

Sławomir CELLMER<sup>1</sup>

## WYKORZYSTANIE FUNKCJI NIEOZNACZONOŚCI POMIARU FAZOWEGO DO WYZNACZANIA PRECYZYJNEJ POZYCJI W CZASIE RZECZYWISTYM

### Streszczenie

W artykule przedstawiono algorytm opracowania obserwacji fazowych GNSS metodą MAFA. W tej metodzie „całkowitoliczbowość” nieoznaczoności pomiaru fazowego jest zapewniona poprzez wprowadzenie równań warunkowych do modelu funkcjonalnego zadania wyrównawczego. W zaproponowanym podejściu nie ma konieczności linearyzacji równań obserwacyjnych. Rozwiązanie poszukiwane jest poprzez minimalizację funkcji celu metodą sympleksu Nelder-Meada. Podjęta została próba wyznaczenia precyzyjnych pozycji na podstawie danych pochodzących z pojedynczych epok obserwacyjnych. Zaprezentowano wyniki testów przeprowadzonych na rzeczywistych danych obserwacyjnych, pochodzących z pomiaru trzech wektorów o różnych długościach.

**Słowa kluczowe:** opracowanie obserwacji fazowych GNSS, wyznaczenie nieoznaczoności pomiarów fazowych GNSS

### 1. Wprowadzenie

Większość metod szybkiego wyznaczania pozycji precyzyjnej wymaga wyznaczenia całkowitych wartości nieoznaczoności pomiaru fazowego (ambiguity) [1]. Opracowanie obserwacji fazowych odbywa się w takim przypadku w procesie estymacji całkowitoliczbowej („integer least square adjustment”) [2], [3]. Proces ten składa się z trzech etapów:

- 1) Wyrównanie bez uwzględniania warunku „całkowitoliczbowości” dla nieoznaczoności pomiaru fazowego („float solution”)
- 2) Wyznaczenie całkowitych wartości nieoznaczoności pomiaru fazowego („ambiguity resolution”)
- 3) Wyrównanie z przyjęciem stałych wartości wyznaczonych w poprzednim etapie wartości nieoznaczoności („fixed solution”)

Szczególne miejsce w badaniach prowadzonych przez wielu autorów [2], [3], [4] zajmuje drugi etap powyższego procesu. Obecnie do wyznaczania nieoznaczoności, szeroko stosowana jest, uważana za najbardziej efektywną metoda Lambda [2],[5]. W tej metodzie wykonuje się całkowitoliczbową dekorelację macierzy kowariancji nieoznaczoności, co znacząco zwiększa efektywność poszukiwania właściwego rozwiązania.

Inna interesująca grupa metod wyznaczenia nieoznaczoności opiera się na wykorzystaniu tzw. funkcji ambiguity tzn. funkcji, która przyjmuje określone, znane wartości dla dowolnych liczb całkowitych [6],[7],[8],[9]. Przedmiotem niniejszego artykułu jest metoda MAFA (Modified Ambiguity Function Approach), wykorzystująca funkcję ambiguity [10],[11],[12],[13]. Nie wymaga ona przeprowadzania trzech etapów przedstawionego wyżej procesu estymacji całkowitoliczbowej. W dalszej części artykułu zostały przedstawione podstawy teoretyczne metody MAFA oraz nowy sposób poszukiwania rozwiązania, nie wymagający linearyzacji równań obserwacyjnych. Rozdział piąty zawiera wyniki testów precyzyjnego pozycjonowania na podstawie danych z pojedynczych epok obserwacyjnych.

---

<sup>1</sup>dr inż., Wydział Geodezji i Gospodarki Przestrzennej, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

## 2. Metoda MAFA

Metoda MAFA (Modified Ambiguity Function Approach) opracowania obserwacji fazowych opiera się na wprowadzeniu do modelu funkcjonalnego zadania wyrównawczego warunków zapewniających „całkowitoliczowość” dla części parametrów (nieoznaczoności pomiaru fazowego), a następnie wyrównaniu obserwacji metodą najmniejszych kwadratów.

Przyjmujemy następującą, uproszczoną postać równania obserwacyjnego [3],[7],[14]:

$$\Phi + v = \frac{1}{\lambda} \rho(\mathbf{X}_c) + N \quad (1)$$

gdzie:

- $\Phi$  – podwójnie zróżnicowana obserwacja fazowa, wyrażona w cyklach fali
- $\lambda$  – długość fali
- $v$  – poprawka
- $\mathbf{X}_c$  – wektor współrzędnych anteny odbiornika
- $\rho(\mathbf{X}_c)$  – podwójnie zróżnicowana odległość geometryczna
- $N$  – podwójnie zróżnicowana całkowita liczba cykli

Każdy wyraz równania (1) jest wyrażony w ilości cykli. Występują tam dwie grupy parametrów: składowe pozycji punktu o wartościach rzeczywistych i nieoznaczoności pomiaru fazowego o wartościach całkowitych. W przypadku ogólnym pierwsza grupa parametrów może obejmować dodatkowe elementy np. poprawki jonosferyczne i troposferyczne itp. Nie ma to jednak wpływu na ogólne zasady prezentowanej w niniejszym artykule metody.

Równanie (1) może być zapisane w następującej postaci:

$$\Phi + v - \frac{1}{\lambda} \rho(\mathbf{X}_c) = N \quad (2)$$

Dla uproszczenia wyraz  $\rho(\mathbf{X}_c)$  będzie zapisywany tylko symbolem  $\rho$ , bez wskazywania na jego zależność od wektora  $\mathbf{X}_c$ .

Nominalna dokładność pomiaru fazowego wynosi ok. 0.01 cyklu [7]. Poprawka w równaniu (2) musi więc być dużo mniejsza od 0.5 cyklu. Stąd biorąc pod uwagę całkowitą wartość wyrazu  $N$  równanie (2) możemy przekształcić do następującej postaci:

$$\Phi + v - \frac{1}{\lambda} \rho = \text{round}\left(\Phi - \frac{1}{\lambda} \rho\right) \quad (3)$$

lub

$$v = \text{round}\left(\Phi - \frac{1}{\lambda} \rho\right) - \left(\Phi - \frac{1}{\lambda} \rho\right) \quad (4)$$

gdzie *round* jest funkcją wyznaczającą najbliższą całkowitą wartość rzeczywistego argumentu („zaokrąglającą” argument do najbliższej liczby całkowitej).

Równania (4) układane są dla każdej podwójnie zróżnicowanej obserwacji fazowej. Układ tych równań tworzy model funkcjonalny zadania wyrównawczego, który zawiera warunki zapewniające „całkowitoliczowość” nieoznaczoności pomiaru fazowego. W pracach [10],[11],[12],[13], została zaproponowana różniczkowalna funkcja, którą można zastąpić prawą stroną wyrażenia (4). Po linearyzacji tej funkcji można otrzymać liniowy układ równań poprawek i zadanie wyrównawcze zostaje wtedy sprowadzone do standardowej postaci:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L} \quad (5)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \min \quad (6)$$

gdzie:

- $\mathbf{V}$  – wektor poprawek
- $\mathbf{A}$  – macierz modelu funkcjonalnego
- $\mathbf{L}$  – wektor wyrazów wolnych
- $\mathbf{P}$  – macierz wag

Istotnym ograniczeniem tego podejścia jest konieczność posiadania dobrej pozycji przybliżonej. W przeciwnym wypadku rozwiązanie będzie oparte na całkowitych ale błędnych wartościach nieoznaczoności. W pracy [13] został zdefiniowany warunek konieczny, niezbędny do uzyskania prawidłowego rozwiązania w metodzie MAFA, a w pracach [10],[11],[12], został zaproponowany mechanizm zapewniający zbieżność procesu obliczeniowego do prawidłowego rozwiązania, oparty na tzw. wyrównaniu kaskadowym [8],[15].

W niniejszym artykule zostanie zaproponowany inny sposób realizacji zadania wyrównawczego. W zadaniu tym w miejsce liniowych równań (5) wstawione zostaną nieliniowe równania (4), natomiast poszukiwanie minimum funkcji celu (6) zostanie przeprowadzone numeryczną metodą Sympleksu Nelder-Meada [16].

### 3. Metoda Sympleksu Nelder Meada

Występujący w funkcji celu (6) wektor poprawek  $V$  składa się z elementów określonych formułą (4). W formule tej, jak to zostało już wyjaśnione przy wzorze (1), wyraz  $\rho$  jest funkcją wektora  $X_c$ , którego elementami są składowe pozycje punktu wyznaczanego. Rozwiązanie zadania wyrównawczego polega poszukiwaniu takiego wektora  $X_c$ , który minimalizuje funkcję (6).

Metoda Sympleksu Nelder-Meada poszukuje rozwiązania w obszarze o stosunkowo dużym zasięgu, a więc rozwiązanie nie jest mocno uzależnione od wyboru punktu startowego procesu minimalizacji co w zastosowaniu do metody MAFA ma wyjątkowo istotne znaczenie.

W omawianym przypadku proces optymalizacji funkcji przy pomocy tej metody opiera się na transformacjach sympleksu złożonego z 4 punktów. Punkt początkowy  $X_0$  musi być dany. Pozostałe punkty sympleksu obliczane są z następującej formuły:

$$X_i = X_0 + \lambda \cdot e_i \quad (7)$$

$\begin{matrix} 3 \times 1 & & 3 \times 1 & & 3 \times 1 \end{matrix}$

gdzie:

$$\lambda = \text{const}$$

$e_i$  – wektory o następującej strukturze:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

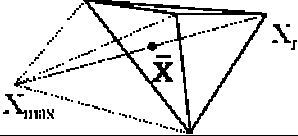
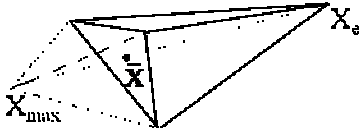
Wartość funkcji w punkcie  $X_i$  jest oznaczona przez  $\Phi_i$ .

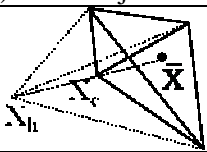
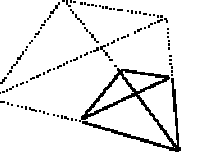
Ponadto przyjęto następujące oznaczenia:

$$\Phi_{\max} = \max_{i=0,1,2,3} (\Phi_i), \Phi_{\min} = \min_{i=0,1,2,3} (\Phi_i), \bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i \neq i_{\min}} X_i,$$

gdzie  $i_{\min}$  oznacza indeks punktu, w którym jest  $\Phi_{\min}$ .

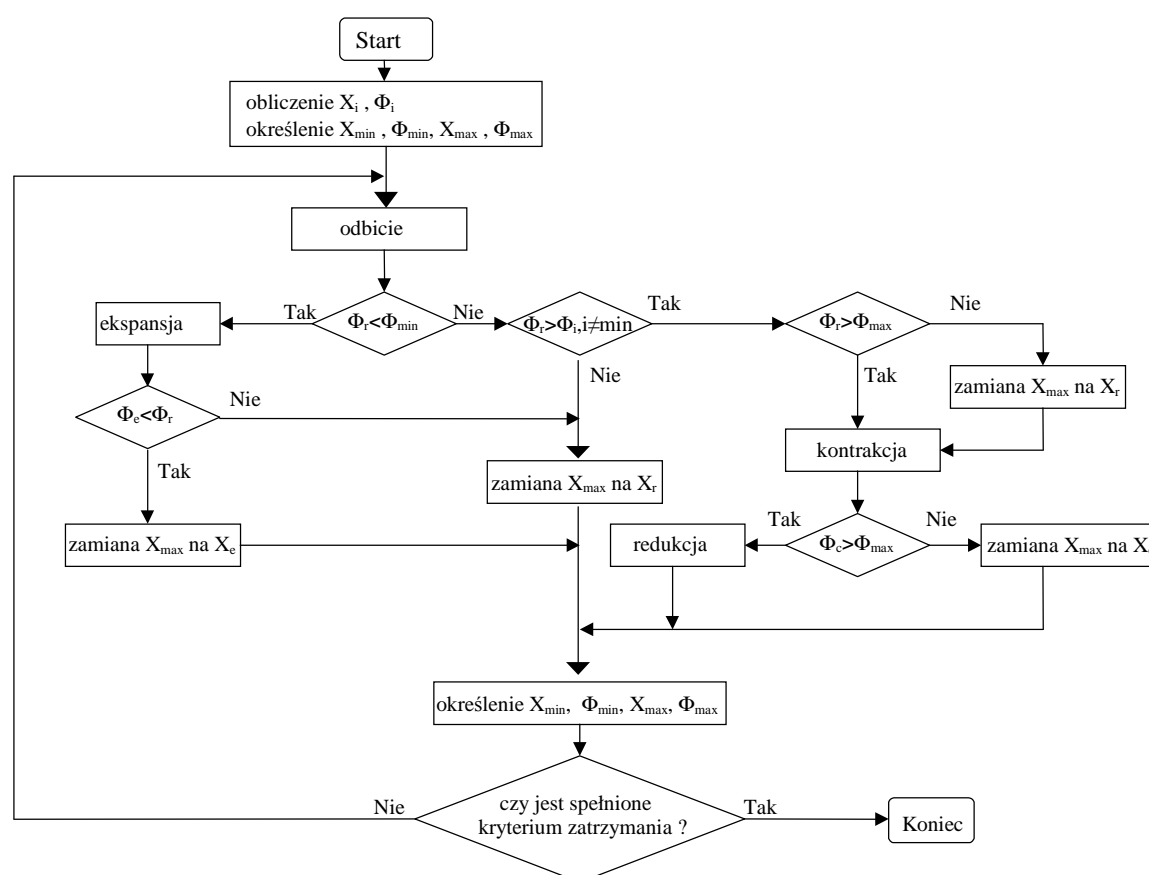
Poszukiwanie minimum funkcji celu jest wykonywane poprzez transformację sympleksu za pomocą czterech następujących operacji:

|   |   |
|---|---|
| a) odbicie  |   |
|  | punkt $X_{\max}$ jest zastępowany punktem $X_r$<br>$X_r = \bar{X} + \alpha(\bar{X} - X_{\max})$ $\alpha=1 \text{ (współczynnik odbicia)}$ |
| b) ekspansja  |   |
|  | punkt $X_{\max}$ jest zastępowany punktem $X_e$<br>$X_r = \bar{X} + \alpha(\bar{X} - X_{\max})$ $\alpha=1 \text{ (współczynnik odbicia)}$ |

|               |  |
|---------------|--|
| c) kontrakcja |  <p>punkt <math>X_{\max}</math> jest zastępowany punktem <math>X_c</math></p> $X_c = \bar{X} + \beta(X_{\max} - \bar{X})$ $\alpha=1 \text{ (współczynnik odbicia)}$ |
| d) redukcja   |  <p>wszystkie punkty <math>X_i</math> są zastępowane punktami <math>X'_i</math></p> $X'_i = \frac{1}{2}(X_i + X_{\min})$  |

Rys. 1. Transformacje sympleksu

Algorytm metody jest przedstawiony za pomocą poniższego schematu blokowego:

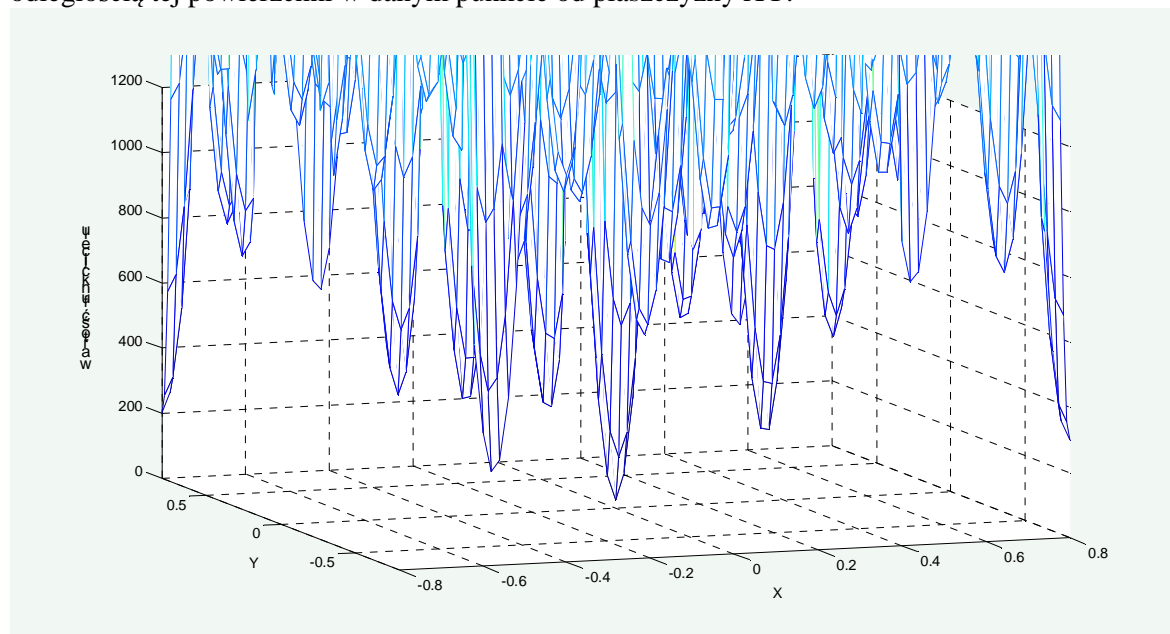


Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu Metody Sympleksu Nelder-Meada

Proces optymalizacji funkcji rozpoczyna się obliczeniem wartości funkcji  $\Phi_i$  w każdym punkcie sympleksu. Następnie obliczany jest punkt środka sympleksu  $\bar{X}$  oraz określone są wartości  $X_{\min}$ ,  $\Phi_{\min}$ ,  $X_{\max}$ ,  $\Phi_{\max}$ . W pierwszym etapie każdej iteracji wykonywana jest operacja odbicia. Jeśli w jej wyniku otrzymujemy nowe minimum wtedy wykonywana jest operacja ekspansji. Jeśli ekspansja daje nowe minimum wtedy punkt  $X_{\max}$  jest zastępowany punktem  $X_e$  a w przeciwnym wypadku punkt  $X_{\max}$  jest zastępowany punktem  $X_r$ . Jeśli operacja odbicia daje nowe maksimum lub spełniony jest warunek ( $\Phi_r > \Phi_i$ , dla każdego  $i \neq \max$ ) wtedy wykonywana jest operacja kontrakcji. Jeśli daje ona dobry wynik ( $\Phi_c < \Phi_{\max}$ ) wtedy punkt  $X_{\max}$  jest zastępowany punktem  $X_c$  a w przeciwnym wypadku wykonywana jest redukcja. Następnie określone są wartości  $X_{\min}$ ,  $\Phi_{\min}$ ,  $X_{\max}$ ,  $\Phi_{\max}$  oraz  $\bar{X}$  i sprawdzane jest kryterium zatrzymania.

#### 4. Zastosowanie kombinacji liniowej L1-L2 do poprawienia efektywności procesu obliczeniowego

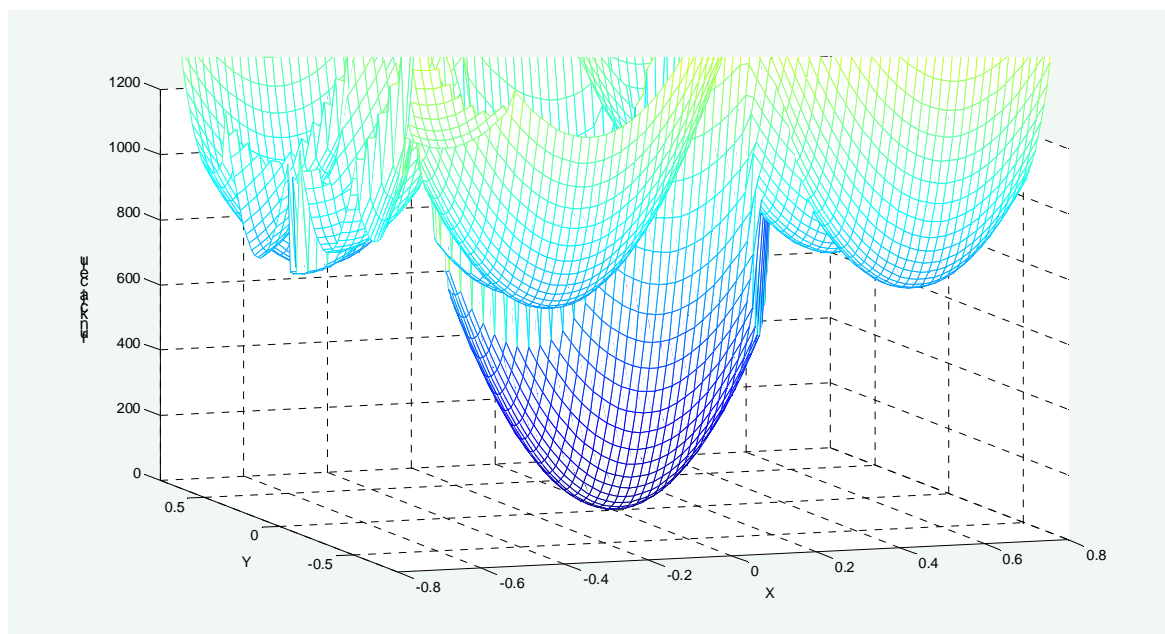
Funkcja celu (6) może być przedstawiona jako powierzchnia w przestrzeni trójwymiarowej. W celu wygodnego, graficznego przedstawienia zależności funkcji celu od współrzędnych pozycji punktu, wyznaczono wartości tej funkcji w siatce o wymiarach  $1.6\text{m} \times 1.6\text{m} \times 1.6\text{m}$ , o gęstości 2 cm, a następnie wyznaczono jej przekrój w miejscu gdzie funkcja osiąga minimum przyjmując stałą wartość składowej Z dla poprawnego rozwiązania. Na rysunku 3 przedstawiona jest graficzna interpretacja funkcji celu dla zbioru obserwacyjnego składającego się z pomiarów fazowych sygnału L1. Funkcja celu jest tu reprezentowana przez pewną powierzchnię. Wartość funkcji celu jest odległością tej powierzchni w danym punkcie od płaszczyzny XY.



Rys. 3. Wykres zależności funkcji celu od składowych X i Y ( $Z=\text{const}$ ) dla sygnału L1.

Jak widać z wykresu funkcja celu ma wiele lokalnych minimów. Istnieje więc duże ryzyko, że rozwiązanie zostanie wyznaczone w jednym z lokalnych minimów zamiast w minimum globalnym, gdzie jest właściwe rozwiązanie.

Problem ten można rozwiązać wykorzystując kombinację liniową sygnałów L1 i L2 o całkowitych współczynnikach (w celu zapewnienia całkowitych wartości nieoznaczoności) i większej długości fali. Warunki te spełnia kombinacja liniowa L1-L2 („wideline”) [7],[8],[11]. Długość fali tej kombinacji wynosi 0.8619 m, a więc jest ponad czterokrotnie większa niż długość fali pojedynczego sygnału L1 (0.1903 m). Dzięki zastosowaniu tej kombinacji liniowej otrzymujemy bardziej „gładki” wykres funkcji celu w porównaniu z przypadkiem dla pojedynczego sygnału L1. Wykres funkcji celu dla kombinacji L1-L2 jest przedstawiony na rysunku 4.



Rys. 4. Wykres zależności funkcji celu od składowych X i Y ( $Z=\text{const}$ ) dla kombinacji liniowej L1-L2

Kombinacja liniowa L1-L2 jest obciążona większym błędem średnim niż pojedynczy sygnał L1. Dlatego opracowanie wykonywane jest w dwóch etapach. W pierwszym etapie rozwiązanie poszukiwane jest na podstawie kombinacji liniowych L1-L2. Rozwiązanie z pierwszego etapu stanowi punkt startowy do poszukiwania rozwiązania w drugim etapie - w oparciu o obserwacje fazowe pojedynczego sygnału L1.

## 5. Testy obliczeniowe

Testy obliczeniowe zostały przeprowadzone dla trzech wektorów o długościach odpowiednio: 2.5 km, 11 km i 50 km. Każdy wektor został policzony przy pomocy programu Bernese 5.5 na podstawie 8 godzinnej sesji obserwacyjnej. Wyniki z tego opracowania były traktowane jako wartości prawdziwe w analizach porównawczych z wynikami otrzymanymi metodą MAFA.

Testy obliczeniowe za pomocą metody opisanej w artykule wykonywano niezależnie dla każdej epoki obserwacyjnej. Otrzymano więc 120 rozwiązań dla każdego wektora. Przybliżona pozycja była wyznaczona z obserwacji kodowych techniką DGPS. Dalsza część opracowania była wykonywana wg zasad opisanych w poprzednich częściach artykułu. Zarówno pozycja przybliżona (DGPS) jak i ostateczne rozwiązanie były otrzymywane na podstawie danych z pojedynczych epok obserwacyjnych, (niezależnie od danych z pozostałych epok).

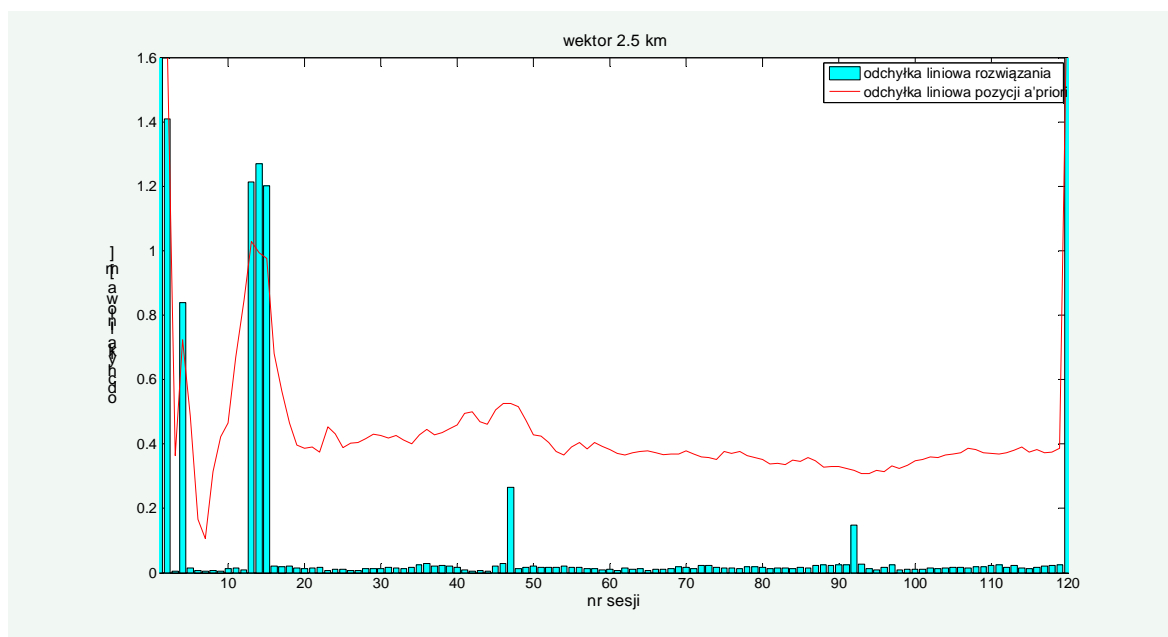
Na rysunkach przedstawione są wyniki opracowania. Każdy wykres przedstawia odchyłki liniowe pozycji otrzymanej w danej epoce obserwacyjnej od pozycji „prawdziwej” (z opracowania 8 godzinnej sesji programem Bernese), [17]. Odchyłki liniowe były wyznaczane jako wypadkowe odchyłek składowych pozycji a ich długości wyznaczono wg wzoru:

$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} , \quad (8)$$

gdzie:

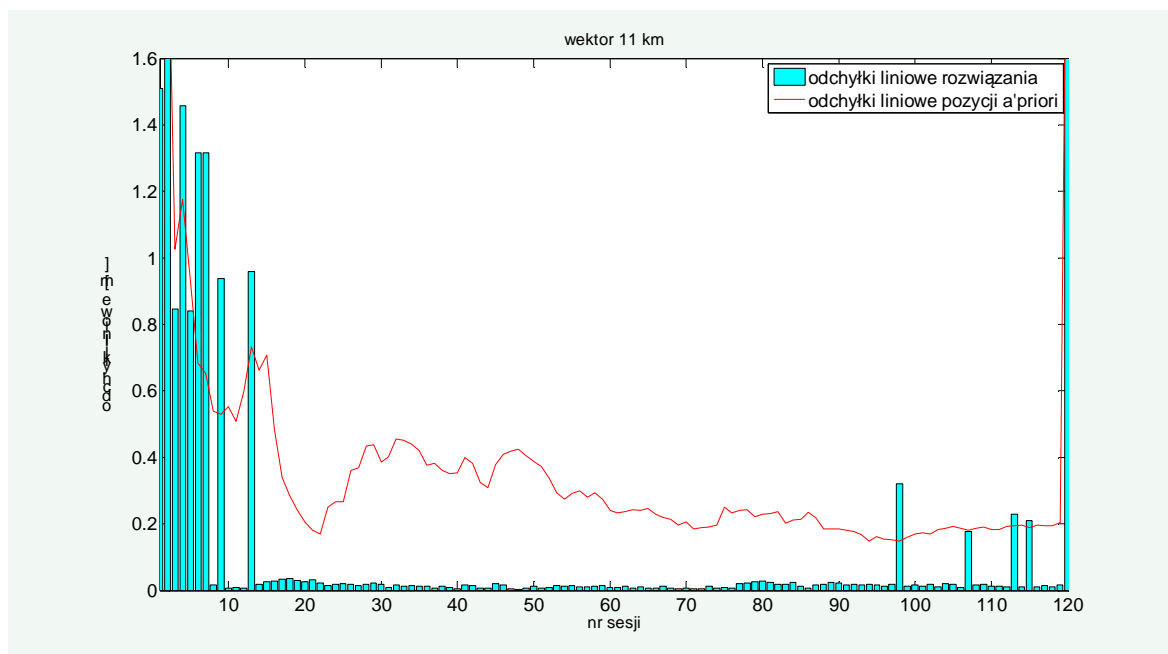
$dx, dy, dz$  – odchyłki składowych pozycji od ich wartości „prawdziwych”.

Czerwona linia oznacza wielkość odchyłek liniowych dla pozycji przybliżonych (z DGPS).

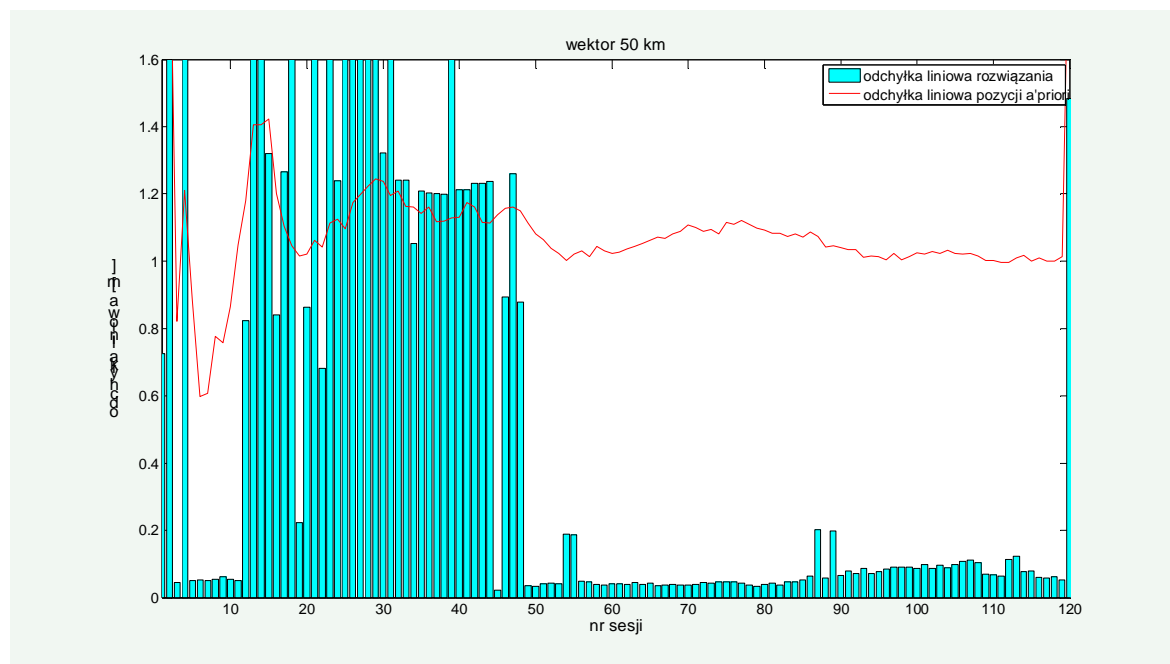


Rys. 5. Odchyłki liniowe pozycji dla wektora o długości 2.5 km

Dla wektora o długości 2.5 km (rys. 5) uzyskano 111 poprawnych rozwiązań spośród wszystkich 120 opracowań. Stanowi to 92.5% poprawnych rozwiązań. Dla wektorów o długościach 11 km (rys. 6) i 50 km (rys. 7) otrzymano odpowiednio 106 i 76 poprawnych rozwiązań (88% i 63%). Dla krótszych wektorów jest widoczna wyraźna zależność pomiędzy dokładnością pozycji przybliżonej, a prawdopodobieństwem otrzymania poprawnego rozwiązania.



Rys. 6. Odchyłki liniowe pozycji dla wektora o długości 11 km



Rys. 7. Odchyłki liniowe pozycji dla wektora odległości 50 km

## 6. Podsumowanie

Przedstawiony sposób opracowania sygnałów GPS opiera się na metodzie MAFA z numerycznym poszukiwaniem minimum funkcji celu. Dla uzyskania odpowiedniej zbieżności procesu obliczeniowego konieczne jest zastosowanie kombinacji liniowej „wideline”.

Pierwsze testy wskazują na to, że metoda pozwala na uzyskanie poprawnych rozwiązań nawet z pojedynczej epoki obserwacyjnej. Do uzyskania poprawnego rozwiązania konieczna jest dokładna pozycja przybliżona (w granicach ok. 0.5 m).

## Literatura

- [1] KIM D., LANGLEY R.B., *GPS Ambiguity Resolution and Validation : Methodologies , Trends and Issues Symposium A 7th GNSS Workshop International Symposium on GPS/GNSS, 2000*, Vol. 30, Issue: 2.12, s. 1-9
- [2] TEUNISSEN P. J. G. *The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation* J Geod 70, 1995, s. 65-82
- [3] TEUNISSEN P J G., and KLEUSBERG A. (Eds) *GPS for Geodesy*, Springer — Verlag, Berlin Heidelberg New York 1998
- [4] CHANG X-W, YANG X, ZHOU T., *MLAMBDA: a modified LAMBDA method for integer least-squares estimation*, J Geod 79, 2005 s. 552-565
- [5] TEUNISSEN P J G. *An Optimality Property of the Integer Least Squares Estimator* J Geod 73, 1999, s. 587-593
- [6] REMONDI B. W. *Pseudo-kinematic GPS results using the ambiguity function method*. National Information Center, Rockville, Maryland, NOAA Technical Memorandum NOS NGS-52 1990
- [7] HOFMANN-WELLENHOF B, LICHTENEGGER H, WASLE E., *GNSS-Global Navigation Satellite Systems - GPS, GLONASS, Galileo & more*. 2008, Springer-Verlag Wien
- [8] HAN S, RIZOS C., *Improving the computational efficiency of the ambiguity function algorithm*. J Geod 70, 1996, s. 330-341
- [9] MADER G.L., *Ambiguity function techniques for GPS phase initialization and kinematic solutions*. In Proc Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Ottawa, Canada, September 3-7 1990, s. 1233-1247



- [10] CELLMER S., Proposal for new strategy in precise positioning. *Reports on Geodesy* No. 2(87) 2009, s. 77-85
- [11] CELLMER S, WIELGOSZ P., RZEPECKA Z., Modified Ambiguity Function Approach for GPS carrier phase positioning *J Geod* 84, 2010, s. 267-275 (DOI: 10.1007/s00190-009-0364-8)
- [12] CELLMER S., The real time precise positioning using MAFA method, *The 8<sup>th</sup> International Conference ENVIRONMENTAL ENGINEERING, selected papers*, vol . III, Vilnius, s.1310-1314
- [13] CELLMER S. (2011), *A Graphic Representation of the Necessary Condition for the MAFA Method*. Transactions on Geoscience and Remote Sensing (zaakceptowany do druku)
- [14] LEICK A., *GPS Satellite Surveying*. 3<sup>rd</sup> edition, 2004, John Wiley and Sons, Inc
- [15] JUNG J., ENGE P., *Optimization of Cascade Integer Resolution with Three Civil GPS Frequencies*. In Proc. ION GPS'2000, Salt Lake City, September 2000
- [16] NELDER A., MEAD R., *A simplex method for function minimization*, Computer Journal 7, 1965, s. 308-313.
- [17] DACH R, HUGENTOBLE U, FRIDEZ P, MEINDL M., *BERNESE GPS Software Version 5.0.*, 2007, Astronomical Institute, University of Berne

## REAL TIME PRECISE POSITIONING USING AMBIGUITY FUNCTION

### Summary

In the paper an algorithm of carrier phase GNSS data processing using MAFA method is presented. In this method "integerness" of ambiguity is ensured through including of conditional equations into functional model of the adjustment problem. There is no necessity to linearize of the observation equations in the proposed approach. The solution is searched through minimisation of the objective function using Nelder-Mead Symplex method. There was made an attempt of single epoch positioning. The tests based on real data were carried out. The results of these test were presented.