

Dariusz GOŚCIEWSKI¹

ZASTOSOWANIE ALGORYTMÓW APROKSYMACJI WIELOMIANOWEJ DO WYZNACZENIA WYSOKOŚCI W WĘZŁACH BRZEGOWYCH STRUKTURY GRID

Streszczenie

Numeryczne modelowanie powierzchni w systemach informacji przestrzennej (SIP, GIS) wymaga zastosowania odpowiednich struktur danych (TIN, GRID). Wybór rodzaju struktury zależy od przyjętych założeń w systemie oraz często od rozmieszczenia i zagęszczenia punktów pomiarowych. Zastosowanie struktury GRID pozwala na ujednolicenie i uporządkowanie przechowywanej informacji, ograniczenie redundancji oraz ilości przechowywanych danych. Rozwiązanie to wymaga zastosowania algorytmów interpolacyjnych, których dokładność obliczeń w dużej mierze zależy od lokalizacji punktów pomiarowych wokół tworzonego węzła struktury GRID. Na krawędziach zewnętrznych interpolowanych obszarów występują węzły brzegowe, które nie zawsze posiadają dogodne rozmieszczenie punktów pomiarowych. W związku z tym prawidłowe wyznaczenie wartości w takich węzłach wymaga spełnienia szczególnych założeń. W artykule zaproponowano rozwiązanie tego problemu przez wykorzystanie algorytmów aproksymacji wielomianowej dwu i trójwymiarowej. W tym celu opracowane zostały autorskie aplikacje pozwalające na wyznaczanie węzłów brzegowych oraz przeprowadzona została analiza dokładności zaproponowanych rozwiązań.

Słowa kluczowe: numeryczny model powierzchni, wielomiany aproksymacyjne, algorytmy interpolacyjne, regularna siatka, GRID, węzły brzegowe

1. Wstęp

Systemy informacji przestrzennej wykorzystywane są obecnie do przechowywania, przetwarzania i analiz dużej ilości informacji pochodzących z różnych źródeł [2], [9], [10]. Podstawę organizacji przestrzennej w takich systemach stanowią z reguły dane pochodzące z numerycznego modelu terenu (DTM). Obecnie dane źródłowe tworzące DTM pozyskiwane są często z pomiarów bezpośrednich [1], [9]. Współczesne systemy pomiarowe takie jak laserowe stacje pomiarowe, laserowy skaning lotniczy czy echosondy wielowiązkowe pozwalają na pozyskiwanie dużej ilości informacji w stosunkowo krótkim czasie [1], [4], [8]. Bezpośrednie korzystanie z takich zbiorów jest jednak utrudnione ze względu na ich ilość i nieuporządkowany charakter zapisu informacji [3], [5], [7], [10]. W związku z tym dąży się do uporządkowania struktury przestrzennej i ograniczenia ilości punktów tworzących numeryczny model terenu, przy jednoczesnym zachowaniu wymaganej dokładności. Jednym ze sposobów uporządkowania informacji opisującej powierzchnię jest przedstawienie jej w postaci struktury regularnej siatki węzłów o znanych wysokościach (struktura typu GRID). Pozwala to na zredukowanie ilości danych, ograniczenie ich redundancji oraz znaczne przyspieszenie przetwarzania informacji. Dzięki wykorzystaniu tej struktury możliwe jest również prowadzenie analiz porównawczych na tych samych obiektach w różnych epokach pomiarowych [3], [5], [7].

¹ dr inż., Instytut Geodezji, Wydział Geodezji i Gospodarki Przestrzennej, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Utworzenie struktury GRID wymaga zastosowania algorytmów interpolacyjnych, przy pomocy których wyznaczone są wartości w punktach węzłowych w oparciu o pobliskie punkty pomiarowe [4], [6]. W procesie tworzenia siatki węzłów mogą brać udział różne algorytmy interpolacyjne, pozwalające na wygenerowanie modelu powierzchni z różną dokładnością [2], [4], [5], [10]. Dokładność ta zależy nie tylko od rodzaju użytego algorytmu i jego parametrów interpolacji ale również od lokalizacji punktów pomiarowych wokół tworzonego węzła. Większość algorytmów interpolacyjnych, do poprawnego wyznaczenia wartości, wymaga równomiernego rozmieszczenia punktów pomiarowych wokół węzła zlokalizowanych w wyznaczonych sektorach. Taka sytuacja ma miejsce najczęściej wewnątrz opracowywanych obszarów. Na granicach interpolowanych powierzchni występują jednak węzły brzegowe, które nie zawsze posiadają odpowiednio rozmieszczone punkty pomiarowe. Prawidłowe wyznaczenie wartości w takich węzłach wymaga spełnienia szczególnych założeń. Należy zatem przeanalizować możliwości dokładnego wyznaczenia wartości na węzłach brzegowych, ponieważ dzięki nim struktura GRID może pokrywać cały pomierzony teren i wykorzystywać wszystkie dostępne punkty pomiarowe. Kompletna struktura węzłów brzegowych przyczynia się z kolei do polepszenia jakości łączonych obszarów opracowań oraz do podniesienia dokładności modelowanej powierzchni.

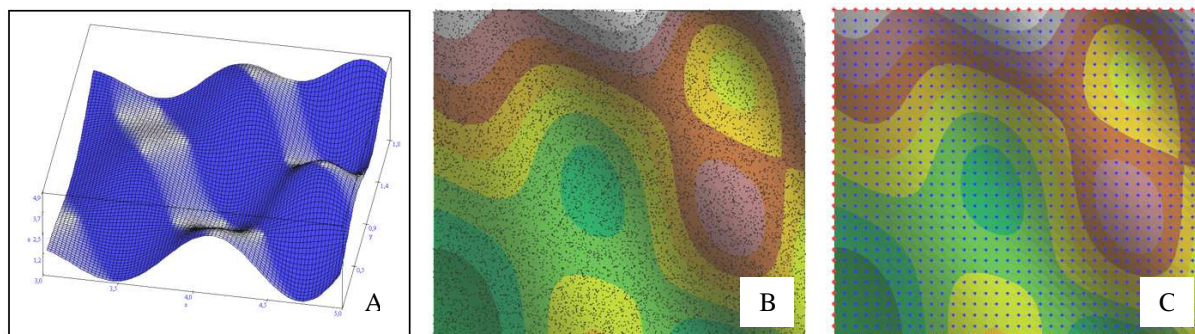
2. Tworzenie modelu testowego

Miarodajne porównanie dokładności wyznaczenia wartości w punktach pomiarowych różnymi metodami powinno zakładać wykorzystanie takiej samej bazy danych wyjściowych. W celu przeanalizowania dokładności wyznaczenia węzłów brzegowych w różny sposób wykorzystano specjalnie opracowany teoretyczny model testowy. Do stworzenia modelu wykorzystano funkcję dwu zmiennych (1) pozwalającą na utworzenie powierzchni matematycznej pokazanej na rysunku 1A. W oparciu o tę funkcję, w podanym przedziale współrzędnych x,y (1), wygenerowanych zostało 10200 punktów pseudopomiarowych (pp).

$$f(x, y) = x^2 \cos(xy) \sin(5x) + x^2 + 2y^3 \quad (1)$$

$$x \in < 3 ; 5 > , \quad y \in < 0 ; 2 >$$

Utworzyły one powierzchnię wzorcową, która następnie została przeskalowana i przesunięta w taki sposób, aby uzyskać model DTM o wymiarach 340 m na 300 m i obszarze 102000 m², zawierający wyłącznie punkty pomiarowe o dodatnich wartościach współrzędnych x,y,z (rys.1B).



Rys. 1. Konstrukcja modelu testowego

Tak utworzone punkty pomiarowe posłużyły do obliczenia wartości w punktach węzłowych wybranymi algorytmami interpolacyjnymi. Odległości pomiędzy węzłami siatki kwadratów ustalone zostały na 10 m, co pozwoliło na uzyskanie zagęszczenia ok. 10 pp na kwadrat bazowy. W rezultacie w granicach badanego obszaru otrzymano 1085 węzłów, w tym 128 węzłów brzegowych na których dokonano analizy dokładności (rys.1C). W tym celu w punktach wykorzystanych do analiz, w oparciu o tą samą funkcję (1), wygenerowane zostały teoretyczne punkty węzłowe, o takich samych parametrach lokalizacyjnych jak węzły interpolowane. Pozwoliło to na porównanie wielkości praktycznej, obliczonej przy pomocy interpolacji, z wartością teoretyczną, obliczoną przy pomocy

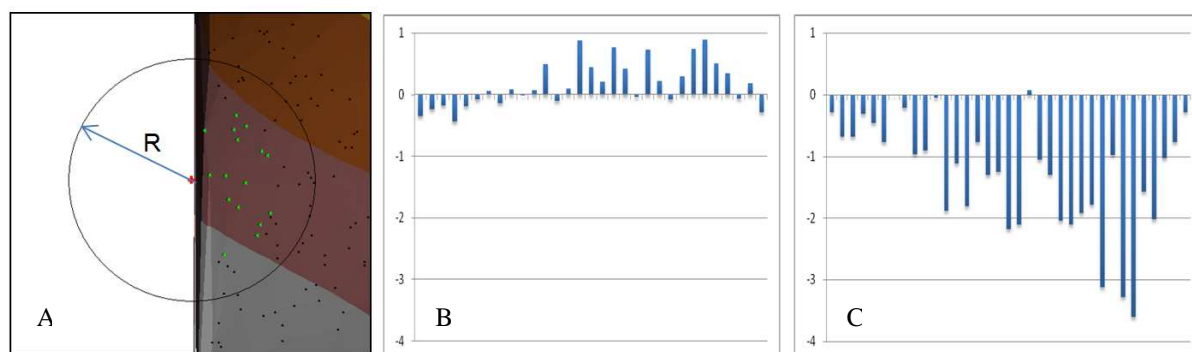
funkcji, na wszystkich badanych węzłach brzegowych struktury GRID i wyznaczenie różnic wysokości w postaci błędów prawdziwych.

3. Analiza dokładności algorytmów interpolacyjnych

W celu przeanalizowania możliwości i dokładności wyznaczania węzłów brzegowych różnymi metodami analizom poddanych zostało dziewięć algorytmów interpolacyjnych [6], [7], [10], [11]:

- (*ns*) – najbliższego sąsiada;
- (*na*) – naturalnego sąsiada;
- (*kr*) – kriging z semiwariogramem liniowym;
- (*pp*) – płaszczyzna aproksymacyjna i prosta;
- (*1r2-5*) i (*1r2-10*) – równoważenia $1/R^2$ (dla 5 i 10 pp);
- (*tr*) – triangulacji z interpolacją liniową;
- (*mk*) – minimalnej krzywizny;
- (*fr*) – multikwadratowych funkcji radialnych;
- (*sr*) – średniej ruchomej.

Każdy z algorytmów wykorzystywał do obliczeń tą samą bazę punktów pomiarowych wyszukiwanych w promieniu $R=10m$ od interpolowanego punktu węzłowego (rys.2A). Ponieważ punkty węzłowe były rozmieszczone na granicach badanego obszaru (węzły brzegowe) każdy z algorytmów miał do dyspozycji wyłącznie punkty pomiarowe położone po jednej stronie węzła (rys.2A). Taka lokalizacja punktów pomiarowych doprowadziła do sytuacji w której trzy z badanych algorytmów (*na*, *tr* i *sr*) nie mogły prawidłowo wyznaczyć wysokości w punkcie węzłowym. Ze względu na ekstrapolację wysokości w węzłach brzegowych wartości w ogóle nie zostały wyznaczone lub były wyznaczane z błędem przekraczającym 15m. Te algorytmy zostały wykluczone z dalszych badań. Przy pomocy pozostałych sześciu algorytmów wyznaczono wartości na wszystkich 128 węzłach brzegowych i przez porównanie z wartością teoretyczną (z funkcji(1)) w danym węźle, otrzymano różnice wysokości stanowiące błędy prawdziwe.



Rys. 2. Błędy interpolacji przy ograniczonym doborze punktów pomiarowych

Na rysunku 2 pokazane zostały przykładowe wartości błędów interpolacji (w m) dla węzłów brzegowych uzyskane algorytmem *1r2* dla 5 pp. Rysunek 2B pokazuje wartości błędów prawdziwych wzdłuż lewej pionowej krawędzi badanego obszaru (rys.1C), gdzie maksymalne wartości błędów dochodzą do 1 m. Rysunek 2C pokazuje analogiczną sytuację dla poziomej górnej krawędzi badanego obszaru, gdzie w skrajnych przypadkach wartości błędów przekraczają 3 m. Ograniczony dobór punktów pomiarowych do interpolacji (punkty pomiarowe leżą tylko po jednej stronie węzła brzegowego) powoduje powstanie stosunkowo dużych odchyłek wartości interpolowanej od wartości teoretycznej. Lokalizacja i wielkości tych błędów zależą od morfologii danej powierzchni. Lokalizację błędów uzyskanych algorytmem *1r2* dla 5 pp dla wszystkich węzłów brzegowych badanego obszaru pokazuje diagram różnicowy pokazany na rysunku 3A. Przedstawia on wartości bezwzględne błędów występujących na węzłach brzegowych i ich usytuowanie na badanym modelu powierzchni (wewnętrzny obszar wyłączony jest z analizy). Większe zniekształcenia powstają w miejscach

bardziej zróżnicowanych morfologicznie (rys.1C). Wynika to z większych różnic wysokości punktów pomiarowych zlokalizowanych na danym obszarze. Wykorzystanie punktów pomiarowych leżących na terenie bardziej zróżnicowanym morfologicznie (większy kąt nachylenia powierzchni) generuje podczas interpolacji większe błędy. Na powierzchniach bardziej płaskich błędy te są odpowiednio mniejsze. Sytuacja taka ma miejsce w przypadku wszystkich testowanych algorytmów interpolacyjnych.

Algorytmy interpolacyjne różnią się dokładnością między sobą. W celu liczbowego porównania dokładności interpolacji na węzłach brzegowych dokonanej przez różne algorytmy wykorzystano współczynnik *RMS* (2). Pozwala on stwierdzić w jaki sposób wartości interpolacyjne odbiegają od wartości teoretycznych. Im mniejsza jest wartość tego współczynnika tym dokładniej model interpolacyjny (praktyczny) pokrywa się z modelem teoretycznym.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - z_i)^2} \quad (2)$$

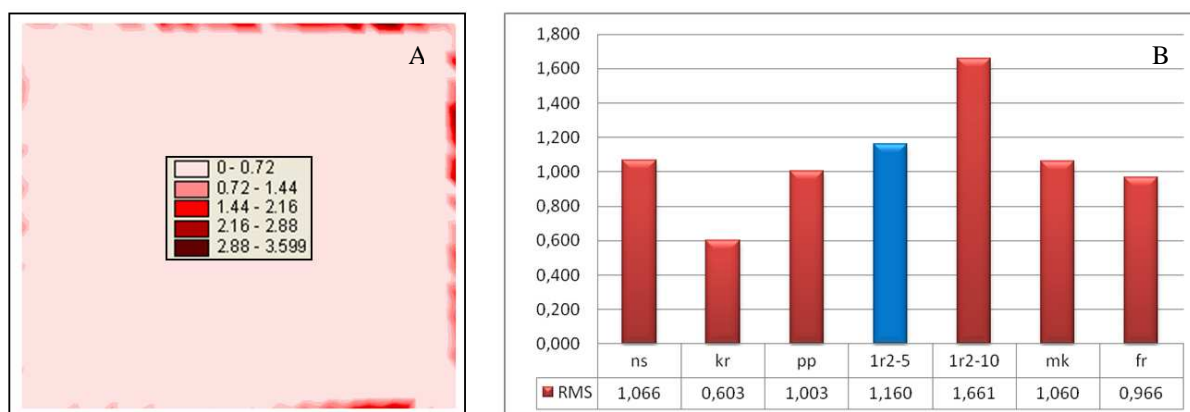
gdzie:

$f(x,y)$ - wartość funkcji (1) w teoretycznym punkcie węzłowym o współrzędnych x, y ,

z - wartość obliczona przez dany algorytm interpolacyjny na podstawie punktów

pomiarowych (pp) w punkcie węzłowym o współrzędnych x, y ,

n - ilość punktów węzłowych.



Rys. 3. Porównanie dokładności interpolacji węzłów brzegowych różnymi algorytmami

Na wykresach pokazanych na rysunku 3B pokazane zostały wartości współczynnika *RMS* (uzyskane wyłącznie na węzłach brzegowych) dla poszczególnych algorytmów interpolacyjnych. Najmniejsze błędy generowane są w przypadku algorytmu *kr*. Pozwala on najdokładniej wyznaczyć węzły brzegowe. Największe błędy generuje algorytm *1r2* dla 10 pp. Pozostałe algorytmy wykonują obliczenia na podobnym poziomie. W przypadku niektórych algorytmów wykorzystanie większej ilości punktów pomiarowych (większy promień *R*) prowadzi do pogorszenia dokładności obliczeń. Sytuacja taka pokazana została na przykładzie algorytmu *1r2* dla 5 i 10 wykorzystanych punktów pomiarowych (rys.3B). Wartość współczynnika *RMS* dla algorytmu *1r2* dla 5 pp została wyróżniona ponieważ odpowiada ona wartościom pokazanym na diagramie różnicowym (rys.3A). Podobne zależności zachodzą również w przypadku pozostałych algorytmów. Dokładność interpolacji zależy także od zagęszczenia punktów pomiarowych (ilość pp przypadająca na węzeł w danym promieniu). W przypadku większego zagęszczenia najbardziej poprawia się dokładność algorytmów *ns*, *pp* i *1r2*. Pozostałe algorytmy zachowują dokładności na podobnym poziomie.

Niezależnie od założonych parametrów interpolacji wszystkie przebadane algorytmy generują błędy na węzłach brzegowych. Spowodowane jest to niekorzystną lokalizacją punktów pomiarowych. W większości przypadków dochodzi do ekstrapolacji wartości w węzle, która prowadzi do

powstawania pokazanych błędów. W celu minimalizacji tych błędów należy przebadć metody pozwalające zminimalizować wpływ ekstrapolacji na wyznaczenie wartości w węźle.

4. Analiza wykorzystania algorytmów aproksymacji wielomianowej do wyznaczenia węzłów brzegowych

4.1. Wielomian 3D

Błędy spowodowane ekstrapolacją wartości można zniwelować stosując algorytmy aproksymacji wielomianowej. Pozwalają one na dokonanie ekstrapolacji wartości (obliczenie wysokości w węźle leżącym poza przestrzenią punktów pomiarowych) jednak nie generują dużych błędów. W celu przebadania możliwości takich algorytmów opracowane zostało autorskie oprogramowanie pozwalające na zastosowanie aproksymacji wielomianowej trójwymiarowej (3D) i dwuwymiarowej (2D) dowolnego stopnia.

W obliczeniach wartości w punkcie węzłowym przy pomocy wielomianu aproksymacyjnego bierze udział określona minimalna ilość (N) punktów pomiarowych (posiadających współrzędne x, y, h). Ilość ta wynika z ilości równań potrzebnych do rozwiązania układu równań dla danego stopnia wielomianu (n) i jest określona przez zależności (3).

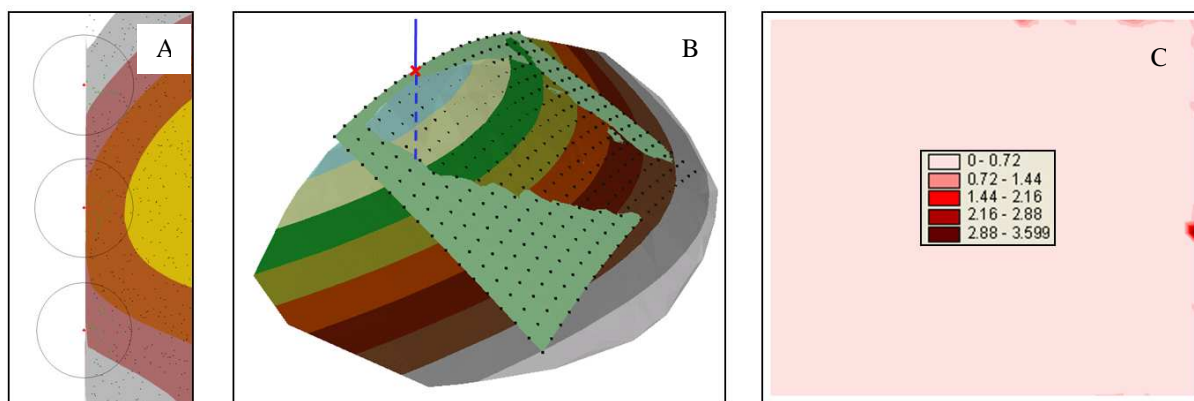
$$\begin{aligned} N &< (n+1)^2 - \text{brak rozwiązań} \\ N &= (n+1)^2 - \text{rozwiązanie ścisłe (interpolacja)} \\ N &> (n+1)^2 - \text{rozwiązanie przybliżone (aproksymacja)} \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

N - ilość punktów pomiarowych (ilość równań)

n - stopień wielomianu

Przy pomocy omawianej aplikacji, w zależności od zadeklarowanej ilości punktów pomiarowych i stopnia wielomianu, można dokonać rozwiązania ścisłego (interpolacji) lub przybliżonego (aproksymacji). W przypadku aproksymacji wyrównanie dokonywane jest metodą najmniejszych kwadratów. Punkty pomiarowe do aproksymacji odnajdywane są w założonym promieniu od punktu węzłowego (rys.4A). Możliwe jest również zadeklarowanie minimalnej ilości punktów pp biorących udział w obliczeniach. Na bazie N punktów pomiarowych (zlokalizowanych w przestrzeni trójwymiarowej) układanych jest N równań wielomianu 3D określonego stopnia zgodnie ze wzorem (4).



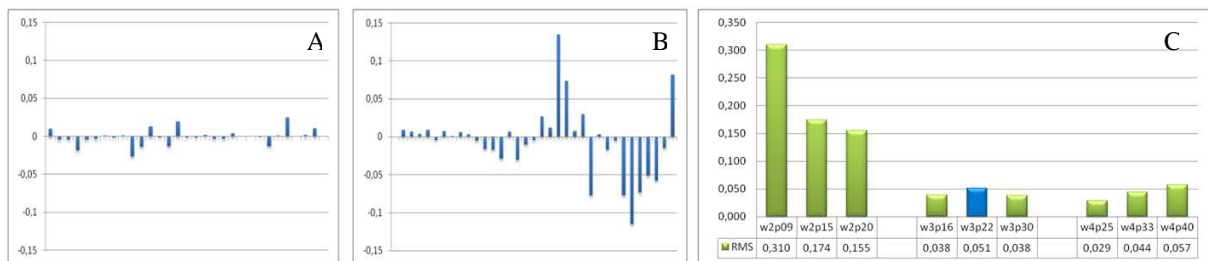
Rys. 4. Aproksymacja wielomianem 3D

Przez rozwiązanie układu równań (w przypadku równań nadliczbowych wyrównanie dokonywane jest metodą najmniejszych kwadratów) wyznaczane są współczynniki wielomianu aproksymacyjnego. Pozwala to na utworzenie powierzchni aproksymacyjnej w oparciu o którą wyznaczany jest punkt węzłowy jako rozwiązanie układu równań danej powierzchni i prostej ($x=\text{const}$; $y=\text{const}$) przechodzącej przez ten punkt (rys.4B).

$$W(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j \quad (4)$$

W rezultacie działania programu otrzymywane są wartości we wszystkich zadeklarowanych węzłach brzegowych. Na rysunku 4C pokazany został diagram różnicowy rozmieszczenia błędów na węzłach brzegowych po aproksymacji dokonanej w oparciu o 22 punkty pomiarowe wielomianem 3 stopnia (zapis *w3p22* oznacza 3 stopień wielomianu i 22 punkty pomiarowe). Lokalne zniekształcenia widoczne na diagramie (rys.4C) spowodowane są niekorzystnym rozmieszczeniem punktów pomiarowych i można je zminimalizować stosując inny stopień wielomianu aproksymującego na danym obszarze.

Na rysunku 5A pokazane zostały wartości błędów prawdziwych dla tej samej aproksymacji (*w3p22*) wzdłuż lewej pionowej krawędzi badanego obszaru (rys.1C), a na rysunku 5B wzdłuż poziomej górnej krawędzi. Również w tym przypadku wartości błędów zależą od ukształtowania morfologicznego badanej powierzchni w pobliżu węzłów brzegowych jednak ich wielkości są 10 krotnie mniejsze od wartości uzyskanych przez badane algorytmy interpolacyjne (rys.2 , rys.3). Rysunek 5C pokazuje zestawienie współczynnika *RMS* dla różnych stopni wielomianu i różnej ilości pp. Wykresy przedstawione na rysunku 5C opisane *w2p09*, *w3p16* i *w4p25* dotyczą obliczenia wartości w węzłach w sposób ścisły (interpolacja).



Rys. 5. Dokładność wyznaczenia węzłów brzegowych dla różnych stopni wielomianów aproksymacyjnych 3D

Pozostałe wykresy dotyczą obliczeń przybliżonych (aproksymacja). We wszystkich przypadkach wartości *RMS* są znacznie mniejsze od wartości wyliczonych dla poprzednio prezentowanych przykładowych algorytmów interpolacji (rys.3B), co świadczy o znacznie lepszym dopasowaniu do modelu teoretycznego. Najgorsze wyniki uzyskano wykorzystując 2 stopień wielomianu (przy czym interpolacja jest tu gorsza od aproksymacji). Najlepsze dopasowanie do wartości teoretycznej (najmniejsze współczynniki *RMS*) wykazują węzły obliczone wielomianem 3 i 4 stopnia (w tych przypadkach interpolacja jest lepsza od aproksymacji). Prawidłowy dobór stopnia wielomianu i ilości punktów pomiarowych umożliwia zminimalizowanie błędów na węzłach brzegowych. W zależności od morfologii terenu można dostosować te parametry dla poszczególnych grup węzłów brzegowych w taki sposób aby zniekształcenia były jak najmniejsze.

4.2. Wielomian 2D

W przypadku wykorzystania wielomianów aproksymujących 3D do dokonania niezbędnych obliczeń wymagana jest odpowiednia ilość punktów pomiarowych w zależności od stopnia wielomianu. Zgodnie ze wzorem (3) dla 3 stopnia wielomianu minimalna ilość punktów potrzebnych do dokonania obliczeń interpolacyjnych wynosi 16, a dla 4 stopnia odpowiednio 25. W przypadku aproksymacji ilości te są jeszcze większe. Dane pomiarowe nie zawsze zapewniają odpowiednią ilość punktów dostępnych w pobliżu węzła. W przypadku braku dostatecznej ilości punktów pomiarowych wokół węzła (co w przypadku węzłów brzegowych występuje szczególnie często) można posłużyć się wielomianem aproksymacyjnym 2D. Wielomian ten do obliczeń wykorzystuje punkty leżące w

przestrzeni dwuwymiarowej (na płaszczyźnie). W tym przypadku minimalna ilość (N) punktów pomiarowych (posiadających współrzędne x, y) powinna spełniać warunki określone wzorem (5).

$$\begin{aligned} N < n+1 & - \text{brak rozwiązań} \\ N = n+1 & - \text{rozwiązanie ścisłe (interpolacja)} \\ N > n+1 & - \text{rozwiązanie przybliżone (aproksymacja)} \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

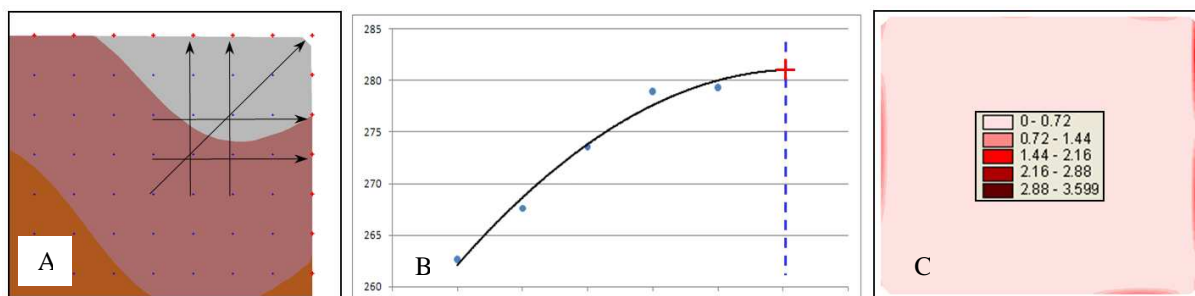
N - ilość punktów pomiarowych (ilość równań)

n - stopień wielomianu

Na bazie N punktów pomiarowych (zlokalizowanych w przestrzeni 2D) układanych jest N równań wielomianu 2D określonego stopnia (6).

$$W(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (6)$$

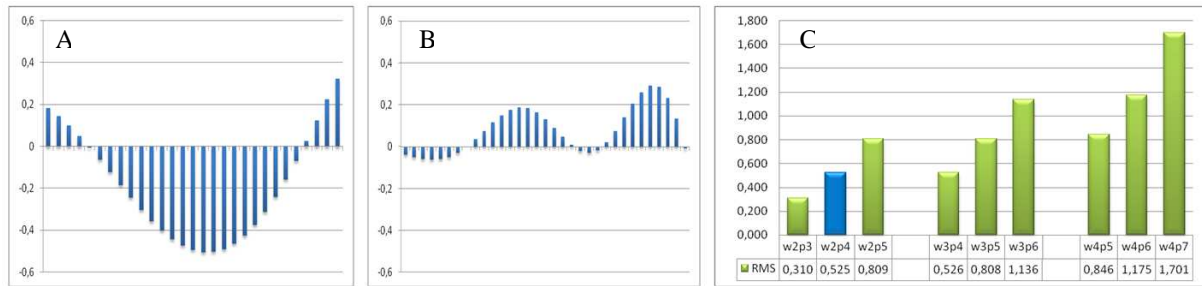
W przypadku zastosowania tego wielomianu jako dane do obliczeń można wykorzystać wartości wyznaczone uprzednio na węzłach GRID wewnątrz opracowywanego obszaru. W zależności od potrzeb wykorzystywane są węzły usytuowane w szeregach poziomych, pionowych lub skośnych (rys.6A). Po zamianie współrzędnej wysokości h węzłów na współrzędną y można dany przekrój przenieść na płaszczyznę do klasycznego układu współrzędnych x, y i dokonać stosownych obliczeń. Odległości x pozostają równe odległościom pomiędzy węzłami siatki kwadratów. W tym przypadku również, w zależności od zadeklarowanej w programie ilości pp i stopnia wielomianu, można dokonać rozwiązania ścisłego (interpolacji) lub przybliżonego (aproksymacji). Dla aproksymacji wyrównanie dokonywane jest metodą najmniejszych kwadratów, a zasada obliczeń jest taka sama jak w przypadku wielomianu 3D. Wartości wysokości punktów biorących udział w obliczeniach odczytywane są z odpowiednio posortowanych węzłów ułożonych w wiersze lub kolumny. Następnie na ich podstawie tworzona jest krzywa aproksymacyjna. W celu podwyższenia dokładności obliczeń autorska aplikacja umożliwia zadeklarowanie dopuszczalnej ilości węzłów (w pobliżu węzła brzegowego) wykorzystanych do obliczeń oraz dopuszczalnej ilości brakujących węzłów w rzędzie lub w kolumnie.



Rys. 6. Aproksymacja wielomianem 2D

Punkt węzłowy jest wyznaczany jako rozwiązanie układu równań danej krzywej i prostej ($x=\text{const}$) przechodzącej przez ten punkt (rys.6B). W ten sposób w programie wyznaczone są wartości we wszystkich węzłach brzegowych wokół analizowanego obszaru. Ponieważ metoda wykorzystuje wyłącznie punkty węzłowe w rzędach i w kolumnach można ją stosować również w przypadku braku lub niedostatecznej ilości punktów pomiarowych wokół węzłów brzegowych.

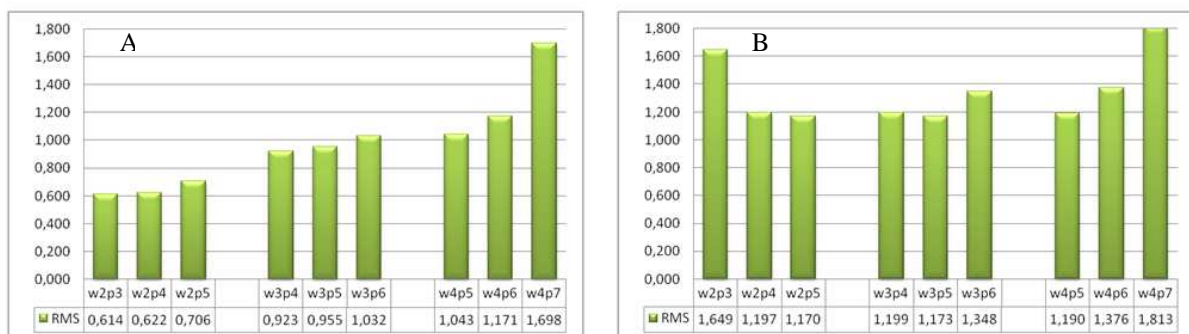
Na rysunku 6C pokazany został diagram różnicowy rozmieszczenia błędów na węzłach brzegowych po aproksymacji dokonanej w oparciu o 4 punkty pomiarowe wielomianem 2 stopnia ($w2p4$). Węzły liczono w oparciu o teoretyczny GRID zlokalizowany wewnątrz badanego obszaru. Rysunek 7A prezentuje wartości błędów prawdziwych dla tej aproksymacji wzdłuż lewej pionowej krawędzi badanego obszaru (rys.1C), a rysunek 7B wzdłuż poziomej górnej krawędzi.



Rys. 7. Dokładność wyznaczenia węzłów brzegowych dla różnych stopni wielomianów aproksymacyjnych 2D

Również w tym przypadku wielkości błędów prawdziwych na poszczególnych punktach węzłowych są wyraźnie mniejsze niż w przypadku analizowanych uprzednio algorytmów (rys.2 , rys.3) i nie przekraczają 0.5 m. Obliczenia dokonywane metodą aproksymacji wielomianem 2D (podobnie jak wielomianem 3D) pozwalają na dokładniejsze wyznaczenie wysokości w węzłach brzegowych niż w przypadku większości analizowanych algorytmów interpolacyjnych. Metoda ta generuje błędy rozłożone systematycznie, co podyktowane jest ukształtowaniem morfologicznym terenu (rys.1C). Ponieważ wartości błędów uzyskiwane tą metodą są systematycznie zawyżane wraz ze zróżnicowaniem morfologicznym istnieje możliwość wprowadzenia odpowiednich poprawek i uzyskania jeszcze lepszego dopasowania. Rysunek 7C pokazuje zestawienie współczynnika *RMS* dla różnych stopni wielomianu i różnej ilości pp. Wykresy przedstawione na rysunku 7C opisane w2p3, w3p4 i w4p5 dotyczą obliczenia wartości w węzłach w sposób ścisły (interpolacja). Pozostałe wykresy dotyczą obliczeń przybliżonych (aproksymacja). W tym przypadku dokładności uzyskiwane na węzłach brzegowych zależą ściśle od parametrów interpolacji. Najlepszą dokładność osiągnięto w przypadku wielomianów interpolacyjnych 2 stopnia i 3 pp oraz 3 stopnia i 4 pp. Dokładniej niż w przypadku testowanych algorytmów (rys.3B) policzone zostały węzły brzegowe również dla wielomianów aproksymacyjnych 2 stopnia oraz 4 i 5 pp jak również dla wielomianu 3 stopnia i 5 pp oraz interpolacji 4 stopnia i 5 pp. Reszta przypadków aproksymacji dała porównywalne lub gorsze rezultaty niż testowane algorytmy interpolacyjne. Aby otrzymać wymaganą dokładność wyznaczenia węzłów brzegowych metodą aproksymacji wielomianem 2D należy ograniczyć się do niskich stopni wielomianu i małej ilości punktów pomiarowych. Dokładność wyznaczenia węzłów brzegowych tą metodą wzrasta również w przypadku większego zagęszczenia węzłów obszaru wewnętrznego na bazie których dokonuje się obliczeń.

Dokładności wyznaczenia węzłów brzegowych w metodzie wielomianów 2D zależą w sposób szczególny od dokładności węzłów wewnętrznych. Z kolei dokładność interpolacji wysokości w tych węzłach zależy od przyjętego algorytmu interpolacyjnego. W związku z tym zachodzi ścisła zależność pomiędzy jakością struktury GRID wewnątrz badanego obszaru, a dokładnością węzłów brzegowych wyznaczanych opisywaną metodą.

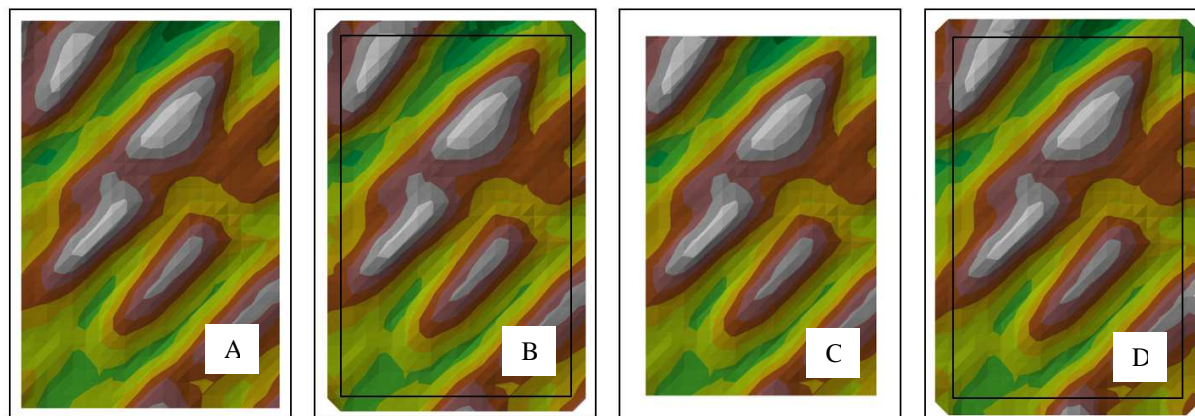


Rys. 8. Porównanie dokładności wyznaczenia węzłów brzegowych wielomianami 2D na bazie szeregu punktów obliczonych różnymi algorytmami interpolacji

Na rysunku 8 przedstawiono wartości współczynników *RMS* uzyskanych przez interpolację takimi samymi wielomianami, z taką samą ilością punktów pomiarowych jak w sytuacji przedstawionej na rysunku 7C. W pierwszym przypadku (rys.8A) podstawą wyznaczenia węzłów brzegowych był GRID policzony algorytmem *kr* (dokładnym – rys.3B), a w drugim (rys.8B) algorytmem *1r2-5* (mało dokładnym – rys.3B). W porównaniu z siatką teoretyczną (rys.7C) wyraźne pogorszenie dokładności występuje dla mało dokładnej metody wyznaczenia węzłów wewnątrz badanego obszaru (*1r2* – rys.8B). W przypadku dokładnego wyznaczenia węzłów wewnętrznych (*kr* – rys.8A) dokładności uzyskiwane na węzłach brzegowych są porównywalne z wewnętrzną siatką teoretyczną (rys.7C). Dobór algorytmu interpolacji wewnętrznej struktury GRID ma kluczowe znaczenie dla dokładności uzyskiwanych na węzłach brzegowych liczonych metodą wielomianów 2D.

5. Wykorzystanie aproksymacji wielomianowej 2D i 3D w modelu DTM

W celu przeanalizowania możliwości praktycznych obu metod wykorzystano je do obliczenia węzłów brzegowych dla numerycznego modelu terenu. Analizowany DTM (rys.9) przedstawia fragment dna morskiego korytarza Szczecin-Świnoujście. Dane pomiarowe uzyskano przy pomocy sondy wielowiązkowej. Interpolacja węzłów wewnętrznych dokonana została algorytmem minimalnej krzywizny (*mk*). W poprzednich analizach pozwolił on na uzyskanie średniej dokładności (rys.3B). Na rysunku 9A przedstawiony został DTM wycięty z większego, uprzednio interpolowanego obszaru. Pozwoliło to na uzyskanie fragmentu modelu, gdzie węzły interpolowane na brzegach posiadały punkty pomiarowe rozmieszczone równomiernie wokół siebie. Model ten jest modelem wzorcowym dla pozostałych modeli. Rysunek 9B przedstawia DTM, gdzie węzły brzegowe są liczone metodą wielomianu 3D (*w3p22*). Wszystkie węzły leżące poza wydzielonym prostokątem (rys.9B) zostały wyznaczone na podstawie punktów pomiarowych zlokalizowanych wyłącznie wewnątrz zaznaczonego obszaru. Rysunek 9C przedstawia GRID wewnętrzny, na bazie którego zostały wyznaczone węzły brzegowe metodą wielomianu 2D. Na rysunku 9D pokazany został DTM z węzłami obliczonymi metodą *w2p4*. Zarówno w jednym (rys.9B) jak i drugim (rys.9D) przypadku model powierzchni jest porównywalny z modelem wzorcowym przedstawionym na rysunku 9A.



Rys. 9. Wyznaczenie węzłów brzegowych dla numerycznego modelu terenu

Analizując dokładnie modele wzdłuż węzłów brzegowych można stwierdzić, że bardziej precyzyjny model został stworzony metodą wielomianu 3D (rys.9B), a mniej precyzyjny metodą wielomianu 2D (rys.9D). Drobne niedokładności pojawiające się wzdłuż dolnej i prawej krawędzi numerycznego modelu terenu stworzonego metodą wielomianu 2D (rys.9D) są spowodowane wpływem morfologii terenu na wyniki obliczeń. Jak już zaznaczono wcześniej można je zredukować stosując odpowiedni dobór stopnia wielomianu i wykorzystując właściwości systematyki błędów generowanych przez tą metodę.

6. Wnioski

Zastosowanie większości algorytmów interpolacji do wyznaczenia wartości w węzłach leżących na granicach mierzonego obszaru prowadzi w znacznej części przypadków do powstania zniekształceń. Jest to spowodowane koniecznością ekstrapolacji wartości w takich miejscach. Można podnieść dokładność wyznaczania wysokości w węzłach brzegowych przez zastosowanie odpowiednich metod odpornych na niedokładności ekstrapolacji. Błędy spowodowane ekstrapolacją wartości można zniwelować stosując algorytmy aproksymacji wielomianowej. Zastosowanie aproksymacji wielomianami 3D wyraźnie podnosi dokładność wyznaczenia węzłów brzegowych. Taka aproksymacja jest precyzyjna jednak wymaga stosunkowo dużej ilości punktów pomiarowych zlokalizowanych w pobliżu węzła. W przypadku węzłów brzegowych taka sytuacja nie zawsze jest możliwa. Metoda aproksymacji wielomianami 2D wymaga mniejszej ilości punktów pomiarowych. Wykorzystuje ona ponadto węzły struktury GRID utworzone wewnątrz opracowywanego obszaru, które mają z reguły większą dokładność. Zastosowanie tej metody pozwala na wyznaczenie węzłów brzegowych pomimo braku lub niedostatecznej ilości punktów pomiarowych zlokalizowanych przy krawędziach analizowanych obszarów. Dokładność tej metody zależy jednak od jakości struktury GRID leżącej wewnątrz badanego obszaru, na podstawie której wyznaczane są węzły brzegowe. W metodzie tej zwiększenie zagęszczenia GRID znacznie podnosi jej dokładność. Obie metody pozwalają na wyznaczenie węzłów brzegowych z dokładnością większą niż analizowane algorytmy interpolacyjne. Wykorzystanie opisywanych metod pozwala to na stworzenie szerszego zakresu opracowania i wygenerowanie kompletnej struktury GRID wykorzystującej wszystkie dostępne punkty pomiarowe. Pozwala to z kolei na podniesienie dokładności modelu DTM na granicach analizowanych obszarów.

Literatura

- [1] AXELSSON P., DEM generation from laser scanner data using adaptive TIN models. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, Amsterdam 2000,
- [2] BURROUGH P., McDONELL R., Principles of Geographical Information Systems - Spatial Information Systems and Geostatistic. *Oxford University Press*, UK Oxford 1998.
- [3] DOUGLAS D.M., PEUCKER T.K., Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *Canadian Cartographer*, 1973.
- [4] GOŚCIEWSKI D., Influence of measurement points positioning on accuracy of interpolation surfaces. *Research Group of Engineering Geodesy, Vienna University of Technology*, Austria Baden 2006.
- [5] GOŚCIEWSKI D., Application of selected statistical coefficients to accuracy analysis on surface interpolation models. *Vilnius Gediminas Technical University Press „Technika”* 2008, Vilnius 2008.
- [6] PITAS I., Digital Image Processing Algorithms and Applications. *John Wiley and Sons*, New York, 2000.
- [7] SCHABENBERGER O. GOTWAY C., Statistical Methods for Spatial Data Analysis. *Chapman and Hall, CRC Boca Raton*, FL 2005.
- [8] WACK R., WIMMER A., Digital terrain models from airborne laser scanner data – a grid based approach. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, Graz 2002.
- [9] WALKER T.C., MILLER R.K., Geographic Information Systems: An Assessment of Technology, Applications and Products. *Madison, Georgia: SEAI Technical Publications*, 1990.
- [10] WILSON J., GALLANT J., Digital terrain analysis. *Terrain Analysis; Principles and Applications*, John Wiley and Sons, New York 2000.
- [11] Surfer Mapping System. Golden Software, Inc 809 14th Street, Golden, Colorado 80401-1866.

THE USE OF POLYNOMIAL APPROXIMATION ALGORITHMS IN DETERMINING ALTITUDE IN BOUNDARY NODES IN GRID STRUCTURES

Summary

Digital terrain modeling in spatial information systems (SIS, GIS) requires the use of adequate data structures (TIN, GRID). The type of structure is selected in view of system requirements, and it is often determined by the distribution and density of measurement points. The use of a GRID-type structure supports the homogenization and organization of the stored data, it limits redundancy and the quantity of stored information. The above solution requires interpolation algorithms whose accuracy is largely contingent on the location of measurement points surrounding the created GRID node. The external boundaries of the interpolated areas feature boundary nodes whose measurement points do not always follow the most desirable distribution pattern. For this reason, a number of requirements have to be met to correctly map values at boundary nodes. This paper proposes a solution to this problem through the use of 2D and 3D polynomial approximation algorithms. Custom-designed software has been developed to map boundary nodes. The proposed solutions were subjected to an accuracy analysis.

Key words: digital terrain model, polynomial approximation algorithms, interpolation algorithms, regular network, GRID, boundary nodes