany estymator danej poprawki mieści się w przedziale $\Delta \bar{v}$ ma związek z wagowaniem obserwacji „odstających”. Jeśli mieści się w przedziale, waga takiej obserwacji pozostaje niezmieniona. Jeżeli wartość $\bar{v} \notin \Delta \bar{v}$ wówczas wartości wag obserwacji zostaną zmniejszone z zastosowaniem funkcji tłumienia, która $t(v_i)$ jest funkcją nierosnącą, a w pewnych przedziałach malejącą o następujących własnościach:

$$\begin{gathered} t(\bar{v}) = 1 \quad dla \quad \bar{v} \in \Delta \bar{v} \\ t\left(\left| \bar{v}_j \right| \right) \langle\, t\left(\left| \bar{v}_i \right| \right) \quad dla\ takich\ \bar{v}_i, \bar{v}_j \in \Delta \bar{v}, że \left| v_j \right| \rangle \left| v_i \right| \end{gathered} \tag{3}$$

Funkcje wagową dla standaryzowanych poprawek można zapisać w postaci

$$w(\bar{v}) = t(\bar{v})\, p \tag{4}$$

$$p' = w(\bar{v}) = t(\bar{v})\, p \tag{5}$$

Nowe wagi *p’* stanowiące wartości funkcji wagowej nazywane są wagami ekwiwalentnymi. Stosując funkcję tłumienia, układ równań normalnych można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{TPV} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Wówczas rozwiązaniem równania jest następujący, odporny M-estymator:

$$\mathbf{X'} = -(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P'}\,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P'}\,\mathbf{V} \tag{7}$$

gdzie: $\mathbf{P'} = \mathbf{TP}$

3. Zastosowanie odpornej M-estymacji w procesie transformacji współrzędnych

Odporna M-estymacja znajduje zastosowanie podczas wykonywania transformacji współrzędnych**.** Włączenie jej do procesu wyznaczania parametrów transformacji ma na celu zmniejszenie wpływu błędów grubych, którymi mogą być obarczone współrzędne punktów łącznych, na estymowane parametry poprzez nadanie im ekwiwalentnych wag. Proces transformacji współrzędnych z zastosowaniem odpornej M-estymacji przebiega w następujący sposób:

- w pierwszym etapie wektor parametrów transformacji oraz wektor poprawek do współrzędnych punktów łącznych obliczane są klasycznie: metodą najmniejszych kwadratów tzn. z oryginalną macierzą wag.
- następnie obliczana jest macierz kowariancji wektora poprawek **V**:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}} = \mathrm{m}_0{}^2\left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right] \tag{8}$$

Diagonalne elementy macierzy $\mathbf{C}_{\mathrm{V}}$ są kwadratami błędów średnich estymatorów poprawek. Na ich podstawie oblicza się standaryzowane estymatory poprawek do współrzędnych punktów łącznych:

$$\bar{\hat{v}} = \frac{\hat{v}}{m_{\hat{v}}} \tag{9}$$

- na podstawie obliczonych standaryzowanych estymatorów poprawek do współrzędnych punktów łącznych w układzie wtórnym następuje sprawdzenie czy mieszczą się one w przedziale dopuszczalnym, w zależności od przyjętej wartości współczynnika *k*. Jeżeli standaryzowane estymatory poprawek mieszczą się w granicach dopuszczalnego przedziału wagi pozostają niezmienione. Jeśli jednak ich wartości nie mieszczą się w granicach przedziału wówczas zostają wyznaczone, z wykorzystaniem funkcji tłumienia, ekwiwalentne wagi. Ekwiwalentna macierz wag **P’** zależna jest od wartości standaryzowanych poprawek, zatem zadanie obliczenia wektora parametrów transformacji **X’** ma charakter iteracyjny. Proces iteracji kończy się w momencie, gdy wszystkie wartości standaryzowanych poprawek mieszczą się w przedziale dla nich dopuszczalnym. Ostateczna macierz wag jest macierzą ekwiwalentną, a uzyskany na jej podstawie ekwiwalentny wektor parametrów transformacji

$$\mathbf{X'} = -(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P'}\,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P'}\,\mathbf{V} \tag{10}$$

w dalszym etapie posłuży do wyznaczenia współrzędnych punktów transformowanych w układzie wtórnym.

4. Metody odpornej M-estymacji wykorzystane do wykonania obliczeń

W literaturze przedmiotu wyróżnia się wiele metod odpornej M-estymacji. Do wykonania obliczeń wybrano metody: Hampela [7], duńską [9], i zasadę wyboru alternatywy ZWA [8]. Wymienione metody różnią się postacią funkcji tłumienia, ale realizują ten sam cel, czyli zmniejszenie wag obserwacji obarczonych błędami grubymi.

Metoda Hampela [7] była jedną z pierwszych metod odpornego wyrównania niezależnych obserwacji. Wagi obserwacji odstających zmniejszane są w procesie iteracyjnym. W metodzie tej funkcja tłumienia przyjmuje postać:

$$w(v)=\begin{cases} 1 & |\bar{v}|\leq k \\ \operatorname{sgn}(\bar{v})\,k\dfrac{1}{\bar{v}} & k\langle\,|\bar{v}|\,\langle\,k_b \\ \dfrac{k}{k_c}-k_b\,(1-\operatorname{sgn}(\bar{v})\,k_c\,\dfrac{1}{\bar{v}}) & k_b\,\langle|\bar{v}|\langle\,k_c \\ 0 & |\bar{v}|\,\rangle\,k_c \end{cases} \tag{11}$$

gdzie:

k_b, k_c - wielkości ustalające granice dodatkowych przedziałów.

Inną metodą odpornego wyrównywania obserwacji geodezyjnych jest metoda duńska [9] charakteryzująca się tym, że poza przedziałem dopuszczalnym funkcja tłumienia maleje ekspotencjalnie. Funkcja tłumienia metody duńskiej ma postać:

$$w(v)=\begin{cases} 1 & \bar{v}\in\left\langle -k,k\right\rangle \\ \exp\left\{-d\,|\bar{v}|^{l}\right\} & |\bar{v}|\,\rangle\,k \end{cases} \tag{12}$$

gdzie : d i l są parametrami funkcji tłumienia.

Ważną rolę wśród metod odpornej M-estymacji odgrywa również metoda opracowana przez prof. Kadaja zwana – zasadą wyboru alternatywy ZWA [8]. W odróżnieniu od pozostałych metod, funkcja wagowa metody ZWA nie jest funkcją składaną. A zatem nie określa się dla niej przedziałów dopuszczalnych, czyli parametru k ustalanego a priori. Funkcja wagowa metody ZWA przyjmuje następującą postać:

$$w(v)=\frac{1}{2}p\exp\left(-p\frac{v^2}{2}\right) \tag{13}$$

5. Korekta post-transformacyjna Hausbrandta i zmodyfikowana korekta post-transformacyjna Hausbrandta

Współrzędne punktów łącznych w układzie wtórnym traktowane są jako stałe, nie podlegające zmianom w wyniku transformacji. W tym celu do współrzędnych tych punktów dodaje się wartości poprawek otrzymanych jako różnice współrzędnych katalogowych i współrzędnych po transformacji

$$v_{xk}=X_K{}^W-X_K{}^K \qquad v_{y_k}=Y_K{}^W-Y_K{}^K \tag{14}$$

$X_K{}^W, Y_K{}^W$ - współrzędne punktów łącznych w układzie wtórnym,

$X_K{}^K, Y_K{}^K$ - współrzędne katalogowe punktów łącznych.

Aby nie doprowadzić do zniekształcenia w ten sposób transformowanej sieci, pozostałe transformowane punkty otrzymują poprawki post-transformacyjne Hausbrandta obliczone za pomocą następujących wzorów:

$$v_{xi} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[v_{x\,k} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right) \right]}{\sum_{k=1}^{n} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right)} \qquad v_{yi} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[v_{y\,k} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right) \right]}{\sum_{k=1}^{n} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right)} \tag{15}$$

Poprawki te są ogólnymi średnimi arytmetycznymi z wagami odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratów odległości między współrzędnymi punktów dostosowania, a współrzędnymi punktów transformowanych

$$p_x = \frac{p}{d_{ik}^{\;2}} \quad p_y = \frac{p}{d_{ik}^{\;2}} \quad p = const \tag{16}$$

$$p_x = p_y = \frac{1}{d_{ik}^{\;2}} \tag{17}$$

gdzie:
v_{Xk}, v_{Yk} - poprawki do współrzędnych punktów łącznych,
v_{xi}, v_{yi} - poprawki Hausbrandta do współrzędnych punktów transformowanych,
i - numer punktu transformowanego,
k - numer punktu łącznego,
p_x, p_y - wagi do współrzędnych punktów łącznych,
d_{ik} - odległość punktu transformowanego od punktu łącznego obliczana na podstawie współrzędnych punktów w układzie pierwotnym.

W ten sposób następuje świadome deformowanie wyników transformacji Helmerta na rzecz pozostawienia nie zmienionych współrzędnych katalogowych punktów łącznych [11].

Zastosowanie, w procesie transformacji współrzędnych, odpornej M-estymacji pozwala wykryć punkty łączne o współrzędnych obarczonych błędami grubymi. Punkty takie można wyeliminować z procesu transformacji jeżeli dostępna liczba punktów łącznych pozwala na dalsze prowadzenie obliczeń. Jeżeli jednak transformowany układ charakteryzuje się minimalną liczbą punktów łącznych konieczne jest zachowanie i tych obarczonych błędem grubym. Wprowadzając odpowiednie wagi zmniejszony zostaje wpływ błędu grubego na poprawne wyznaczenie parametrów transformacji. Ponieważ poprawki do współrzędnych punktów łącznych obliczane są jako różnice współrzędnych katalogowych i współrzędnych po transformacji, są one również obarczone wpływem błędów grubych. Należy zatem zmodyfikować algorytm korekt post-transformacyjnych Hausbrandta. Modyfikacja polega na zminimalizowaniu wpływu wykrytych wcześniej błędów grubych na współrzędne przetransformowanych punktów na etapie obliczania korekt post-transformacyjnych. Przy wyznaczaniu parametrów transformacji zmodyfikowana zostanie macierz wag przez zastosowanie M-estymacji. Wówczas założenie, że $p = const$ nie jest słuszne, a wagi dla współrzędnych punktów łącznych przyjmą następujące postaci:

$$p_x = \frac{p'_{xk}}{d_{ik}^{\;2}} \quad p_y = \frac{p'_{yk}}{d_{ik}^{\;2}} \tag{18}$$

gdzie:
p'_{xk}, p'_{yk} - są ekwiwalentnymi wagami wyznaczonymi w procesie M-estymacji parametrów transformacji.

Wprowadzając ekwiwalentne wagi do korekty post-transformacyjnej Hausbrandta otrzymamy równania według, których należy obliczyć poprawki do współrzędnych punktów w układzie wtórnym.

$$v_{xi} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[V_{X\,k} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right) p'_{xk} \right]}{\sum_{k=1}^{n} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right) p'_{xk}} \qquad v_{yi} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left[V_{Y\,k} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right) p'_{yk} \right]}{\sum_{k=1}^{n} \left(1/d_{ik}^{\;2} \right) p'_{yk}} \tag{19}$$

Postać równania (19) nazywana jest dalej zmodyfikowaną korektą Hausbrandta. Dzięki tej korekcie minimalizuje się wpływ wartości poprawki do współrzędnej punktu łącznego obarczonego błędem grubym na obliczane poprawki post-transformacyjne Hausbrandta do punktów transformowanych.

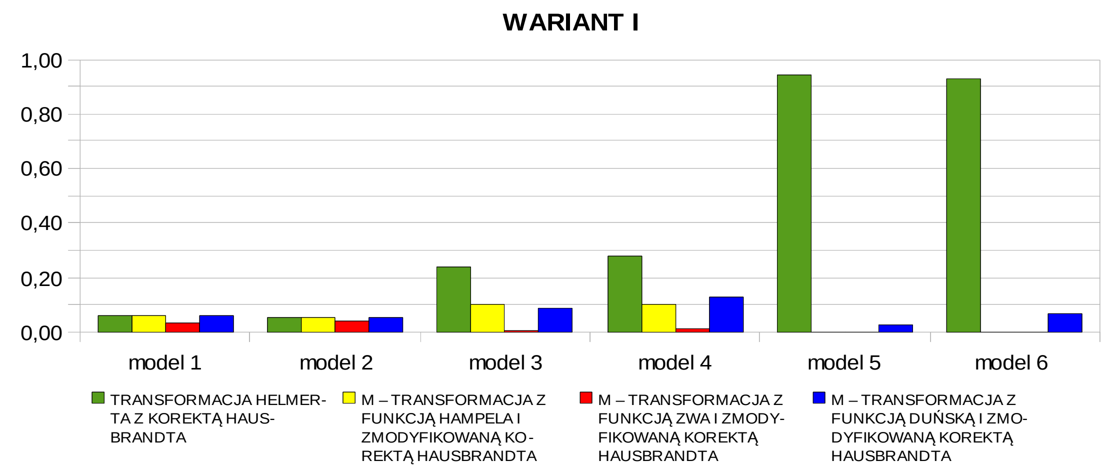
6. Obliczenia

Do wykonania obliczeń wykorzystano model testowy. Model ten jest zbiorem punktów fikcyjnej sieci geodezyjnej, obejmującej obszar 4 × 4 km. Punkty tej sieci posiadają współrzędne określone w układzie lokalnym (pierwotnym) oraz w układzie „1965” (wtórnym). Dobrano je tak, aby tworzyły równomierną siatkę, w której odległości między punktami wynoszą 1000m.

Wykorzystując model testowy wykonano szereg obliczeń zgodnie z zaproponowanym algorytmem, wprowadzając różną liczbę punktów łącznych i zmieniając wartość błędów grubych, którymi obarczano współrzędne punktów łącznych. Zaproponowano trzy warianty obliczeń [12], z których w artykule przedstawiono wyniki otrzymane w wariancie I. W wariancie tym obliczenia wykonane zostały dla czterech punktów łącznych o numerach 1, 5, 21, 25, a punkt nr 1 został zaburzony następującymi błędami:

- *model 1*: współrzędną *X* zaburzono błędem grubym o wartości 0.15 m,
- *model 2*: współrzędną *Y* zaburzono błędem grubym o wartości 0.15 m,
- *model 3*: współrzędną *X* zaburzono błędem grubym o wartości 0.30 m,
- *model 4*: współrzędną *Y* zaburzono błędem grubym o wartości 0.30 m,
- *model 5*: współrzędną *X* zaburzono błędem grubym o wartości 0.60 m,
- *model 6*: współrzędną *Y* zaburzono błędem grubym o wartości 0.60m.

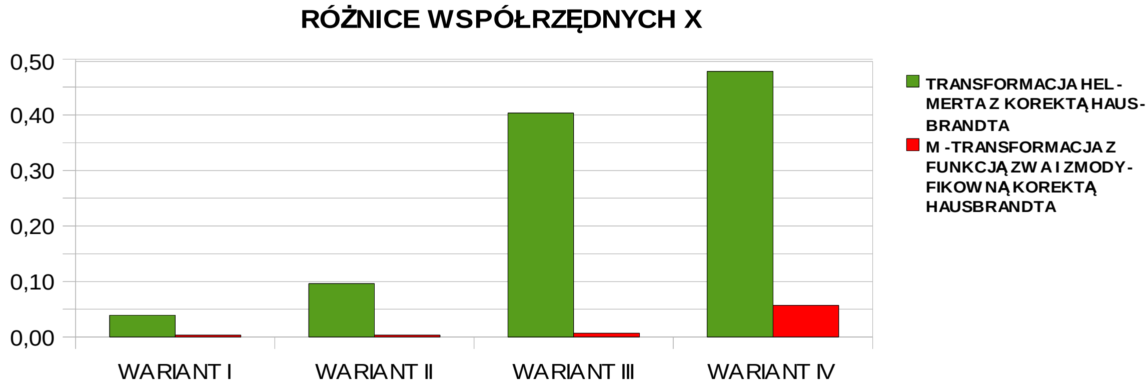
Współrzędne w układzie wtórnym przyjęto jako współrzędne katalogowe. Wyniki obliczeń przedstawiono na (rys.1) w postaci różnic otrzymanych pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po transformacji.



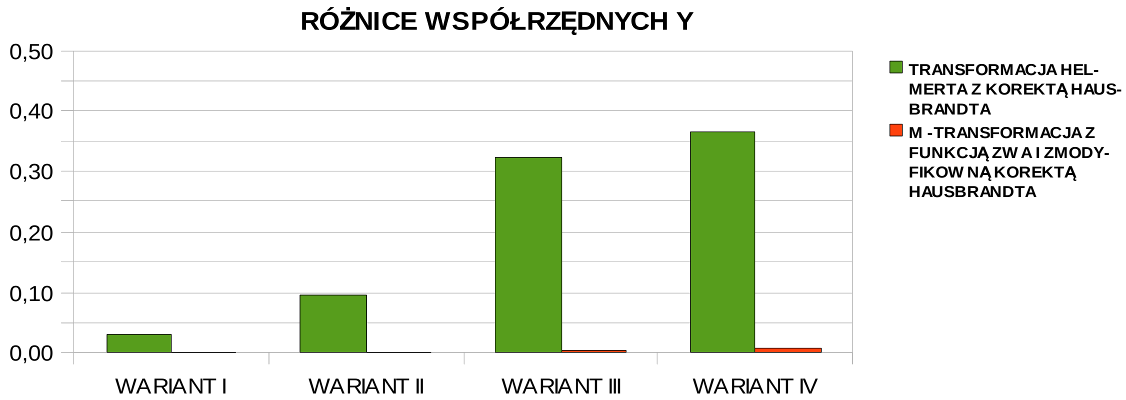
Rys. 1. Różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po transformacji

Badania przeprowadzone na sieci modelowej wykazały, że M-transformacja ze zmodyfikowaną korektą Hausbrandta pozwala uzyskać mniejsze różnice współrzędnych niż tradycyjna transformacja Helmerta z korektą Hausbrandta w sytuacji, gdy współrzędne punktów łącznych obarczone są błędem grubym. Spośród wybranych trzech metod odpornej M-estymacji we wszystkich wariantach obliczeń wykonanych na sieci modelowej najlepsze wyniki uzyskano dla funkcji ZWA (Zasady Wyboru Alternatywy). Zatem do dalszych obliczeń na obiektach rzeczywistych wykorzystano tylko tą funkcję.

Analizowana osnowa obejmuje 158 punktów posiadających współrzędne określone w układzie lokalnym (układ pierwotny) oraz w państwowym układzie współrzędnych „2000” (układ wtórny). W sieci JAROCIN wyodrębniono cztery warianty obliczeń. Różniły się one liczbą punktów łącznych, których współrzędne obarczano błędem grubym. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w poszczególnych wariantach porównano do współrzędnych katalogowych. Jako współrzędne katalogowe wykorzystano współrzędne punktów w układzie 2000 otrzymane z transformacji wykonanej przy 28 bezbłędnych punktach łącznych. Na (rys. 2) i (rys.3) przedstawiono otrzymane wyniki.



Rys. 2. Różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po transformacji.



Rys. 3. Różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po transformacji.

Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że M-transformacja ze zmodyfikowaną korektą post-transformacyjną Hausbrandta pozwoliła uzyskać lepsze wyniki niż standardowa transformacja także w przypadku sieci rzeczywistej. W każdym wariancie przeprowadzonych obliczeń uzyskano mniejsze różnice pomiędzy wartościami katalogowymi, a wartościami współrzędnych otrzymanymi z M-transformacji ze zmodyfikowaną korektą post-transformacyjną Hausbrantda. W każdym wariancie otrzymano zbliżone wartości poprawek do współrzędnych punktów łącznych obliczonych metodą najmniejszych kwadratów i z zastosowaniem funkcji ZWA. Jednak zmodyfikowana korekta Hausbrandta zminimalizowała wpływ błędów grubych na obliczane korekty post-transformacyjne do punktów transformowanych.

Dysponując odpowiednią liczbą punktów łącznych można wyeliminować ze zbioru punktów łącznych te, których współrzędne obarczone są błędami grubymi i ponownie wykonać transformację z układu pierwotnego do wtórnego. Problem pojawia się wówczas, gdy dysponuje się niewielką liczbą punktów łącznych, z których część obarczona jest błędem grubym. Na obiekcie JAROCIN przeprowadzono kolejne badanie, którego celem było potwierdzenie, że w takiej sytuacji lepszym rozwiązaniem jest pozostawienie tych punktów w zbiorze punktów łącznych, niż wyeliminowanie ich i ponowne wykonanie transformacji. Przyjęto, że 6 punktów stanowi zbiór punktów łącznych. Współrzędne trzech z nich obarczono błędami grubymi. Wartości błędów zawiera tabela nr.1

Tablica 1. Wartości błędów grubych, którymi obarczono współrzędne punktów łącznych.

nr punktu łącznego	**X [m]**	**Y [m]**
16	-	-
21	-	-
35	0.30	-
68	-	-
121	-	- 0.3
136	- 0.3	-

Tablica 2. Poprawki do współrzędnych punktów łącznych, po transformacji Helmerta

Transformacja Helmerta		
nr punktu łącznego	v_x [m]	v_y[m]
16	0.0723	0.0233
21	0.0382	0.0445
35	0.2684	0.0730
68	-0.0255	0.0369
121	-0.0552	-0.2358
136	-0.2983	0.0581

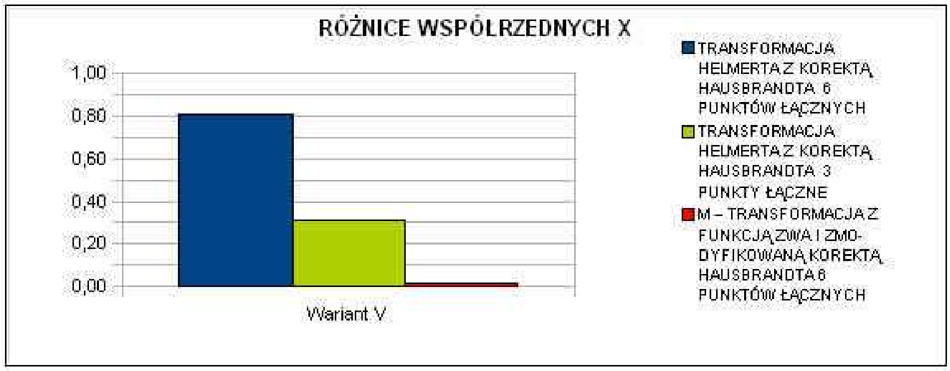
Tablica 3. Poprawki do współrzędnych punktów łącznych po M-transformacji z funkcją *ZWA*

M-transformacja z funkcją *ZWA*		
nr punktu łącznego	v_x [m]	v_y[m]
16	0.0564	-0.0111
21	0.0159	-0.0064
35	0.2833	-0.0154
68	-0.0159	0.0304
121	-0.0326	-0.3209
136	-0.2748	-0.0071

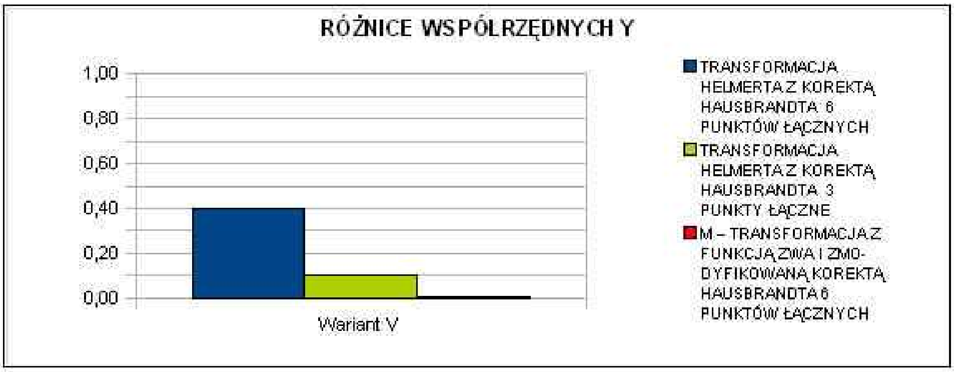
Tablica 4. Poprawki do współrzędnych punktów łącznych po transformacji Helmerta z odrzuceniem błędnych punktów łącznych.

Transformacja Helmerta		
nr punktu łącznego	v_x [m]	v_y[m]
16	0.0338	-0.0086
21	-0.0239	0.0032
68	-0.0099	0.0055

Porównując wartości poprawek do współrzędnych punktów łącznych z tabel o numerach 2, 3 i 4 można zauważyć, że po odrzuceniu punktów łącznych obarczonych błędami grubymi otrzymuje się mniejsze wartości poprawek do współrzędnych punktów łącznych nie obarczonych tymi błędami. Odrzucając trzy błędne punkty łączne zmienia się jednak ich liczba i rozmieszczenie. Układ punktów łącznych z jednej strony sieci będzie miał wpływ na wynik transformacji. Dlatego dzięki zastosowaniu M-transformacji ze zmodyfikowaną korektą Hausbrandta można pozostawić punkty łączne, których współrzędne są obarczone błędami grubymi. Nie ulegnie także zmianie rozmieszczenie punktów łącznych. Otrzymane różnice współrzędnych przedstawiono na (rys. 4) i (rys 5).



Rys. 4. Różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po transformacji.



Rys. 5. Różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po transformacji.

7. Wnioski

M-transformacja ze zmodyfikowaną korektą Hausbrandta pozwoliła uzyskać lepsze wyniki niż tradycyjna transformacja Helmerta z korektą Hausbrandta. Zastosowanie odpornej M-estymacji pozwala zidentyfikować punkty, których współrzędne obarczone są błędem grubym oraz zminimalizować ich wpływ na estymowane parametry transformacji. Zmodyfikowana korekta post-transformacyjna Hausbrandta minimalizuje wpływ błędów grubych na współrzędne punktów transformowanych na etapie wyznaczania poprawek Hausbrandta. współrzędne punktów łącznych.

Różnice pomiędzy współrzędnymi katalogowymi, a współrzędnymi po M-transformacji ze zmodyfikowaną korektą post-transformacyjną Hausbrandta są mniejsze w każdym wariancie wykonywanych obliczeń bez względu na :

- liczbę punktów łącznych,
- liczbę punktów łącznych obarczonych błędami grubymi,
- rozmieszczenie punktów łącznych,
- wartości błędów grubych, którymi zaburzano współrzędne punktów łącznych.

Zaproponowana metoda transformacji współrzędnych pozwoliła uzyskać lepsze wyniki niż tradycyjna transformacja Helmerta z korektą Hausbrandta. Jednakże należy pamiętać o tym, że nie jest to rozwiązanie uniwersalne. Oznacza to, że jeżeli błędne współrzędne punktu nie miały wpływu na tworzenie mapy lub wyznaczenie współrzędnych punktów osnowy niższego rzędu wówczas można zastosować M-transformację ze zmodyfikowaną korektą Hausbrandta.

W przypadku, gdy błędny punkt był podstawą pomiarów szczegółowych i tworzenia mapy należy szukać innego rozwiązania, w przeciwnym wypadku istniejące błędy i deformacje nie zostaną usunięte lecz wraz ze wszystkimi zniekształceniami przeniesione do układu wtórnego.

Literatura

[1] BARAN W. 1983, *Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.

[2] KAMELA CZ., LIPIŃSKI M. 1971 *Geodezja*. PPWK Warszawa

[3] KAMIŃSKI W. 1995. *Odporna na błędy grube transformacja Helmerta*. VIII Sesja Naukowo-Techniczna pt. Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych . Olsztyn-Mierki, pp. 63-68

[4] OSADA E., LISZCZUK W., SERGIEIEVA K., 2009. *Recepta na dane odstające.* Geodeta. Magazyn Geoinformacyjny nr 9 (172). Wrzesień 2009.

[5] YANG Y. 1999. *Robust estimation of geodetic datum transformation*. Journal of Geodesy 73 pp.268-274

[6] WYSOCKI P. 2007. *Wykorzystanie transformacji współrzędnych punktów w procesie odnowienia osnowy pomiarowej podczas modernizacji ewidencji*. Praca doktorska, UWM Olsztyn

[7] HAMPEL F. R. 1973. *Robust estimation: a condensed partial survey*. Z. Warsch. Geb. 27, pp. 87-104.

[8] KADAJ R. 1988. *Eine verrallgemeinerte Klasse von Schatzverfahren mit praktischen Anwendungen.* ZfV4

[9] KRARUP T. 1983. *The danish method, experience and philosophy*. DGK Heft 98.

[10] WIŚNIEWSKI Z. 2005. *Rachunek wyrównawczy w geodezji*. Wydawnictwo UWM Olsztyn.

[11] HAUSBRANDT S. 1959. *W jaki sposób można by stosować transformację Helmerta przy rachunkowym opracowaniu sieci triangulacyjnych nawiązanych do punktów stałych niepodlegających przesunięciu*. Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej im. J. Dąbrowskiego . Rok VIII, Nr XLVI, pp. 52-66.

[12] JANICKA J. 2010. *„Zastosowanie odpornej M-estymacji i zmodyfikowanej korekty post-transformacyjnej Hausbrandta w procesie transformacji współrzednych”* .Paca doktorska

TRANSFORMATION OF COORDINATES WITH ROBUST ESTIMATION AND MODIFIED HAUSBRANDT CORRECTION

Summary

Transformation of coordinates allows to convert coordinates from one geodetic system to another. Determination of transformation parameters is performed by the least-squares method. Unfortunately, the least squares method isn’t immune to outliers. It means that if from any reason one or more of the reference point’s coordinate is not correct the transformation parameters will be estimated with this errors. Therefore there is a necessity to develop a method that will be immune to outliers. In this paper robust estimation method for coordinate transformation is proposed to complete this task. To avoid influence of blunders in coordinates of reference points, three types of robust estimation were analyzed. But to assure that reference point’s coordinates will remain unchanged after transformation, one needs to apply the Hausbrandt correction. The Hausbrandt correction algorithm also isn’t immune to outliers. So it has to be modified to ensure it’s robustness to a blunders.

The results of coordinate transformation with robust estimation and modified Hausbrandt correction were compared with Helmert transformation with Hausbrandt correction.