

JCEE

---

Czasopismo  
Inżynierii Lądowej,  
Środowiska  
i Architektury

---

Journal of Civil  
Engineering,  
Environment  
and Architecture

---

Kwartalnik  
tom XXXIV  
zeszyt 64 (nr 2/1/2017)  
kwiecień-czerwiec

(e-ISSN 2300-8903)

Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury jest kontynuacją  
Zeszytów Naukowych Politechniki Rzeszowskiej - Budownictwo i Inżynieria Środowiska.

Wydano za zgodą Rektora

Redaktor naczelny  
Wydawnictw Politechniki Rzeszowskiej  
prof. dr hab. Grzegorz OSTASZ

Rada Naukowa

prof. Hasan Arman (Zjednoczone Emiraty Arabskie), prof. Zinoviy Blikharskyy (Ukraina)  
prof. Antonio João Carvalho de Albuquerque (Portugalia), prof. Marina Ciuna (Włochy)  
prof. Volodymyr V. Cherniuk (Ukraina), prof. Maurizio d'Amato (Włochy)  
prof. Endre Domokos (Węgry), prof. Mohamed Eid (Francja), prof. Maria Elektorowicz (Kanada),  
prof. Haritha Malladi (USA), prof. Samuel Hudson (USA), prof. Dušan Katunsky (Słowacja)  
prof. Krzysztof Knapik (Polska), prof. Ryszard L. Kowalczyk (Australia)  
prof. Jozef Kriš (Słowacja), prof. Vincent Kvočak (Słowacja), prof. Stanisław Kuś (Polska)  
prof. Mladen Radujkovic (Chorwacja), prof. Czesława Rosik-Dulewska (Polska)  
prof. Francesca Salvo (Włochy), prof. João Antonio Saraiva Pires da Fonseca (Portugalia)  
prof. Marco Simonotti (Włochy), prof. Nadežda Številová (Słowacja),  
prof. Janusz A. Tomaszek (Polska), prof. David Valis (Czechy)  
prof. António Avelino Batista Vieira (Portugalia), prof. Oksana Vovk (Ukraina)  
prof. Tomasz Winnicki (Polska), prof. Jerzy Ziółko (Polska)

Komitet Redakcyjny

(afiliacja: Polska)

*redaktor naczelny*

dr hab. inż. Piotr KOSZELNIK, prof. PRz

*redaktorzy tematyczni (naukowi)*

dr hab. inż. Bartosz MILLER, prof. dr hab. inż. Janusz RAK

*redaktor statystyczny*

dr hab. inż. Szczepan WOLIŃSKI, prof. PRz

*sekretarz redakcji*

dr inż. Katarzyna PIETRUCHA-URBANIK

*członkowie*

dr inż. Renata GRUCA-ROKOSZ, dr inż. arch. Anna SIKORA, dr inż. Michał JUREK,  
dr hab. inż. Lucjan ŚLĘCZKA, prof. PRz, mgr inż. Artur SZALACHA

Przygotowanie matryc

Michał JUREK

p-ISSN 2300-5130

e-ISSN 2300-8903

Wersja drukowana Kwartalnika jest wersją pierwotną.

Redakcja czasopisma: Politechnika Rzeszowska, Wydział Budownictwa, Inżynierii Środowiska  
i Architektury, al. Powstańców Warszawy 6, 35-959 Rzeszów, [www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/) (e-mail: [kpiet@prz.edu.pl](mailto:kpiet@prz.edu.pl))

Wydawca: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 12,  
35-959 Rzeszów, [www.oficyna.prz.edu.pl](http://www.oficyna.prz.edu.pl) (e-mail: [oficyna@prz.edu.pl](mailto:oficyna@prz.edu.pl))

Informacje dodatkowe i stopka – str. 327

## SPIS TREŚCI

Filip ZAKĘŚ: Zastosowanie metody różnic skończonych w dynamice cienkich płyt mostowych poddanych działaniu obciążeń ruchomych.....	7
Piotr FEDELIŃSKI: Dynamically loaded branched and intersecting cracks .....	17
Dariusz ROZUMEK, Roland PAWLICZEK, Janusz LEWANDOWSKI: Stanowisko do badań zmęczeniowych materiałów przy zginaniu ze skręcaniem .....	27
Przemysław WIELENTEJCZYK, Roman LEWANDOWSKI: Wpływ wyższych harmonicznych na nieliniowe drgania belek wykonanych z materiału Kelvina-Voigta.....	39
Zdzisław PAWLAK: Identyfikacja cech sprężystych węzła konstrukcyjnego na podstawie wyników testu dynamicznego.....	49
Jan BOGACKI, Jarosław ZAWADZKI: Magnetic markers use for monitoring of environmental pollution caused by fracturing fluids during shale gas exploitation.....	59
Andrzej CIŃCIO, Jan FEDOROWICZ: Aanalysis of wall structures subjected to mining discontinuous deformation.....	71
Urszula PAWLAK, Michał SZCZECINA: Dynamic stability criterion for the evaluation of a steel industrial hall with internal transport.....	87
Seweryn KOKOT: Wpływ szybkości utraty słupa na dynamiczną odpowiedź konstrukcji żelbetowej.....	97
Marian KLASZTORNY, Karol ZIELONKA, Daniel B. NYCZ, Pawel POSUNIAK: Experimental verification of simulation of TB32 crash test for SP-05/2 road safety barrier on horizontal concave arc .....	107

Zbigniew SIENKIEWICZ: Pionowe drgania własne osiowosymetrycznej sztywnej bryły zagłębionej w inercyjnej półprzestrzeni sprężystej...	119
Lucjan KRÓL: Wyznaczenie zależności między efektywnością działania a sprawnością mechaniczną mechanizmu różnicowego .....	129
Stanisław WOLNY, Sławomir BADURA: Weryfikacja stanu naprężenia w elementach nośnych zmodernizowanego koła pędnego górniczego urządzenia wyciągowego .....	139
Stanisław WOLNY, Sławomir BADURA: Wytrzymałość cięgien nośnych górniczego naczynia wydobywczego .....	149
Janusz LEWANDOWSKI, Dariusz ROZUMEK: Ocena stopnia zużycia zespołu wentylatora na podst. pomiaru i analizy drgań łożysk.....	159
Krzysztof KOZIÓŁ: Pomiar in-situ jako sposób na prognozę obciążenia dynamicznego budynków .....	169
Danuta BRYJA, Adam POPIOŁEK: Analiza drgań wieszara ciągnowego jako modelu kolejowej sieci trakcyjnej obciążonej ruchem pantografów.....	177
Janusz SZMIDŁA, Anna JURCZYŃSKA: Analiza drgań poprzecznych smukłej kolumny o zmiennym przekroju poprzecznym przy obciążeniu uogólnionym z siłą skierowaną do bieguna dodatniego .....	191
Barbara TOMCZYK, Anna LITAWSKA: A new tolerance model of vibrations of thin microperiodic cylindrical shells .....	203
Krzysztof KUŹNIAR, Maciej ZAJĄC: Odpowiedź dynamiczna budynku mieszkalnego po termomodernizacji na wstrząsy pochodzenia górniczego .....	217
Tomasz SIWOWSKI, Mateusz RAJCHEL, Damian KALETA: Charakterystyka dynamiczna mostu drogowego wykonanego z polimerowych kompozytów włóknistych FRP.....	227
Jan WALCZAK: State-of-the-art time integration methods in the ADINA program.....	239

Dominika ZIAJA, Bartosz MILLER: Wykrywanie uszkodzeń węzłów w modelu ramy stalowej na podstawie analizy inertancji .....	247
Artur BOROWIEC, Leonard ZIEMIAŃSKI: Badania dynamiczne odbieraka prądu lekkiego pojazdu szynowego.....	257
Michał JUREK, Katarzyna MAJEWSKA, Magdalena MIELOSZYK, Wiesław OSTACHOWICZ, Leonard ZIEMIAŃSKI: Analiza połączenia płyta GFRP – usztywnienie z wykorzystaniem wibrotermografii .....	271
Roman LEWANDOWSKI: Całkowanie równań ruchu konstrukcji z ułamkowymi tłumikami Maxwella .....	281
Barbara MARKIEWICZ, Leonard ZIEMIAŃSKI: Analiza dynamiczna kompozytowych konstrukcji cienkościennych .....	291
Grzegorz PIĄTKOWSKI, Leonard ZIEMIAŃSKI: Eksperymentalna analiza modalna dźwigara kompozytowego FRP z kompozytową płytą pomostową .....	303
Agnieszka GONTASZEWSKA-PIEKARZ, Jerzy KŁOSIŃSKI: Geological and seismic investigation of former lignite mining area in Zielona Góra – two case studies .....	311

Filip ZAKĘŚ<sup>1</sup>

## ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH W DYNAMICE CIENKICH PŁYT MOSTOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻEŃ RUCHOMYCH

Praca przedstawia rozwiązanie zagadnienia drgań nietłumionych cienkiej prostokątnej płyty mostowej poddanej działaniu obciążenia nieinercyjnego poruszającego się ze stałą prędkością. Zastosowane zostały znane procedury numeryczne Metody Różnic Skończonych, mające na celu dyskretyzację przestrzenną obszaru płyty, a także algorytmy metody Newmarka przy dyskretyzacji czasu przejazdu obciążenia przez płytę. Podano formuły pozwalające zbudować i rozwiązać macierzowe równanie ruchu w tym budowę wektorów obciążeń dla przypadku ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia rozłożonego. Praca uzupełniona jest przykładem numerycznym płyty mostowej podpartej 4 słupami obciążonej dwoma rodzajami obciążenia ruchomego.

**Słowa kluczowe:** Metoda Różnic Skończonych, obciążenia ruchome, płyta cienka, metoda Newmarka

### 1. Wprowadzenie

Zagadnienie drgań konstrukcji poddanych działaniu obciążeń ruchomych jest zarówno istotne jak i interesujące z teoretycznego punktu widzenia oraz częstego występowania w praktyce projektowej. W ciągu wielu lat problem ten był analizowany przez wielu autorów rozpatrujących różne typy konstrukcji, zarówno płaskich jak i przestrzennych, a także różne modele obciążeń ruchomych [1-7].

Niniejsza praca poświęcona jest cienkim prostokątnym płytom mostowym poddanym działaniu różnego rodzaju nieinercyjnych obciążeń ruchomych (ruchoma siła skupiona oraz ruchome obciążenie równomiernie rozłożone). Zagadnienie zostało rozwiązane w sposób numeryczny przy zastosowaniu algorytmów Metody Różnic Skończonych przy dyskretyzacji przestrzennej obszaru płyty oraz metody Newmarka przy dyskretyzacji czasu przejazdu obciążenia po płycie.

---

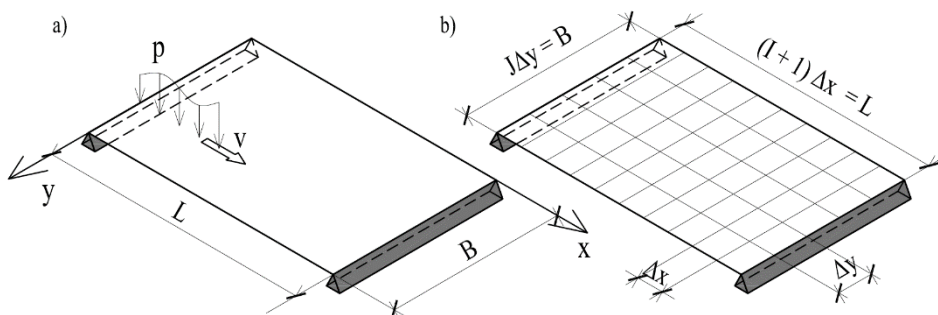
<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Filip Zakęś, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, Zakład Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów, Pl. Grunwaldzki 24, 50-363 Wrocław; tel. 713205521; filip.zakes@up.wroc.pl.

## 2. Metoda Różnic Skończonych

Rozpatrzmy cieką prostokątną płytę o wymiarach  $B \times L$  podpartą swobodnie na przeciwległych krawędziach wzdłuż wymiaru  $B$  oraz nie posiadającą podparcia na krawędziach wzdłuż wymiaru  $L$  (rys. 1a). Drgania nietłumione takiej płyty poddanej działaniu obciążenia  $p$  poruszającego się wzdłuż krawędzi  $L$  ze stałą prędkością  $v$  opisuje równanie:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (1)$$

Gdzie  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  oznacza sztywność giętą płyty,  $h$  jej grubość,  $\rho$  gęstość materiału,  $E$  moduł Younga, a  $\nu$  współczynnik Poissona. Funkcja obciążenia  $p(x, y, t)$  przyjmuje postać  $p(x, y, t) = P\delta(x - vt)\delta(y - y_0)$  w przypadku gdy płyta obciążona jest ruchomą skupioną siłą  $P$  lub w przypadku ruchomego obciążenia  $q$  równomiernie rozłożonego  $p(x, y, t) = qH(vt - x)\delta(y - y_0)$ . Symbolem  $\delta$  oznaczono deltę Diraca, a  $H$  oznacza funkcję Heaviside'a.



Rys. 1. Cienka płyta mostowa; a) model ciągły; b) model dyskretny

Fig. 1. A thin bridge plate; a) continuous model; b) discrete model

Stosując procedurę Metody Różnic Skończonych dzielimy obszar płyty liniami prostopadłymi do krawędzi  $B$  i  $L$  tworząc w ten sposób siatkę dyskretyzacyjną o wymiarach oczka  $\Delta x \cdot \Delta y$  (rys. 1b). Punkty przecięcia linii tworzą węzły siatki w których wyznaczać będziemy ugięcia dynamiczne płyty  $w_{i,j} = w(x_i, y_j, t)$  bazując na przyjętej formule różnicowej:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] = \frac{D}{\lambda^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+2}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) + (w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2})] \quad (2)$$

gdzie  $\lambda = \Delta x = \Delta y$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ . W ten sposób równanie różniczkowe (1) zastępujemy układem  $I \cdot J$  równań algebraicznych postaci:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\lambda^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+2}) \\ + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) \\ + (w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2})] + m_{i,j}\ddot{w}_{i,j} = p_{i,j} \end{aligned} \quad (3)$$

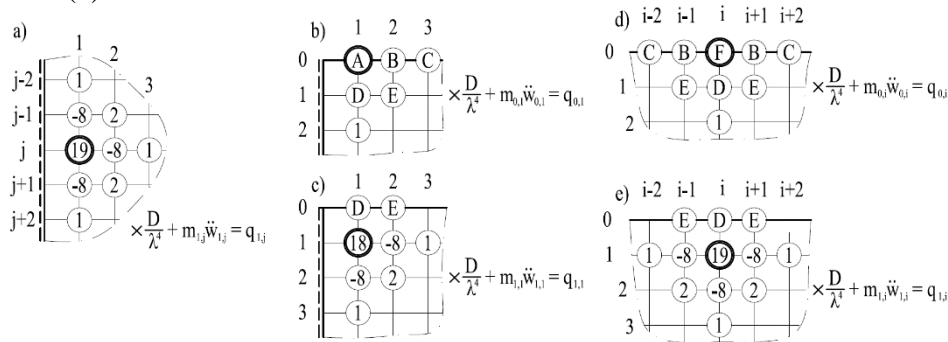
gdzie  $\ddot{w}_{i,j} = \frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t)}{\partial t^2}$ . Układ równań (3) można przedstawić w postaci macierzej:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{w}}(t) + \mathbf{K}\bar{w}(t) = \bar{p}(t) \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności,  $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_{i,j}\}$  jest macierzą bezwładności ( $m_{i,j} = \rho h$  dla  $j \neq 0; j \neq J$ ;  $m_{i,j} = \frac{\rho h}{2}$  dla  $j = 0; j = J$ ), natomiast  $\bar{p}(t)$  jest wektorem obciążenia.

## 2.1. Warunki brzegowe

Równania algebraiczne (3) należy zmodyfikować uwzględniając odpowiednie warunki brzegowe określające współczynniki występujące przy ugięciach odpowiednich węzłów siatki MRS [8]. Na rysunku 2 przedstawiono schematycznie wartości współczynników dla charakterystycznych punktów płyty mostowej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych oraz dwóch krawędziach swobodnych. Dla wszystkich pozostałych węzłów obowiązują równania w postaci (2).



Rys. 2. Współczynniki przy ugięciach węzłów: a) węzeł w sąsiedztwie brzegu swobodnie podpartego; b) węzeł na krawędzi swobodnej w sąsiedztwie krawędzi swobodnie podpartej; c) węzeł w sąsiedztwie krawędzi swobodnie podpartej i swobodnej; d) węzeł na krawędzi swobodnej; e) węzeł w sąsiedztwie krawędzi swobodnej

Fig. 2. Node deflection coefficients: a) node adjacent to a pinned edge; b) node on a free edge adjacent to a pinned edge; c) node adjacent to a pinned-free corner; d) node on a free edge; e) node adjacent to a free edge



Współczynniki  $A, B, C, D, E, F$  widoczne na schematach 2b-2e wynoszą odpowiednio:

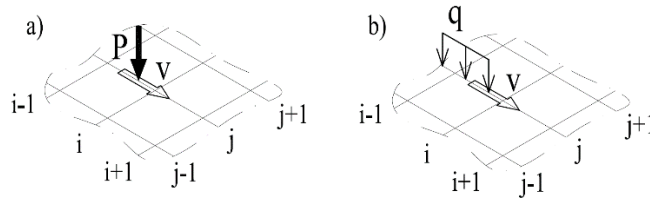
$$\begin{aligned} A &= \frac{15-8\nu-5\nu^2}{2}; & B &= -2(2+\nu)(1-\nu); & C &= \frac{1-\nu^2}{2}; & D &= -2(3-\nu); \\ E &= 2-\nu; & F &= 8-4\nu-3\nu^2 \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.2. Modele obciążeń ruchomych

Wektor obciążenia  $\bar{p}(t)$  występujący w równaniu (4) ma postać:

$$\bar{p}(t) = \begin{bmatrix} p_{1,0} \\ \vdots \\ p_{i,j} \\ \vdots \\ p_{I,J} \end{bmatrix} \quad p_{i,j} = p(x_i, y_j, t) \quad (6)$$

Rozpatrywać będziemy przypadek ruchomej siły skupionej o stałej wartości  $P$  oraz ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego  $q$  poruszającego się wzdłuż linii  $j$  (rys. 3).



Rys. 3. Przypadki obciążenia ruchomego: a) ruchoma siła, b) ruchome obciążenie rozłożone  
Fig. 3. Cases of moving load: a) moving point force, b) moving distributed load

Wyrazy  $p_{i,j}$  wektora (6) w przypadku ruchomej siły skupionej mają postać:

$$\begin{aligned} p_{i-1,j}(t) &= P \frac{t_i - t}{\lambda^2 \Delta t_i}; & p_{i,j}(t) &= P \frac{t - t_{i-1}}{\lambda^2 \Delta t_i}; & j &\neq 0, j \neq J, \\ p_{i-1,j}(t) &= P \frac{t_i - t}{2\lambda^2 \Delta t_i}; & p_{i,j}(t) &= P \frac{t - t_{i-1}}{2\lambda^2 \Delta t_i}; & j &= 0, j = J, \\ p_{r,s}(t) &= 0 \text{ dla } r \neq i, r \neq i-1, s \neq j \end{aligned} \quad (7)$$

natomiast w przypadku ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t) &= q \frac{t - t_{i-1}}{\lambda \Delta t_i}; & j &\neq 0, j \neq J, \\ p_{i,j}(t) &= q \frac{t - t_{i-1}}{2\lambda \Delta t_i}; & j &= 0, j = J, \\ p_{r,s}(t) &= q \text{ dla } r < i, s = j; & p_{r,s}(t) &= 0 \text{ dla } r > i \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie  $\Delta t_i = \frac{\lambda}{v}$ ,  $t_i = i\Delta t_i$ .

### 3. Całkowanie numeryczne równania ruchu

Macierzowe równanie ruchu (4) może zostać rozwiązane numerycznie przy zastosowaniu metody Newmarka dla stałego przyspieszenia [9]. Rozwiązanie polega na podziale czasu przejazdu obciążenia przez płytę na skończoną liczbę  $N$  segmentów czasowych  $\Delta t = L/Nv$ , a następnie wyznaczaniu wartości szukanych funkcji przemieszczeń oraz prędkości w kolejnych krokach całkowania w oparciu o znajomość wartości tych funkcji w kroku poprzednim. Formuły używane w tej metodzie służące wyznaczeniu wektorów przemieszczeń  $\bar{w}(t_n)$  oraz prędkości  $\dot{\bar{w}}(t_n)$  mają postać:

$$\bar{w}(t_{n+1}) = \bar{w}(t_n) + \Delta t \dot{\bar{w}}(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{\bar{w}}(t_n) + \beta(\Delta t)^2 \ddot{\bar{w}}(t_{n+1}) \quad (9)$$

$$\dot{\bar{w}}(t_{n+1}) = \dot{\bar{w}}(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t [\ddot{\bar{w}}(t_n) + \ddot{\bar{w}}(t_{n+1})] \quad (10)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \beta; \quad \beta = \frac{1}{4}; \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

Wektor przyspieszeń nieznan w każdym kroku całkowania wyznaczamy z warunku:

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\bar{w}}(t_{n+1}) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{n+1}) \quad (12)$$

gdzie:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{K} \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}(t_{n+1}) = \mathbf{p}(t_{n+1}) - \mathbf{K}[\bar{w}(t_n) + \Delta t \dot{\bar{w}}(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{\bar{w}}(t_n)] \quad (14)$$

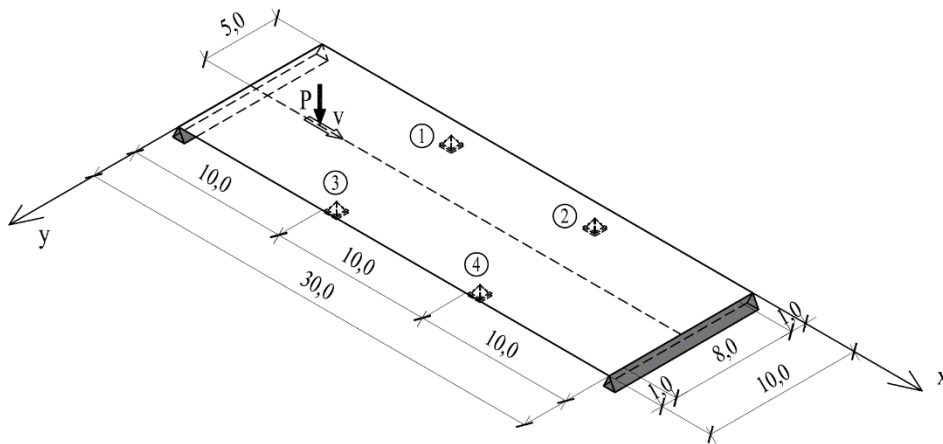
Równanie ruchu (4) rozwiązujemy przy założeniu zerowych warunków początkowych:

$$\bar{w}(t_0 = 0) = \bar{0}; \quad \dot{\bar{w}}(t_0 = 0) = \bar{0} \quad (15)$$

### 4. Przykład numeryczny

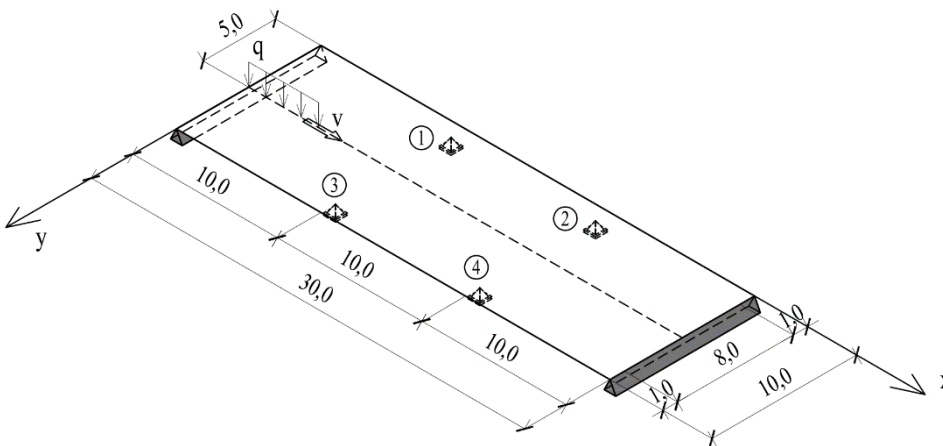
Jako przykład obliczeniowy posłuży prostokątna płyta cienka o wymiarach  $B \times L = 10 \times 30 \text{ m}$  i grubości  $h = 0,4 \text{ m}$ , podparta swobodnie na przeciwległych krótszych krawędziach oraz posiadająca 4 podpory punktowe w swoim obszarze. Płyta wykonana jest z materiału o gęstości równej  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ , modułe Younga  $E = 30\,000 \text{ MPa}$  i współczynnika Poissona  $\nu = 0,2$ . Model dyskretny Metody Różnic Skończonych zbudowano dzieląc obszar płyty siatką dyskretyzacyjną o wymiarach oczka  $\Delta x = \Delta y = \lambda = 1,0 \text{ m}$ . Płyta poddana jest działaniu siły skupionej o wartości  $P = 100 \text{ kN}$  (rys.4) oraz obciążenia liniowego

o stałym natężeniu  $q = 50 \text{ kN/m}$  (rys.5). Oba obciążenia poruszają się wzdłuż dłuższego boku płyty ze stałymi prędkościami  $v = 30 \text{ m/s}$  oraz  $v = 60 \text{ m/s}$ . W dalszych obliczeniach analizowano drgania punktu „A” o współrzędnych  $x_A = 15 \text{ m}$ ;  $y_A = 5 \text{ m}$  jak również deformację całej powierzchni płyty. Całkowanie numeryczne równania ruchu przeprowadzono dzieląc czas przejazdu obciążenia po płycie na  $N = 150$  równych odcinków czasowych. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 6-9. Dla porównania podano również linie wpływu ugięcia statycznego płyty od siły skupionej  $P$  oraz obciążenia rozłożonego  $q$ .



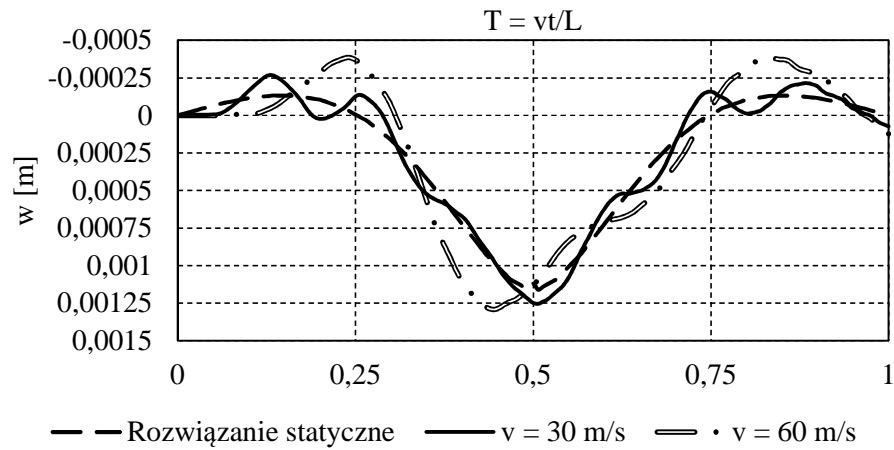
Rys. 4. Cienka płyta mostowa z 4 podporami punktowymi obciążona ruchomą siłą skupioną

Fig. 4. A thin bridge plate with 4 point supports subjected to a moving concentrated force



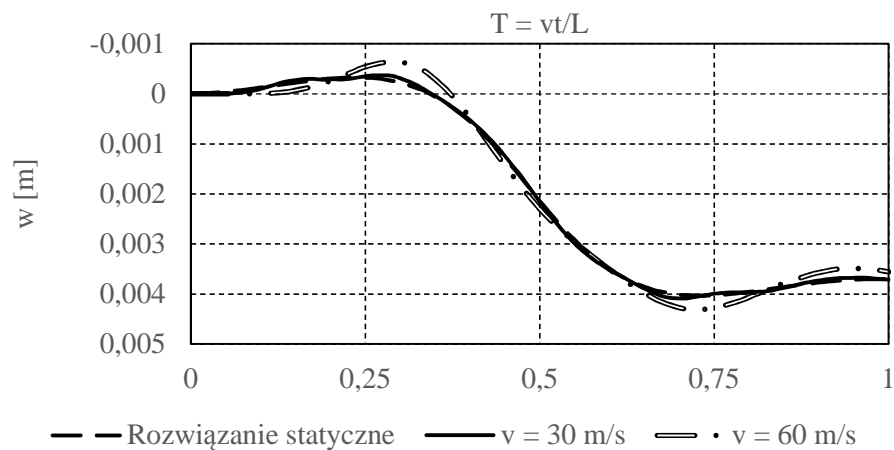
Rys. 5. Cienka płyta mostowa z 4 podporami punktowymi obciążona ruchomym obciążeniem rozłożonym

Fig. 5. A thin bridge plate with 4 point supports subjected to a moving distributed load



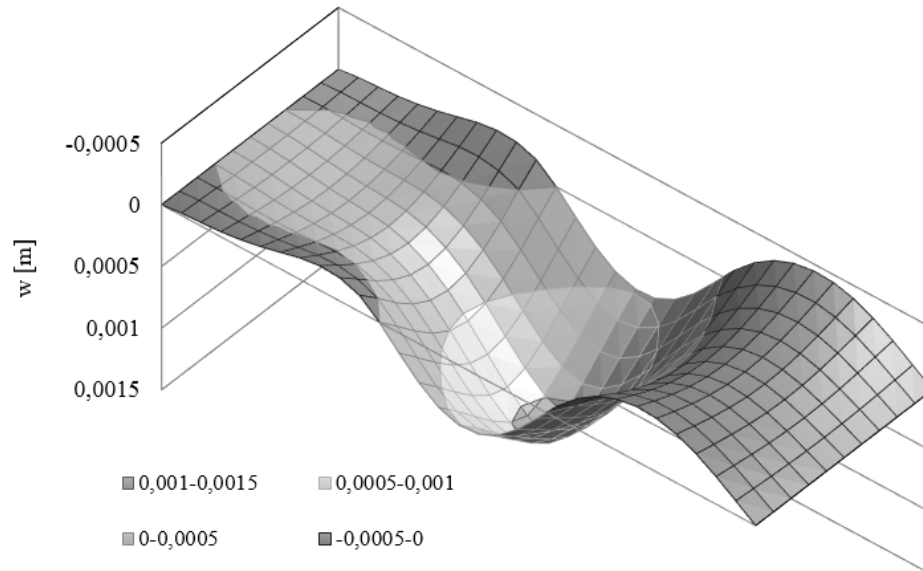
Rys. 6. Ugięcie dynamiczne punktu „A” wywołane ruchomą siłą skupioną

Fig. 6. Dynamic deflection of point “A” resulting from the moving concentrated force



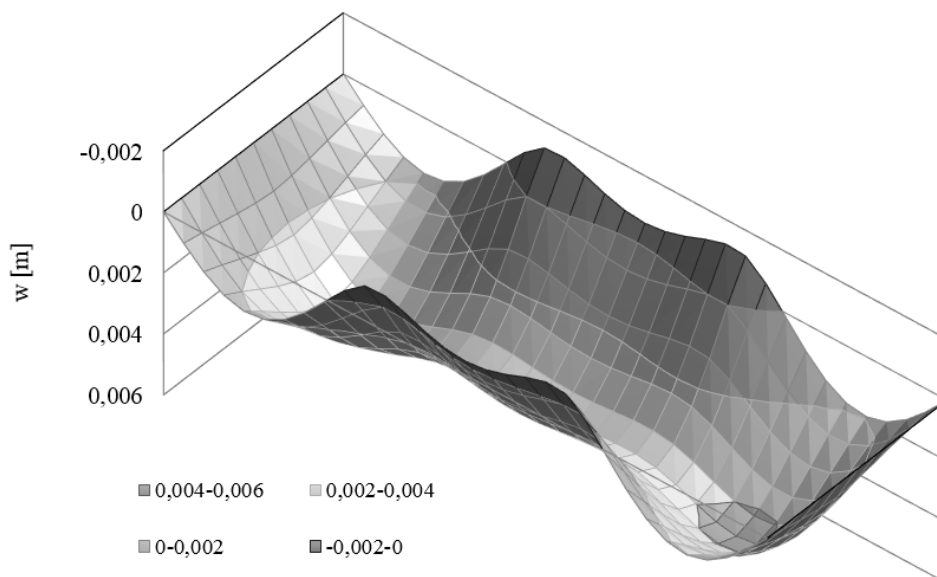
Rys. 7. Ugięcie dynamiczne punktu „A” wywołane ruchomym obciążeniem rozłożonym

Fig. 7. Dynamic deflection of point “A” resulting from the moving distributed load



Rys. 8. Deformacja płyty wywołana ruchomą siłą skupioną w chwili  $T = 0,5$

Fig. 8. Plate deformation resulting from the moving concentrated force at time  $T = 0,5$



Rys. 9. Deformacja płyty wywołana ruchomym obciążeniem rozłożonym w chwili  $T = 1,0$

Fig. 9. Plate deformation resulting from the moving distributed load at time  $T = 1,0$

## 5. Podsumowanie

Metoda Różnic Skończonych może być z powodzeniem zastosowana w analizie drgań cienkich płyt mostowych poddanych działaniu różnego rodzaju obciążeń ruchomych. Zaletą metody jest jej prostota w budowaniu modelu dyskretnego oraz formułowaniu i modyfikowaniu macierzowego równania ruchu. Metodę tą można zastosować również, po wprowadzeniu odpowiednich zmian, w analizie drgań tłumionych (konieczność określenia modelu tłumienia oraz budowy macierzy tłumienia), jak również w analizie drgań wywołanych obciążeniami inercyjnymi. Zastosowanie odpowiednich formuł opisanych m.in. w [8] pozwoli zastosować Metodę Różnic Skończonych przy bardziej skomplikowanych układach, takich jak płyty o nieregularnym kształcie, zmiennej sztywności giętej czy też płyty spoczywające na podłożu sprężystym. Prezentowana metoda może znaleźć zastosowanie jako metoda weryfikacyjna dla rozwiązań analitycznych, a także innych metod numerycznych takich jak Metoda Elementów Skończonych.

## Literatura

- [1] Fryba L.: *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Telford, London 1999.
- [2] Leissa A.W.: *Vibrations of Plates*, US Government Printing Office, Washington DC 1969.
- [3] Szcześniak W.: *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
- [4] Timoshenko S.P.: *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill, New York 1959.
- [5] Zhu X.Q., Law S.S.: Dynamic behavior of orthotropic rectangular plates under moving loads, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 129, no. 1, 2003, pp. 79-87.
- [6] Zakęś F., Śniady P.: Application of Volterra integral equations in dynamics of multi-span continuous beams subjected to a moving load, *Shock and Vibrations*, vol. 2016.
- [7] Zakęś F.: Vibrations of point-supported rectangular thin plate subjected to a moving force, *Engineering Transactions*, vol. 64, no. 4, 2016 pp. 409-415.
- [8] Kączkowski Z.: *Płyty – obliczenia statyczne*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1980.
- [9] Newmark N.M.: A method of computation for structural dynamics, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 1959; EM3: pp. 67-95.

## APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD IN DYNAMICS OF THIN BRIDGE PLATES SUBJECTED TO MOVING LOADS

### Summary

This paper presents solution of problem of undamped vibrations of thin rectangular bridge plate subjected to a non-inertial load moving with constant velocity. In order to spatial discretiza-

tion of the plate numerical procedures have been applied as well as formulas of Newmark method applied to discretize time of the load movement. Formulas required to build and solve matrix equation of motion have been given as well as formulas for load vectors corresponding with two cases of moving load namely the case of moving constant force and the case of moving distributed load. A numerical example of a bridge plate with 4 point supports subjected to 2 types of moving load has been presented in order to show the efficiency of the method.

**Keywords:** Finite Difference Method, moving load, thin plate, Newmark Method

*Przesłano do redakcji: 13.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Piotr FEDELIŃSKI<sup>1</sup>

## DYNAMICALLY LOADED BRANCHED AND INTERSECTING CRACKS

The boundary element method (BEM) is applied to analysis of statically and dynamically loaded plates with branched and intersecting cracks. The numerical solution is obtained by discretization of external boundaries and crack surfaces using quadratic three-node boundary elements. The problem of coincident crack boundaries is solved by the dual BEM in which for nodes on crack surfaces simultaneously the displacement and the traction boundary integral equations are applied. The dynamic problem is solved by using the Laplace transform method and the solution in the time domain is computed by the Durbin numerical inversion method. The Laplace transform method gives very stable and accurate results and requires small computer memory. Static stress intensity factors (SIF) are computed by the path independent J-integral and dynamic SIF by the crack opening displacement (COD) method. Numerical examples of a branched crack in a rectangular plate and a star-shaped crack in a square plate are presented. Static SIF are compared with available results presented in literature showing good agreement. The maximum dynamic SIF are approximately two times larger than the corresponding static SIF. The influences of angles between branches of the crack and dimensions of the plate for the star-shaped crack on dynamic SIF are analyzed.

**Keywords:** fracture, stress intensity factor (SIF), boundary element method (BEM), Laplace transform method

### 1. Introduction

Branched and intersecting cracks may appear in a plate because of defects in the material or damage during the service life of the component. The stress state in the vicinity of the crack tips are characterized by stress intensity factors (SIF). The values of SIF decide about possible growth of the cracks.

Single branched or intersecting cracks in finite or infinite plates statically loaded were analyzed in several works. Cheung et al. [1] formulated the stress functions, which consists of two parts: a solution of the Fredholm integral equation for the crack problem in an infinite plate and the weighted residual

---

<sup>1</sup> Corresponding author / autor do korespondencji: Piotr Fedeliński, Silesian University of Technology, Konarskiego 18A, 44-100 Gliwice, Poland; phone: 48 32 237 1635; Piotr.Fedeliński@polsl.pl



method for a general plane problem. The method was applied to crucifix cracks, two perpendicular cracks and star-shaped cracks in finite plates. Isida i Noguchi [2] presented the analysis based on the body force method combined with the perturbation procedure which gives the stress intensity factors by the power series formulae. Numerical results for various symmetrical and unsymmetrical branched cracks under three fundamental loadings at infinity are presented. Chen and Hasebe [3] applied a point dislocation at the branch point and distributed dislocations along the branches. Next they formulated a singular integral equation to solve the branch crack problem. The method was applied to star-shaped cracks, symmetric branched cracks and two intersecting cracks. Daux et al. [4] presented the extended finite element method (X-FEM) to analysis of cracks with multiple branches and cracks emanating from holes. A standard displacement approximation was enriched by incorporating additional discontinuous functions. The method allows the modelling of discontinuities independently of the mesh. Tan et al. [5] developed the method in which the original crack problem is decomposed into two problems, and the hybrid boundary node method is used to model the finite domain of the body without a crack and the displacement discontinuity method to analyze the crack. The results are added and compared with the boundary conditions of the original problem. The method was applied to a branched crack and star-shaped crack in a finite plate. The analysis of branched and intersecting stationary cracks subjected to dynamic loads has not been presented in the literature.

In the present work the boundary element method (BEM) is applied to analysis of statically and dynamically loaded branched and intersecting cracks in finite plates. The crack problem is solved by the dual BEM which was developed for static loading by Portela et al. [6] and for dynamic loading by Fedeliński et al. [7]. An overview of different BEM approaches in dynamic fracture mechanics was presented by Fedeliński [8], [9], [10]. In this work the Laplace transform method is applied to analysis of a branched crack in a rectangular plate and a star-shaped crack in a square plate. The influence of geometry of cracked plates on dynamic stress intensity factors is analyzed.

## 2. Laplace transform boundary element method

Consider a homogeneous and isotropic linear elastic body enclosed by a boundary  $\Gamma$ . For a body which is not subjected to body forces and which has zero initial displacements and velocities, the Laplace transform of the displacements of points  $x'$  and  $x''$  on smooth crack surfaces, can be represented by the following boundary integral equation [7]

$$\frac{1}{2}\bar{u}_i(x',s) + \frac{1}{2}\bar{u}_i(x'',s) = \int_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(x',x,s)\bar{t}_j(x,s)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(x',x,s)\bar{u}_j(x,s)d\Gamma(x) \quad (1)$$

where  $\bar{U}_{ij}(x',x,s)$ ,  $\bar{T}_{ij}(x',x,s)$  are the Laplace transforms of fundamental solutions of elastodynamics [9],  $\bar{u}_j(x,s)$ ,  $\bar{t}_j(x,s)$  are the Laplace transforms of the displacements and tractions respectively, at the boundary,  $s$  is the integral transform parameter.

The Laplace transform of the traction equation for points which belong to smooth crack surfaces is

$$\frac{1}{2}\bar{t}_j(x',s) - \frac{1}{2}\bar{t}_j(x'',s) = n_i(x') \left[ \int_{\Gamma} \bar{U}_{kij}(x',x,s)\bar{t}_k(x,s)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \bar{T}_{kij}(x',x,s)\bar{u}_k(x,s)d\Gamma(x) \right] \quad (2)$$

where  $\bar{U}_{kij}(x',x,s)$  and  $\bar{T}_{kij}(x',x,s)$  are the Laplace transforms of other fundamental solutions of elastodynamics [9].

The numerical solution of a general mixed-mode crack problem is obtained after discretizing boundary quantities. The boundary  $\Gamma$  of the body is divided into boundary elements. Quadratic elements are used for the discretization of the boundary. The displacements and tractions are interpolated using: continuous elements for the external boundary and discontinuous elements on the crack faces. Displacements and tractions are approximated within each element using interpolation functions. A distinct set of boundary integral equations is obtained by applying the displacement equation for nodes along the external boundary and along the crack and the traction equation for the nodes along the crack. The set of discretized boundary integral equations can be written in matrix form as

$$\bar{H}\bar{u} = \bar{G}\bar{t} \quad (3)$$

where  $\bar{u}$  and  $\bar{t}$  contain nodal values of the transformed displacements and tractions respectively, and  $\bar{H}$  and  $\bar{G}$  depend on integrals of the transformed fundamental solutions and the interpolating functions. The matrices  $\bar{H}$  and  $\bar{G}$  are reordered according to the boundary conditions to give new matrices  $\bar{A}$  and  $\bar{B}$ . The matrix  $\bar{A}$  is multiplied by the vector  $\bar{x}$  of unknown transformed displacements and tractions and  $\bar{B}$  by the vector  $\bar{y}$  of the known transformed boundary conditions, as follows

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{B}\bar{y} \quad (4)$$

or

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{f} \quad (5)$$

where  $\bar{f} = \bar{B}\bar{y}$  is a known vector. The matrix equation (5) is solved giving the unknown transformed displacements and tractions for a particular integral transform parameter. For a simple temporal variation of the prescribed boundary conditions their integral transforms can be calculated analytically. In order to obtain the unknown displacements and tractions as functions of time, the unknown transformed variables must be computed for a series of parameters. The final time-dependent solution can be obtained from the numerical Durbin inversion.

### 3. Numerical examples

Two numerical examples are considered: a branched crack in a rectangular plate and a star-shaped crack in a square plate. The material of the plate has the following material properties: the Young modulus  $E=200$  GPa, the Poisson ratio  $\nu=0.3$ , mass density  $\rho=8000$  kg/m<sup>3</sup> and the plate is in the plain strain conditions. The plates are loaded by the Heaviside time dependent uniformly distributed tractions  $p$  applied at the initial time  $t=0$ . The numerical solution is obtained using 50 Laplace parameters and the time step  $\Delta t=0.2$   $\mu$ s. Static SIF are computed using the path independent J-integral and the dynamic SIF using crack opening displacements.

#### 3.1. Branched crack in a rectangular plate

The horizontal branch has the length  $a$  and the branches of length  $b$  are inclined at the angle  $\alpha=\pi/4$  rad, as shown in Fig. 1a. It is assumed that the branches are equal  $a=b=1$  cm. The crack is in the center of a rectangular plate of width  $2w$  and the height  $2h$  and the ratio of dimensions is  $h/w=4/5$  and  $a/w=0.5$ . Two horizontal edges of the plate are loaded in the vertical direction. The plate is divided into 140 boundary elements (80 for the external boundary and 10 for each crack edge). The stress intensity factors are normalized with respect to the SIF  $K_o = p\sqrt{\pi c}$ , where  $2c$  is the width of the crack in the horizontal direction.

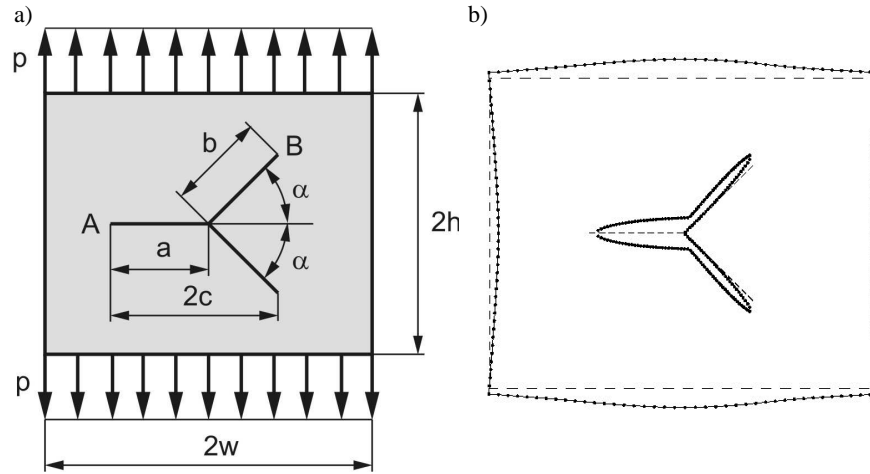


Fig. 1. Branched crack in a rectangular plate: (a) dimensions of the plate and loading, (b) initial (dashed line) and deformed shape (continuous line) of the plate

Rys. 1. Pęknięcie rozgałęzione w tarczy prostokątnej: (a) wymiary tarczy i obciążenie, (b) początkowy (linia przerywana) i odkształcony kształt tarczy (linia ciągła)

Initially the plate is subjected to the static loading. The computed normalized SIF for the crack tips *A* and *B* are presented in Table 1 and compared with the results published by Daux et al. [4] who used the extended finite element method (X-FEM). The agreement of the results is satisfactory. In Fig. 1b the initial and the deformed shape are shown.

Table 1. Static normalized stress intensity factors

Tabela 1. Statyczne znormalizowane współczynniki intensywności naprężeń

SIF	$K_I/K_o (A)$	$K_I/K_o (B)$	$K_{II}/K_o (B)$
present	1.555	0.770	0.806
Daux et al. [4]	1.368	0.634	0.723

The normalized dynamic stress intensity factors for the crack tips *A* and *B* are presented in Fig. 2. Initially when the longitudinal wave travels from the loaded boundary to the crack tips the DSIF are zero. The DSIF for the crack tip *A* are larger than for the crack tip *B*. The maximum values of dynamic DSIF are approximately two times larger than the corresponding static values of SIF.

The influence of the angle  $\alpha$  between crack branches on the normalized DSIF at the crack tip *B* is shown in Fig. 3. The DSIF are calculated for three angles  $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3$  rad. The DSIF  $K_I/K_o$  decrease with increasing angle  $\alpha$  and  $K_{II}/K_o$  increase.

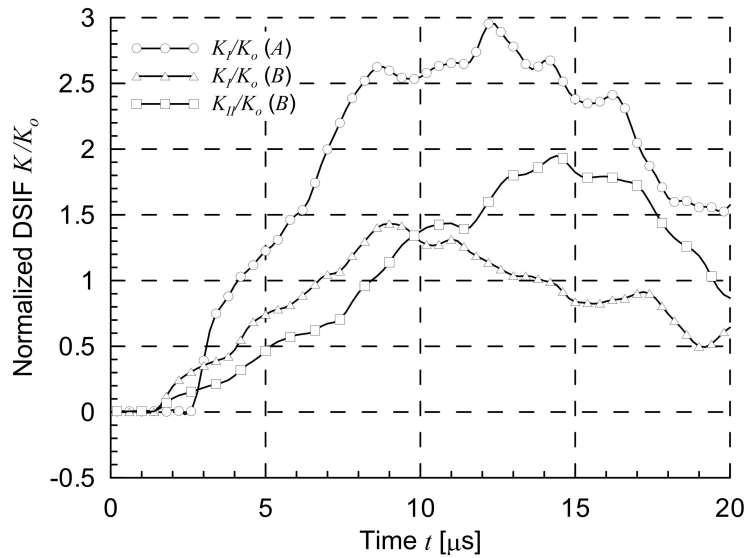


Fig. 2. Normalized dynamic stress intensity factors for the branched crack in a rectangular plate

Rys. 2. Znormalizowane dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń pęknięcia rozgałęzionego w tarczy prostokątnej

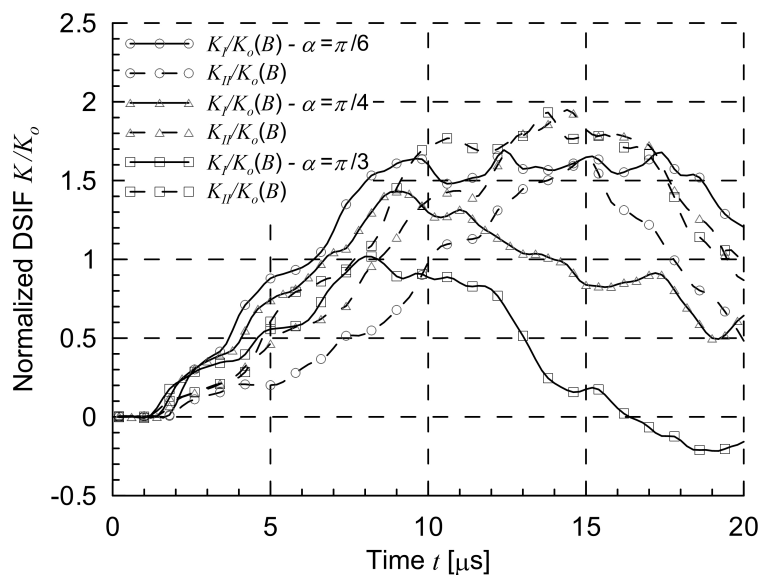


Fig. 3. Influence of the angle  $\alpha$  between the crack branches on the normalized dynamic stress intensity factors at the crack tip  $B$  for the branched crack in a rectangular plate

Rys. 3. Wpływ kąta  $\alpha$  między pęknięciami na znormalizowane dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku  $B$  pęknięcia rozgałęzionego w tarczy prostokątnej

### 3.2. Star-shaped crack in a square plate

The branches of the star-shaped crack have the length  $a$  and the branches are inclined at the angle  $\alpha=\pi/3$  rad, as shown in Fig. 4a. It is assumed that the branches are equal  $a=1$  cm. The crack is in the center of a square plate of width  $2w$  and the ratio of dimensions is  $a/w=0.5$ . The plate is subjected to biaxial tension. The plate is divided into 200 boundary elements (80 for the external boundary and 10 for each crack edge). The stress intensity factors are normalized with respect to the SIF  $K_o = p\sqrt{\pi a}$ .

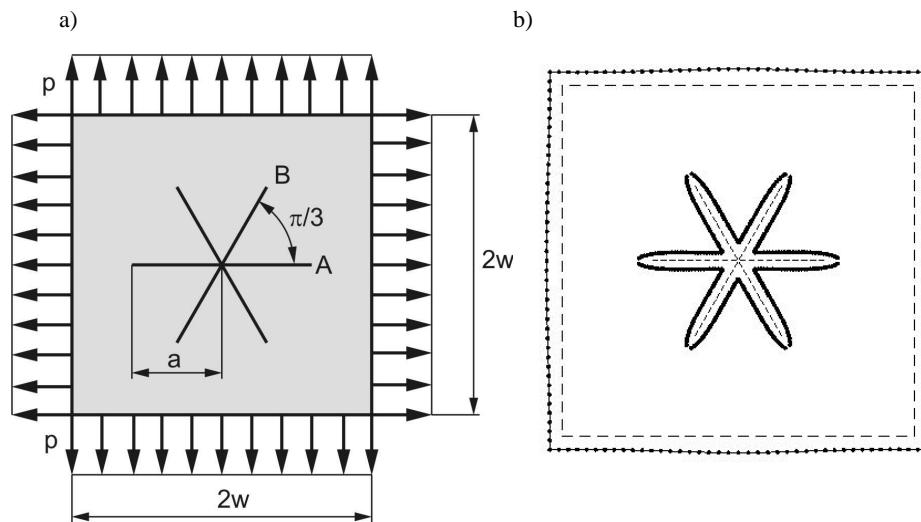


Fig. 4. Star-shaped crack in a square plate: (a) dimensions of the plate and loading, (b) initial (dashed line) and deformed shape (continuous line) of the plate

Rys. 4. Pęknięcie gwiaździste w tarczy kwadratowej: (a) wymiary tarczy i obciążenie, (b) początkowy (linia przerywana) i odkształcony kształt tarczy (linia ciągła)

Initially the plate is subjected to the static loading. The computed normalized SIF for the crack tips  $A$  and  $B$  are presented in Table 2 and compared with the results published by Daux et al. [4] who used the extended finite element method (X-FEM) and Cheung et al. [1], who used the Fredholm integral equation method and the weighted residual method. The agreement of the results is very good. In Fig. 4b the initial and the deformed shape are shown.

Table 2. Static normalized stress intensity factors

Tabela 2. Statyczne znormalizowane współczynniki intensywności naprężeń

SIF	$K_I/K_o (A)$	$K_I/K_o (B)$	$K_{II}/K_o (B)$
present	0.898	0.928	0.020
Daux et al. [4]	0.893	0.921	0.017
Cheung et al. [1]	0.885	0.909	0.017

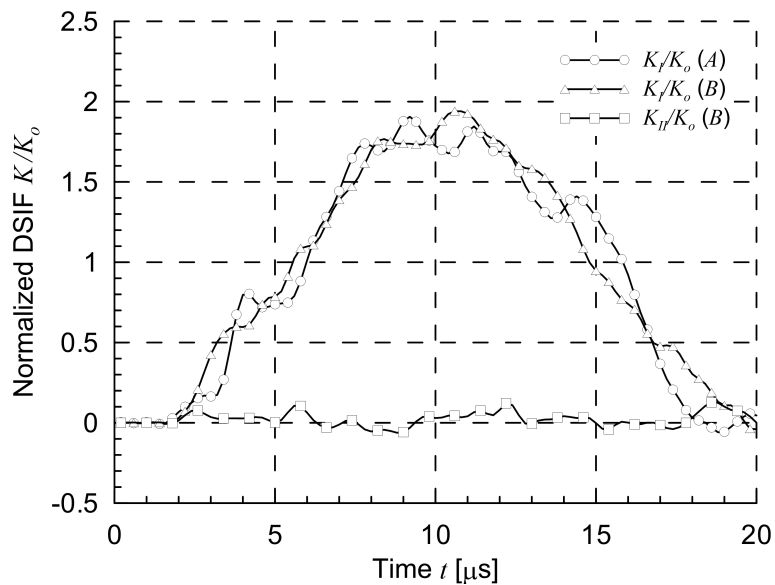


Fig. 5. Normalized dynamic stress intensity factors for the star-shaped crack in a square plate

Rys. 5. Znormalizowane dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń pęknięcia gwiazdzystego w tarczy kwadratowej

The normalized dynamic stress intensity factors for the crack tips  $A$  and  $B$  are presented in Fig. 5. Initially when the longitudinal wave travels from the loaded boundary to the crack tips the DSIF are zero. The DSIF  $K_I/K_o$  for the crack tips  $A$  and  $B$  have similar time dependence. The DSIF for the crack tip  $B$   $K_{II}/K_o$  are much smaller than  $K_I/K_o$ . The maximum values of dynamic DSIF are approximately two times larger than the corresponding static values of SIF.

The influence of the dimension of the plate  $w$  on normalized DSIF at the crack tip  $A$  is shown in Fig. 6. The DSIF are calculated for three different dimensions of the plate  $w/a = 2, 3, 4$  and  $a=1$  cm. When the dimension of the plate is large the longitudinal wave arrives late at the crack tip. The time dependence and the maximum value of DSIF after the arrival of the wave at the crack tip is similar for different dimensions of the plate.

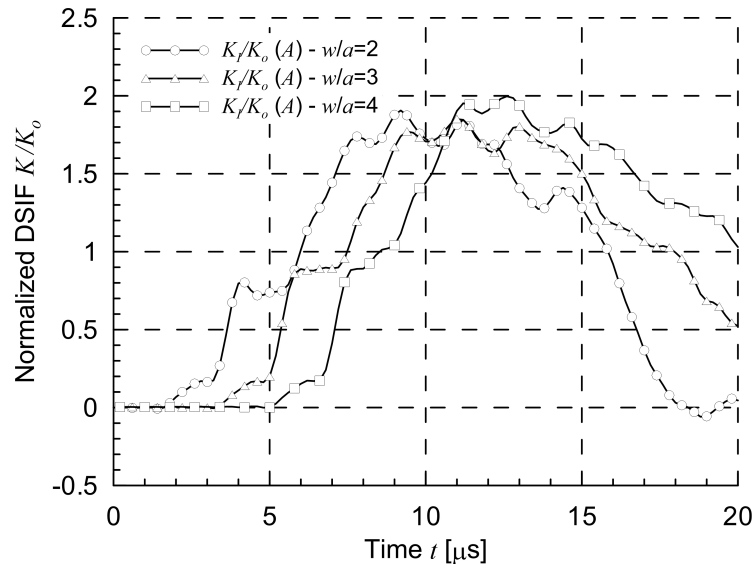


Fig. 6. Influence of the dimension of the plate  $w$  on normalized dynamic stress intensity factors at the crack tip  $A$  for the star-shaped crack in a square plate

Rys. 6. Wpływ wymiaru tarczy  $w$  na znormalizowane dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku  $A$  pęknięcia gwiazdzistego w tarczy kwadratowej

#### 4. Conclusions

The numerical examples demonstrate that the SIF for static loading obtained by the BEM agree well with the available results presented in literature. The solutions obtained by the Laplace transform BEM are stable. The maximum values of dynamic SIF are about two times larger than the static SIF.

**Acknowledgement:** The scientific research is financed by National Science Centre, Poland in years 2016-2019, grant no. 2015/19/B/ST8/02629.

#### Literature

- [1] Cheung Y. K., Woo C. W., Wang Y. H.: A general method for multiple crack problems in a finite plate, *Computational Mechanics*, vol. 10, 1992, pp. 335-343.
- [2] Isida M., Noguchi H.: Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings, *International Journal of Fracture*, vol. 54, 1992, pp. 293-316.
- [3] Chen Y. Z., Hasebe N.: New integration scheme for the branch crack problem, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 52, 1995, pp. 791-801.
- [4] Daux Ch., Moes N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T.: Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, 2000, pp. 1741-1760.



- [5] Tan F., Zhang Y., Li Y.: An improved hybrid boundary node method for 2D crack problems, Archives of Applied Mechanics, vol. 85, 2015, pp. 101-116.
- [6] Portela, A., Aliabadi, M. H., Rooke, D. P.: The dual boundary element method: effective implementation for crack problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, 1992, pp. 1269-1287.
- [7] Fedeliński, P., Aliabadi, M. H., Rooke, D.P.: The Laplace transform DBEM method for mixed-mode dynamic crack analysis, Computers and Structures, vol. 59, 1996, pp. 1021-1031.
- [8] Fedeliński P.: Boundary element method in dynamic analysis of cracks, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 28, 2004, pp. 1135-1147.
- [9] Fedeliński P.: The boundary element method in dynamic analysis of deformable structures with cracks, Scientific Papers of the Silesian University of Technology, Mechanics, vol. 137, Gliwice 2000 (in Polish).
- [10] Fedeliński P.: Boundary element method in dynamics of deformable structures, Scientific Papers of the Silesian University of Technology, Mechanics, vol. 622, Gliwice 2016 (in Polish).

## ROZGAŁĘZIONE I PRZECINAJĄCE SIĘ PĘKNIĘCIA OBCIĄŻONE DYNAMICZNIE

### Streszczenie

Metodę elementów brzegowych (MEB) zastosowano do analizy obciążonych statycznie i dynamicznie tarcz z pęknięciami rozgałęzionymi i przecinającymi się. Rozwiązanie numeryczne otrzymano w wyniku dyskretyzacji brzegów zewnętrznych tarczy i krawędzi pęknięć z zastosowaniem kwadratowych trójwęzłowych elementów brzegowych. Zastosowano sformułowanie dualne MEB do analizy pokrywających się krawędzi pęknięcia, w którym stosuje się jednocześnie dla węzłów pęknięcia brzegowe równanie całkowe przemieszczeń i sił powierzchniowych. Zagadnienie dynamiczne analizowano metodą transformacji Laplace'a, a rozwiązanie w dziedzinie czasu wyznaczono metodą numerycznej transformacji odwrotnej Durbina. Metoda transformacji Laplace'a pozwala na wyznaczenie stabilnego i dokładnego rozwiązania i wymaga małej pamięci komputerowej. Statyczne współczynniki intensywności naprężeń (WIN) obliczono za pomocą J-całki niezależnej od konturu całkowania, a dynamiczne WIN na podstawie rozwarcia krawędzi pęknięcia. Przedstawiono przykłady numeryczne rozgałęzionego pęknięcia w tarczy prostokątnej i pęknięcia gwiazdzystego w tarczy kwadratowej. Statyczne WIN porównano z wynikami dostępnymi w literaturze, wykazując dobrą zgodność rozwiązań. Maksymalne wartości dynamicznych WIN są około dwukrotnie większe niż odpowiednie statyczne WIN. Badano wpływ kąta między pęknięciami rozgałęzionymi i wielkości tarczy z pęknięciem gwiazdzystym na dynamiczne WIN.

**Słowa kluczowe:** pękanie, współczynnik intensywności naprężeń (WIN), metoda elementów brzegowych (MEB), metoda transformacji Laplace'a

*Przesłano do redakcji: 13.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Dariusz ROZUMEK<sup>1</sup>  
Roland PAWLICZEK<sup>2</sup>  
Janusz LEWANDOWSKI<sup>3</sup>

## STANOWISKO DO BADAŃ ZMĘCZENIOWYCH MATERIAŁÓW PRZY ZGINANIU ZE SKRĘCANIEM

W pracy zaprezentowano budowę, zasadę działania i pomiary na maszynie wytrzymałościowej do badań zmęczeniowych. Maszyna przeznaczona jest do badań zmęczeniowych próbek z materiałów konstrukcyjnych pracujących przy cyklicznie zmiennych obciążeniach zginających, skręcających i proporcjonalnym zginaniu ze skręcaniem. Można zadawać obciążenia z zerową lub różną od zera wartością średnią momentu. W pracy przedstawiono przykładowe pomiary statyczne i cykliczne na dźwigni maszyny i badanej próbce dotyczące cechowania stanowiska przy zginaniu i skręcaniu oraz wpływu wartości średniej obciążenia.

**Słowa kluczowe:** cechowanie maszyny, pomiary odkształceń, badania cykliczne, wartość średnia

### 1. Wprowadzenie

W przemyśle większość pracujących maszyn podlega wpływom różnych drgań, co mocno oddziałuje na dynamikę maszyny [1]. Z reguły drgania te są niepożądane i wpływają niekorzystnie na konstrukcję powodując powstawanie pęknięć w materiale, co w ostateczności prowadzi do zniszczenia urządzenia. Niektóre konstrukcje jednakże realizują zadania wykorzystując powstawanie drgań, np. wstrząsarki, przesiewacze, urządzenia do zagęszczania gruntu. Znajomość zależności kinematycznych i dynamicznych w takich urządzeniach jest zagadnieniem kluczowym przy projektowaniu i określaniu warunków pracy urządzenia.

Celem pracy jest przedstawienie maszyny zmęczeniowej na zginanie ze skręcaniem, procedury związanej z przygotowaniem stanowiska do badań i określenia dynamiki stanowiska w czasie badania próbek materiału.

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Dariusz Rozumek, Politechnika Opolska, Katedra Mechaniki i PKM, ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole; tel. 774498410; d.rozumek@po.opole.pl

<sup>2</sup> Roland Pawliczek, Politechnika Opolska, Katedra Mechaniki i PKM, ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole; tel. 774498404; r.pawliczek@po.opole.pl

<sup>3</sup> Janusz Lewandowski, Politechnika Opolska, Katedra Mechaniki i PKM, ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole; tel. 604585204; janusz210@wp.pl

## 2. Opis procedury badawczej

### 2.1. Maszyna do badań zmęczeniowych

Badania dynamiki maszyny i rozwoju pęknięć zmęczeniowych przy kombinacji zginania ze skręcaniem prowadzono na maszynie MZGS-100 [2, 3] umożliwiającej realizację przebiegów cyklicznie zmiennych obciążeń zginania, skręcania i proporcjonalnego zginania ze skręcaniem. Występująca podczas badań, siła tnąca ma bardzo małe wartości, które wynoszą poniżej 2% maksymalnego momentu zginającego. Schemat maszyny przedstawiono na rys. 1. Obciążenie próbki pokazane na rys. 1 składa się ze statycznego i cyklicznie zmiennego momentu; stan naprężenia uzależniony jest od kąta ustawienia głowicy obrotowej (rys. 1, pozycja 3) na maszynie MZGS-100. W skład urządzenia wchodzi zespół napędowy, ustalający i mocujący próbkę, obciążający i kontrolno-pomiarowy. Zespół napędowy składa się z silnika (9), zamocowanego na podstawie (5), który za pomocą paska (14) napędza tarczę wirującą (11). Silnik sterowany jest układem falownika napięcia (7), który umożliwia regulację częstotliwości zmiany obciążenia i jej stabilizację na poziomie około 29 Hz, płynny rozruch i wyłączenie silnika w momencie pęknięcia próbki. Układ (7) umożliwia także pomiar liczby cykli i zmian obciążenia od początku do końca trwania próby. Zespół mocujący składa się z podstawy (4) z zamocowaną na niej głowicą obrotową (3). W górnej części głowicy występuje zacisk (2), mocujący jeden koniec próbki (1). Drugi koniec próbki mocowany jest w uchwycie (6), połączonym przegubowo z dźwignią (8). Głowica (3) może być ustawiona pod dowolnym kątem w zakresie  $\alpha = 0 \div \pi/2$  [rad]. Dźwignia (8) i cięgno (10) łączą zespół mocujący z zespołem obciążającym. Zespół obciążający to tarcza wirująca (11) osadzona na płaskich sprężynach (12). Do tarczy mocowane są ciężarki (13) wywołujące niewyrównoważenie ruchu tarczy. Obciążenie następuje na skutek ruchu dźwigni w płaszczyźnie pionowej, wywołanego siłami niewyrównoważonego ciężarka (13) na tarczy wirującej (11). Do podstawy (5) przymocowany jest siłownik sprężynowy (15), który umożliwia zadawanie średniej wartości obciążenia poprzez odpowiednie ugięcie sprężyny (16) siłownika. Siłownik jest sprzężony z dźwignią (8) poprzez cięgno (17) i obciąża ją dodatkową, stałą siłą. Obciążenie próbki składa się ze statycznego i cyklicznie zmiennego momentu

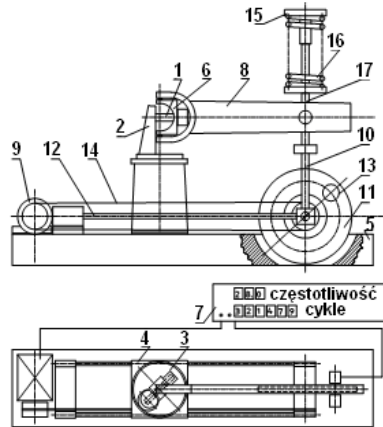
$$M(t) = M_m + M_a \sin \omega t \quad (1)$$

gdzie:  $M_m$  – moment średni [N·m],

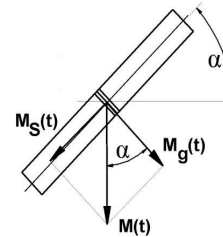
$M_a$  – amplituda momentu [N·m],

$\omega_n$  – częstość kołowa [ $s^{-1}$ ],

$t$  – czas [h].



Rys. 1. Schemat maszyny zmęczeniowej MZGS-100  
Fig. 1. Fatigue test stand MZGS-100



Rys. 2. Schemat obciążenia próbki  
Fig. 2. Loading of the specimen

Stan naprężenia uzależniony jest od kąтового ustawienia głowicy obrotowej (rys. 2). Wartości momentów skręcającego  $M_s(t)$  i zginającego  $M_g(t)$  są związane następującymi zależnościami [3]

$$\overline{M}(t) = \overline{M}_s(t) + \overline{M}_g(t), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_s(t)}{M_g(t)} \quad (2)$$

W położeniach pośrednich  $0 < \alpha < \pi/2$  [rad], występują obydwaj momenty jednocześnie i ich wartości określano z zależności:

$$\begin{aligned} M_{g\alpha}(t) &= (M_m + M_a \sin \omega t) \cos \alpha, \\ M_{s\alpha}(t) &= (M_m + M_a \sin \omega t) \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Rezultatem działania obydwu zsynchronizowanych momentów jest stan naprężenia, w którym nominalne naprężenia normalne  $\sigma_\alpha(t)$  i styczne  $\tau_\alpha(t)$  zmieniają swoje wartości zgodnie w fazie i z jednakową częstością kątową  $\omega_n$ .

## 2.2. Cechowanie maszyny

Przed wykonaniem badań należy określić jakie wartości sił obciążających odpowiadają stosowanym układom ciężarków [4]. Metoda cechowania statycznego stanowiska polega na ustaleniu zależności między wartościami odkształceń na dźwigni i na próbce, a wartościami obciążenia wzorcowego, tj. ciężarkami o znanej masie zawieszonymi na dźwigni. W przypadku pomiaru odkształceń na dźwigni maszyny (rys. 3) zastosowano układ tensometrów w pełnym mostku. Do pomiarów odkształceń dźwigni użyto tensometrów typu TFs-5, natomiast do pomiarów odkształceń na próbce używano tensometrów TF1 produkcji TENMEX. Dźwignia maszyny posiada dużą sztywność w związku z tym wystę-

puje liniowa zależność odkształcenia w szerokim zakresie obciążenia. Cechowanie maszyny na podstawie sygnału z dźwigni pozwala określić naprężenia nominalne w badanej próbce. Cechowanie dla zginania wykonano według algorytmu:

- **Wyznaczenie statycznej charakterystyki stanowiska.** Dźwignia stanowiska została obciążona zestawem wzorcowych ciężarków. Za pomocą mostka tensometrycznego odczytano wartości odkształceń pojawiających się na dźwigni i próbce dla poszczególnych układów ciężarków. Na podstawie odczytanych odkształceń zbudowano wykres i określono krzywą cechowania dla dźwigni i próbki.
- **Określenie częstotliwości rezonansowej maszyny.** Po zamocowaniu próbki przegubowej w uchwycie maszyny i obciążeniu tarczy wirującej ciężarkiem o małej masie, zwiększano częstotliwość obrotów tarczy i obserwowano drgania dźwigni maszyny. Z chwilą osiągnięcia częstotliwości rezonansowej amplituda drgań dźwigni maszyny osiąga wartość maksymalną.
- **Cechowanie dynamiczne stanowiska.** Dynamiczne cechowanie maszyny wykonano poprzez pomiar amplitudy odkształcenia dźwigni i próbki podczas pracy stanowiska. Wartość amplitudy odkształcenia przeliczono na obciążenie wykorzystując krzywą cechowania dźwigni. W ten sposób można określić wartość obciążenia odpowiadającego danemu zestawieniu ciężarków. Aby wyliczyć wartość obciążenia dla układu ciężarków należy sumować algebraiczne wartości obciążenia wyznaczone dla poszczególnych ciężarków.
- **Pomiar odkształcenia w czasie pracy stanowiska.** Wyżej opisany układ pomiarowy wyposażony dodatkowo w komputer i kartę pomiarową pozwala na rejestrację przebiegów zmian odkształceń na dźwigni i próbce w czasie trwania badań doświadczalnych. Wykonując takie pomiary można określić krzywą cyklicznego odkształcenia próbki.

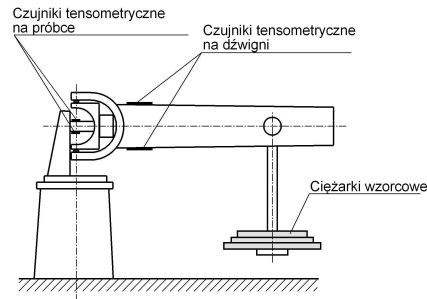
### 2.3. Badany materiał i próbka

Materiałem z którego zostały wykonane próbki była stal 10HNAP. Właściwości statyczne badanej stali podano w tabeli 1 [3]. Próbki zostały wycięte z blachy o grubości 16 mm zgodnie z kierunkiem walcowania. Kształt i wymiary próbek przyjętych do badań pokazano na rys. 4.

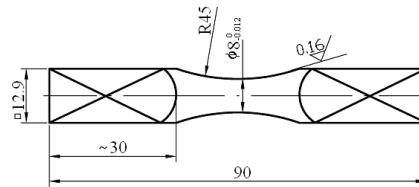
Tabela 1. Właściwości statyczne stali 10HNAP

Table 1. Static properties of 10HNAP steel

Granica plastyczności $R_e$ [MPa]	Wytrzymałość na rozciąganie $R_m$ [MPa]	Moduł Younga $E$ [GPa]	Współczynnik Poissona $\nu$ [-]	Wydłużenie względne $A_{10}$ [%]
418	566	215	0,29	35,7



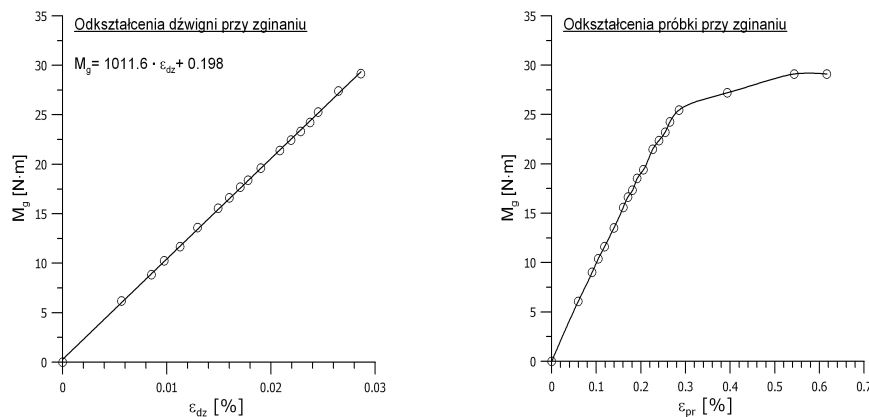
Rys. 3. Schemat układu cechowania maszyny  
Fig. 3. Scheme of calibration machines



Rys. 4. Kształt i wymiary próbek  
Fig. 4. Shape and dimensions of specimen

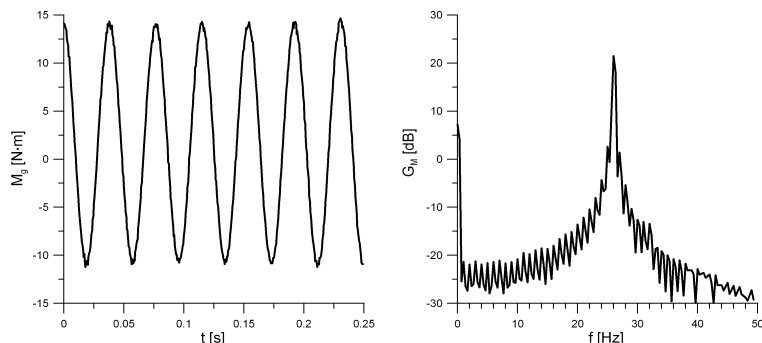
### 3. Wyniki badań i ich analiza

Wyniki cechowania statycznego i pomiarów odkształceń dla dźwigni maszyny oraz próbki przy zginaniu i skręcaniu pokazano na rys. 5 i 6. Z pomiarów wynika, że w przypadku dźwigni punkty pomiarowe układają się w linii prostej, co świadczy o dużej sztywności układu. Zbliżone też są parametry równań regresji dla zginania i skręcania. W przypadku próbek zaobserwowano pojawienie się odkształceń plastycznych na poziomie obciążenia około  $M_b = 25 \text{ N}\cdot\text{m}$  i  $M_s = 23 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Po przeprowadzeniu badań statycznych wykonano testy dynamiczne. W czasie pracy urządzenia pośrednio za pomocą odkształcenia dźwigni mierzone są wartości chwilowe momentu. Mają one charakter przebiegu sinusoidalnego. Przykładowe badania cykliczne i widmo mocy zarejestrowanej historii czasowej momentu pokazano na rys. 6. W oparciu o przedstawiony sposób pomiaru odkształceń na próbce wykonano badania zmęczeniowe.



Rys. 5. Odkształcenia dźwigni i próbki przy statycznym zginaniu

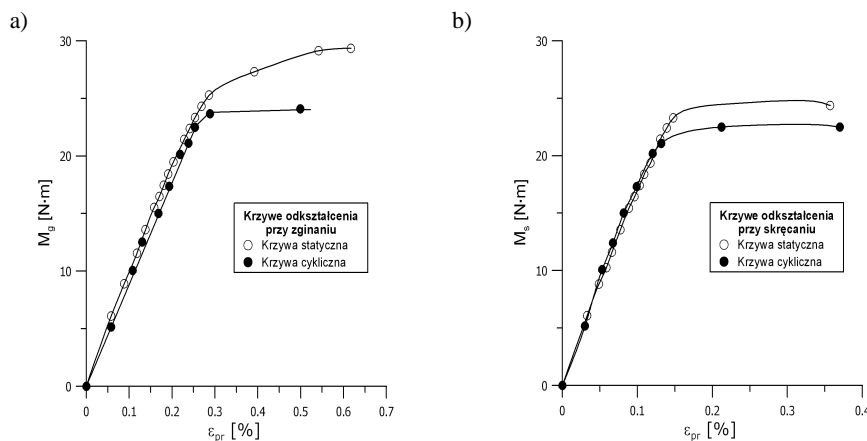
Fig. 5. Strain of the lever and the specimen at static bending



Rys. 6. Przykładowy przebieg amplitudy momentu i widmo mocy zarejestrowanego sygnału obciążenia

Fig. 6. An example the course of amplitude of the moment and the resonance frequency of the machine

Rys. 7 przedstawia krzywe odkształcenia przy statycznym oraz cyklicznym zginaniu i skręcaniu. Na rys. 7a widoczna jest liniowa zależność pomiędzy obciążeniem, a odkształceniem próbki przy obciążeniach cyklicznych w zakresie od  $M_g = 0$  do około  $M_g = 22$  N·m. Porównując krzywą statyczną z krzywą cykliczną obserwuje się pojawienie odkształceń plastycznych przy różnych wartościach obciążenia.

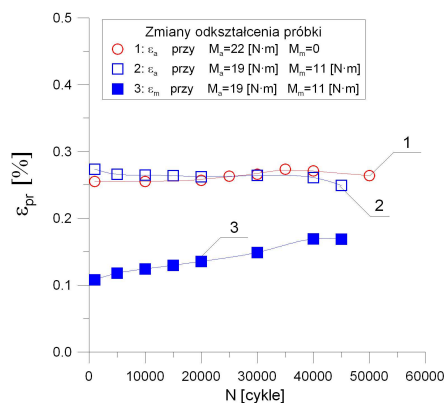


Rys. 7. Krzywe statycznego i cyklicznego odkształcenia próbek przy a) zginaniu i b) skręcaniu

Fig. 7. Curves of static and cyclic strain specimens for a) bending and b) torsion

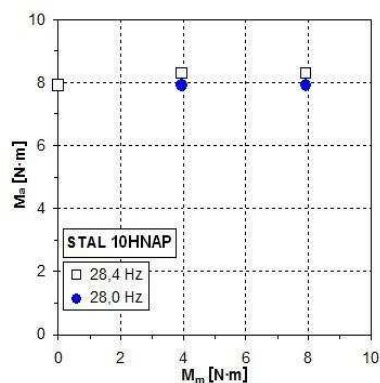
Dla krzywej statycznej jest to obciążenie około 25,5 N·m, a dla krzywej cyklicznej około 23 N·m. W przypadku skręcania w zakresie od  $M_s = 0$  do około  $M_s = 20$  N·m również widoczna jest liniowa zależność pomiędzy obciążeniem, a odkształceniem próbki dla obciążeń cyklicznych. Porównując krzywą statyczną

ną z krzywą cykliczną obserwuje się pojawienie odkształceń plastycznych przy różnych wartościach obciążenia. Dla krzywej statycznej jest to obciążenie około 23,5 N·m, a dla krzywej cyklicznej około 20 N·m. Stosunek obciążeń cyklicznych do obciążeń statycznych wywołujących w próbce odkształcenia plastyczne wynosi dla zginania  $M'_{ge}/M_{ge} = 0,9$  ( $M'_{ge}$  – moment dla krzywej zmęczeniowej,  $M_{ge}$  – moment dla krzywej statycznej), a dla skręcania  $M'_{se}/M_{se} = 0,89$ . Z badań zmęczeniowych przy rozciąganiu-ściskaniu dla krzywej cyklicznego odkształcenia i stali 10HNAP (wg ASTM) [5] otrzymano ze stosunku cyklicznej i statycznej granicy plastyczności  $R'_e/R_e = 0,87$ . Na podstawie wyznaczonych krzywych cyklicznego odkształcenia dla zadanych parametrów obciążenia, wyznaczono odkształcenia całkowite próbek  $\epsilon_{pr}$  i porównano je z wynikami uzyskanymi doświadczalnie. Wyniki eksperymentalne uzyskano dokonując odczytów odkształcenia maksymalnego  $\epsilon_{pr}^{max}$  oraz minimalnego  $\epsilon_{pr}^{min}$  wskazywanych na mostku tensometrycznym. Rys. 8 przedstawia zmiany odkształceń zmierzonych na próbce w zależności od liczby cykli zmian obciążenia, gdzie krzywa 1 pokazuje zmianę amplitudy odkształcenia  $\epsilon_a$  przy zerowej wartości średniej obciążenia i amplitudzie momentu  $M_a = 22$  N·m. Widoczna jest niewielka zmiana tej amplitudy wraz z liczbą cykli zmian obciążenia. Trwałość tej próbki do zniszczenia wynosiła 58000 cykli. Krzywa 2 przedstawia zmiany amplitudy odkształcenia  $\epsilon_a$  dla przebiegu  $M_a = 19$  N·m i  $M_m = 11$  N·m. Również tutaj zmiany amplitudy odkształcenia są nieznaczne. Natomiast krzywa 3 przedstawia zmianę wartości średniej odkształcenia  $\epsilon_m$  wraz ze zmianą liczby cykli  $N$  obciążenia. Dla przykładu, przy  $N = 5 \cdot 10^4$  cykli, odkształcenie średnie  $\epsilon_m$  wzrasta o około 70%.



Rys. 8. Zmiana odkształcenia w próbce wraz z liczbą cykli

Fig. 8. Changing the strain of the specimen with the number of cycles



Rys. 9. Zależność wartości średniej od amplitudy momentu

Fig. 9. Dependence of mean value vs. amplitude of the moment



Widoczne tu jest wyraźnie zjawisko tzw. pełzania dynamicznego. Maksymalny moment obciążenia  $M_{\max} = M_m + M_a = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$  przekroczył znacznie obciążenia, przy których pojawiają się odkształcenia plastyczne (rys. 7a). W przypadku badań dla obciążeń o niższych wartościach amplitudy momentu obciążającego próbkę, zmiany odkształceń wraz ze wzrostem liczby cykli obciążenia były nieznaczne i mieściły się w granicach błędu pomiarowego do 5%. Na rys. 9 pokazano wpływ wartości średniej obciążenia na wartość amplitudy momentu. Dla metali, typu stal, wpływ wartości średnich nie miał większego wpływu na wartości amplitudy momentu zginającego (błąd poniżej 5%).

#### 4. Opis dynamiki stanowiska MZGS-100

Opis matematyczny dynamiki stanowiska jest istotny ze względu na ocenę warunków obciążenia badanego elementu oraz pracy układu sterowania stanowiska, gdzie dobór parametrów pracy sterownika (w tym przypadku sterowanie prędkością obrotową silnika prądu przemiennego za pomocą falownika) i ich kontrolowanie ma zasadniczy wpływ na to, co dzieje się w badanej konstrukcji [6]. Rys. 10 przedstawia model fizyczny stanowiska urządzenia pokazanego na rys. 1.

##### 4.1. Model matematyczny układu

Układ ten może być opisany za pomocą modelu obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu, gdzie podstawowe równanie dynamiki ma postać:

$$M\ddot{y} + (C_s + C_p)\dot{y} + (K_s + K_p)y = P(t), \quad P(t) = P \sin(\omega t) \quad (4)$$

gdzie:  $M$  – masa części ruchomych układu [kg],  $C_s, C_p$  – współczynniki tłumienia odpowiednio sprężyn i próbki,  $K_s, K_p$  – współczynniki sprężystości odpowiednio sprężyn i próbki,  $P$  – siła wywołująca moment gnący [N],  $\omega$  – prędkość kątowa tarczy wirującej (częstość pobudzenia) [ $\text{s}^{-1}$ ],  $y = y(t)$  – przemieszczenie dźwigni w punkcie mocowania z łącznikiem przekazującym ruch z wirującej tarczy na belkę [m].

Siła obciążająca  $P$  jest siłą bezwładności niewyrównoważonej masy na tarczy wirującej z prędkością kątową  $\omega$ , zaś przebieg sinusoidalny wynika z ograniczenia ruchu tarczy tylko w kierunku pionowym. Częstość drgań własnych  $\omega_n$  oraz współczynnik tłumienia  $\zeta$  układu mogą być wyznaczone z równań:

$$\omega_n^2 = \frac{(K_s + K_p)}{M}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{(C_s + C_p)}{M} \quad (5)$$

Uwzględniając równanie (5) model matematyczny opisany równaniem (4) może być zapisany jako:

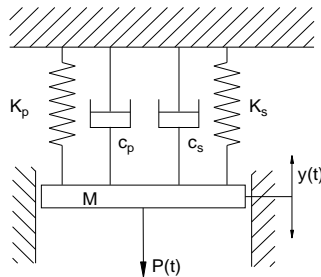
$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = P \sin(\omega t) \quad (6)$$

Układ w stanie stacjonarnym wykonuje drgania o częstotliwości siły pobudzającej i amplitudzie zależnej od częstotliwości pobudzenia, częstotliwości własnej układu oraz współczynnika tłumienia

$$y(t) = \frac{P\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varepsilon) \quad (7)$$

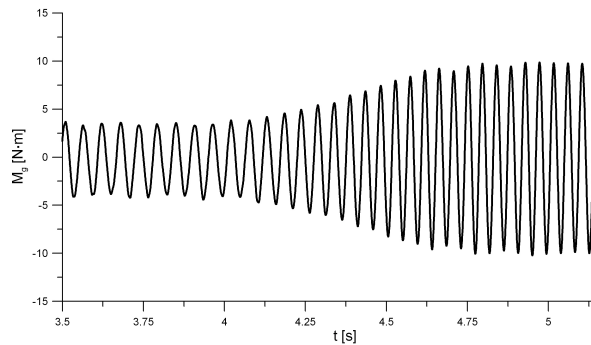
gdzie:  $\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{2\zeta\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$ .

Oczywiście należy pamiętać o tym, że skokowa zmiana częstotliwości wymuszenia nie wywoła skokowej zmiany odpowiedzi układu. Rys. 11 prezentuje zarejestrowaną zmianę amplitudy momentu przy skokowej zmianie częstotliwości wymuszającej. Można zauważyć krótki stan przejściowy, po którym następuje stabilizacja przebiegu czasowego momentu.



Rys. 10. Model fizyczny stanowiska MZGS-100

Fig. 10. Physic model of the MZGS-100 stand

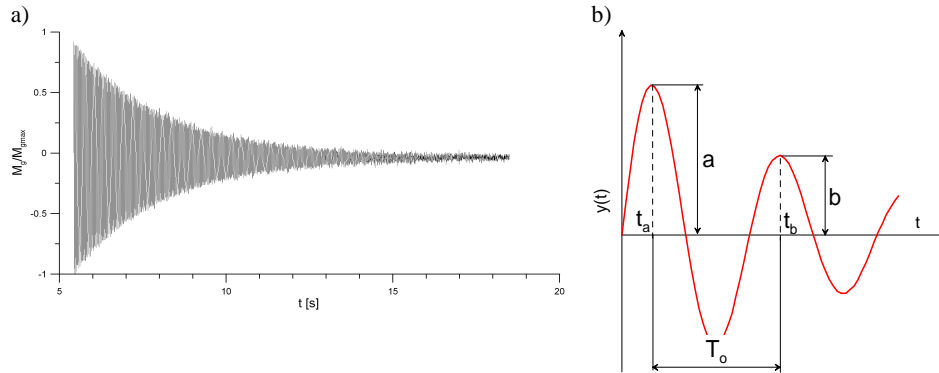


Rys. 11. Stan przejściowy przy zmianie częstotliwości wymuszenia

Fig. 11. Transient period registered for step change of input signal

## 4.2. Wyznaczenie parametrów układu

Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych stanowiska oraz współczynnika tłumienia może być wykonane za pomocą odpowiedzi impulsowej układu. Jako sygnał wymuszający w modelowaniu analitycznym przyjmuje się impuls Diraca, w którym czas trwania impulsu przyjmuje się jako nieskończenie mały. W praktyce musimy się pogodzić, że impuls ma pewną szerokość w czasie. Rysunek 12a przedstawia zarejestrowaną na stanowisku odpowiedź impulsową skalowaną względem maksymalnej wartości momentu zginającego. Można zauważyć, że czas wygaszania impulsu wynosi około 14,5 s, co może świadczyć o dużej sztywności i małym współczynniku tłumienia układu.



Rys. 12. Odpowiedź impulsowa a) zmierzona na stanowisku, b) model obliczeniowy

Fig. 12. Impulse response a) registered on the stand, b) calculation model

Mając na uwadze, że odpowiedź impulsową obiektu opisanego równaniem (6) ma postać

$$y(t) = k \left[ \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \cdot \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t\right) \right] \quad (8)$$

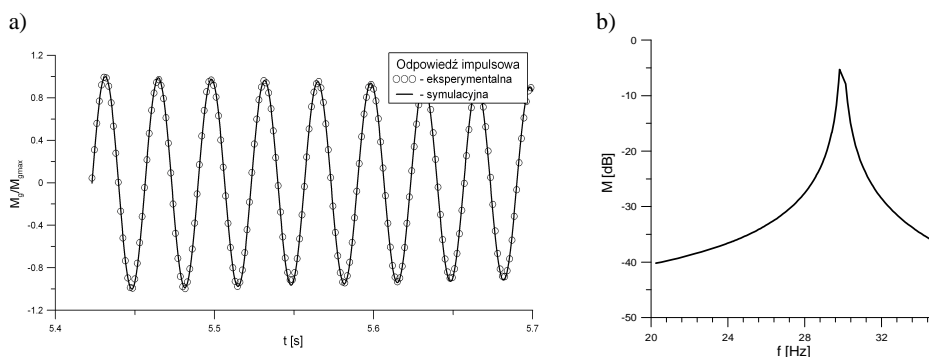
gdzie  $k$  – wzmacnienie układu oraz przyjmując oznaczenia jak na rys. 12b, wartość częstości drgań własnych  $\omega_n$  oraz współczynnik tłumienia  $\zeta$  mogą być wyznaczone jako:

$$\zeta = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2\left(\frac{a}{b}\right)}}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_o \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (9)$$

Z obliczeń uzyskano wartości parametrów:

$$\zeta = 0,002, \quad \omega_n = 188,19 \frac{1}{s} \quad (f_n = 29,95 \text{ Hz}).$$

Na rys. 13a przedstawiono porównanie odpowiedzi impulsowej zarejestrowanej na stanowisku z wynikami symulacji. Natomiast rys. 13b prezentuje charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową uzyskaną metodą symulacji komputerowej dla parametrów układu określonych wcześniej. Wyniki z rys. 13a wskazują na dobrą zgodność wyników pomiarów i wyników symulacji.



Rys. 13. Porównanie odpowiedzi impulsowej zarejestrowanej i symulacyjnej a), b) charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

Fig. 13. Simulated and registered impulse response a), b) bode magnitude diagram

Charakterystyka na rys. 13b wskazuje, że stanowisko MZGS-100 pracując na częstotliwościach bliskich rezonansowej daje możliwość szerokiej zmiany momentu obciążającego próbkę poprzez niewielką zmianę częstotliwości wymuszenia.

## 5. Wnioski

W pracy przedstawiono metodę pomiarów odkształceń na stanowisku do badań zmęczeniowych MZGS-100, dokonano cechowania stanowiska oraz określono odkształcenia próbki w sposób pośredni. Odkształcenia próbek zarejestrowane podczas badań doświadczalnych świadczą o tym, że amplituda naprężenia nie zmienia się w sposób znaczący wraz ze zmianą liczby cykli obciążenia. Stwierdzono zjawisko pełzania dynamicznego dla obciążeń znacznie przekraczających obciążenia maksymalne, wynikające z krzywych cyklicznego odkształcenia. Zastosowana metoda wyznaczania odkształceń, w oparciu o krzywą cykliczną przy zginaniu i skręcaniu, daje dobrą zgodność z odkształceniami zmierzonymi bezpośrednio na próbkach. Przeprowadzona analiza dynamiki układu pozwoliła stwierdzić, że stanowisko można opisać z dużą dokładnością modelem obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu. Wyniki pomiarów i symulacji wskazują, że maszyna charakteryzuje się niewielkim współczynnikiem tłumienia układu, a praca na częstotliwościach zbliżonych do rezonansowych daje możliwość uzyskania szerokiego zakresu zmian obciążenia próbki przy stosunkowo niewielkich zmianach częstotliwości wymuszającej. Niewielka zmiana częstotliwości wymuszającej nie będzie miała wpływu na przebieg zjawisk zmęczeniowych i nie zmieni w sposób znaczący czasu trwania próby zmęczeniowej.

## Literatura

- [1] Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C.: System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems, Wiley, 2012, p. 648.
- [2] Achtelik H., Jamroz L.: Urządzenie do badań zmęczeniowych dla obciążeń o przebiegach niesymetrycznych. Patent – P112497, Świadcstwo autorskie nr 155292 o dokonaniu wynalazku, UPPRL, Warszawa 1982.
- [3] Rozumek D., Pawliczek R.: Opis rozwoju pęknięć i zmęczenia materiałów w ujęciu energetycznym. Wieloosiowe zmęczenie losowe elementów maszyn i konstrukcji, Część VII, Studia i Monografie, z. 165, Politechnika Opolska, Opole, 2004, s. 120.
- [4] Gasiak G., Pawliczek R., Rozumek D.: Wyznaczanie odkształceń w próbkach gładkich i z karbem poddanych cyklicznemu zginaniu i skręcaniu. Zeszyty Naukowe PO, Seria: Mechanika nr 268, Prace Naukowe Katedry Mechaniki i PKM, z. 66, Opole 2001, s. 47-64.
- [5] ASTM E739-10, Standard practice for statistical analysis of linear or linearized stress-life (S-N) and strain-life ( $\epsilon$ -N) fatigue data, in: Annual Book of ASTM Standards, Vol. 03.01. Philadelphia, 2004, pp. 658-664.
- [6] Rozumek D., Marciniak Z.: Control system of the fatigue stand for material tests under combined bending with torsion loading and experimental results, Mechanical Systems and Signal Processing Vol. 22, pp. 1289-1296.

## THE STAND FOR FATIGUE TESTS OF MATERIALS UNDER BENDING WITH TORSION

### Summary

The paper presents structure, a principle of operation and measurements of the strength machine for fatigue tests. The machine is designed for fatigue tests of specimens performed from the structural materials working under cyclical loads bending, torsion and proportional bending with torsion. We can ask the load with a zero or non-zero mean value of the moment. The paper presents examples of measurements of static and cyclic on lever machines and the tested specimen (calibration machine) under bending and torsion and the influence of the mean value load.

**Keywords:** calibration machines, strain measurements, cyclic tests, mean value

*Przesłano do redakcji: 13.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Przemysław WIELENTEJCZYK<sup>1</sup>  
Roman LEWANDOWSKI<sup>2</sup>

## WPLYW WYŻSZYCH HARMONICZNYCH NA NIELINIOWE DRGANIA BELEK WYKONANYCH Z MATERIAŁU KELVINA-VOIGTA

W pracy analizuje się geometrycznie nieliniowe drgania ustalone belek wymuszone siłami harmonicznymi zmiennymi w czasie. Belki wykonane są z materiału lepkosprężystego opisywanego za pomocą modelu Kelvina - Voigta. Do opisu geometrycznej nieliniowości deformacji zastosowano teorię von Karmana oraz teorię belek Eulera - Bernoulliego. Pominięto wpływ osiowych sił bezwładności oraz założono nieprzesuwność osiową końców belek. Sformułowano związki fizyczne wyrażone za pomocą sił przekrojowych i uogólnionych odkształceń. Równania ruchu oraz równania amplitud zapisano stosując metodę prac wirtualnych, metodę bilansu harmonicznego oraz metodę elementów skończonych. Nieliniowe równania amplitud rozwiązano metodą kontynuacji. W rozwiązaniach okresowych równań ruchu uwzględniono wyższe harmoniczne, co pozwala na analizę rezonansów pobocznych, ale znacząco skomplikowało sformułowanie i rozwiązanie problemu. Za pomocą krzywych rezonansowych przedstawiono dynamiczne zachowanie się belek wykonanych z materiału Kelvina - Voigta. Wyniki porównano z rozwiązaniami dla belek sprężystych. Przeanalizowano istotność wyższych harmonicznymi w opisie drgań nieliniowych.

**Słowa kluczowe:** model Kelvina-Voigta, geometryczna nieliniowość belek, MES, drgania ustalone, analiza wyższych harmonicznymi

### 1. Wprowadzenie

Celem pracy jest analiza geometrycznie nieliniowych drgań ustalonych belek wymuszonych siłami harmonicznymi zmiennymi w czasie z uwzględnieniem w rozwiązaniu wyższych harmonicznymi. Przyjęto do badań belki wykonane z materiału lepkosprężystego definiowanego jako klasyczny model reologiczny Kelvina-Voigta. Rezultaty zostały przedstawione w postaci krzywych rezonan-

---

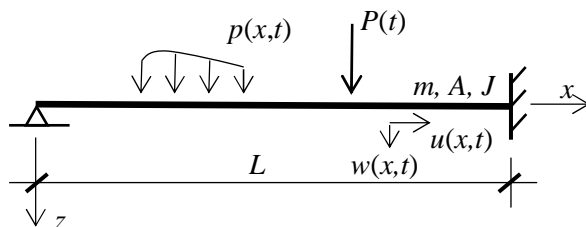
<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Przemysław Wielentejczyk, Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; tel. +48616652471; przemyslaw.wielentejczyk@put.poznan.pl

<sup>2</sup> Roman Lewandowski, Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; tel. +48616652472; roman.lewandowski@put.poznan.pl

sowych. Porównano otrzymane krzywe rezonansowe z wynikami dla układów sprężystych z tłumieniem proporcjonalnym do macierzy mas [1].

## 2. Sformułowanie problemu

Analizuje się geometrycznie nieliniowe ustalone drgania belek wykonanych z materiału Kelvina-Voigta. Rozpatruje się belki jednoprzęsłowe o długość przęsła  $L$ . Drgania wzbudzone są przez dowolne siły harmonicznje zmienne w czasie o częstotliwości wymuszenia  $\lambda$ . Schemat układu przedstawiono na Rys. 1. Belka na końcach posiada niepodatne podpory w kierunku poziomym. Symbolem  $A$  oznaczono pole przekroju poprzecznego belki,  $m$  masę rozłożoną na jednostkę długości, a  $J$  moment bezwładności przekroju poprzecznego. Przemieszczenia poziome i pionowe belki oznaczono odpowiednio przez  $u(x,t)$  i  $w(x,t)$ .



Rys. 1. Schemat belki jednoprzęsłowej

Fig. 1. Diagram of one-span beam

### 2.1. Zależności geometryczne i związki konstytutywne

Odształcenia przekroju belki można zapisać następująco:

$$\varepsilon_x(x, z, t) = \varepsilon(x, t) - z\kappa(x, t), \quad \kappa(x, t) = -w_{,xx}(x, t) \quad (1)$$

gdzie:  $\varepsilon_x(x, z, t)$  – odkształcenie dowolnego punktu przekroju poprzecznego o współrzędnej  $z$ ,  $\varepsilon(x, t)$  – odkształcenie osi obojętnej belki,  $\kappa(x, t)$  – krzywizna belki,  $(\cdot)_{,x} = d(\cdot)/dx$ .

Zgodnie z teorią von Karmana można geometryczną nieliniowość problemu uwzględnić w następujący sposób:

$$\varepsilon(x, t) = u_{,x}(x, t) + \frac{1}{2} w_{,x}^2(x, t) \quad (2)$$

Prawo konstytutywne dla materiału Kelvina-Voigta ma postać:

$$\sigma_x(x, z, t) = E_0 \varepsilon_x(x, z, t) + \alpha E_0 \dot{\varepsilon}_x(x, z, t) \quad (3)$$

gdzie:  $\tau$  – czas retardacji,  $E_0$  – moduł sprężystości,  $\sigma_x(x, z, t)$  – naprężenie normalne,  $\dot{\epsilon}_x = d\epsilon_x / dt$ .

Znając prawo konstytutywne opisane równaniem (3) można zapisać związki fizyczne za pomocą momentów zginających  $M(x, t)$  i sił normalnych  $N(x, t)$  oraz uogólnionych odkształceń w następujący sposób:

$$N(x, t) = E_0 A \epsilon(x, t) + E_0 A \tau \dot{\epsilon}(x, t) \quad (4)$$

$$M(x, t) = E_0 J \kappa(x, t) + E_0 J \tau \dot{\kappa}(x, t) \quad (5)$$

Jeżeli pominie się wpływ osiowych sił bezwładności oraz założy niepodatność w kierunku osi belki podpór na końcach belki to równanie (4) można przekształcić do postaci

$$N(t) = \frac{E_0 A}{2L} \int_0^L w_{,x}^2 dx + \tau \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{,x} \dot{w}_{,x} dx \quad (6)$$

## 2.2. Równania ruchu

W pracy założono, że drgania układu wywoływane są przez siły harmonicznymie zmienne, a w opisie tych sił uwzględnia się wyższe harmoniczne, tzn.:

$$p(x, t) = p_{c1}(x) \cos \lambda t + p_{s1}(x) \sin \lambda t + p_{c3}(x) \cos 3\lambda t + p_{s3}(x) \sin 3\lambda t \quad (7)$$

gdzie:  $\lambda$  – częstość wymuszenia,  $p_{c1}(x)$ ,  $p_{s1}(x)$ ,  $p_{c3}(x)$ ,  $p_{s3}(x)$  – amplitudy siły wymuszającej.

W przypadku drgań ustalonych w ustalonej odpowiedzi układu również uwzględnia się wyższe harmoniczne. Zmiany w czasie przemieszczeń pionowych  $w(x, t)$  oraz krzywizn  $\kappa(x, t)$  przekroju opisuje się za pomocą funkcji:

$$w(x, t) = w_{c1}(x) \cos \lambda t + w_{s1}(x) \sin \lambda t + w_{c3}(x) \cos 3\lambda t + w_{s3}(x) \sin 3\lambda t \quad (8)$$

$$\kappa(x, t) = \kappa_{c1}(x) \cos \lambda t + \kappa_{s1}(x) \sin \lambda t + \kappa_{c3}(x) \cos 3\lambda t + \kappa_{s3}(x) \sin 3\lambda t \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności i związki fizyczne (4) i (5) można siły normalne oraz momenty zginające zapisać w następujący sposób:

$$M(x, t) = M_{c1}(x) \cos \lambda t + M_{s1}(x) \sin \lambda t + M_{c3}(x) \cos 3\lambda t + M_{s3}(x) \sin 3\lambda t \quad (10)$$



$$\begin{aligned}
N(t) = & N_1 \cos^2 \lambda t + N_2 \cos \lambda t \sin \lambda t + N_3 \sin^2 \lambda t \\
& + N_4 \cos^2 3\lambda t + N_5 \cos 3\lambda t \sin 3\lambda t + N_6 \sin^2 3\lambda t \\
& + N_7 \cos \lambda t \cos 3\lambda t + N_8 \cos \lambda t \sin 3\lambda t \\
& + N_9 \sin \lambda t \cos 3\lambda t + N_{10} \sin \lambda t \sin 3\lambda t
\end{aligned} \tag{11}$$

Amplitudy momentów zginających  $M_{c1}(x), M_{c3}(x)$  i  $M_{s1}(x), M_{s3}(x)$  można wyznaczyć stosując metodę bilansu harmonicznym podstawiając zależności (10) i (9) do równania (5), co prowadzi do następujących zależności:

$$\begin{aligned}
M_{c1}(x) = E_0 J \kappa_{c1}(x) + E_0 J \tau \lambda \kappa_{s1}(x) & \quad M_{c3}(x) = E_0 J \kappa_{c3}(x) + 3E_0 J \tau \lambda \kappa_{s3}(x) \\
M_{s1}(x) = -E_0 J \tau \kappa_{c1}(x) + E_0 J \tau \lambda \kappa_{s1}(x) & \quad M_{s3}(x) = -3E_0 J \tau \lambda \kappa_{c3}(x) + E_0 J \kappa_{s3}(x)
\end{aligned} \tag{12}$$

W podobny sposób stałe występujące w (11) można wyznaczyć podstawiając równania (11) i (8) do równania fizycznego (6). Po żmudnych przekształceniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
N_1 = & \frac{E_0 A}{2L} \int_0^L w_{c1,x}^2(x) dx + \tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{s1,x}(x) dx \\
N_2 = & -\tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}^2(x) dx + \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{s1,x}(x) dx + \tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}^2(x) dx \\
N_3 = & -\tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{s1,x}(x) dx + \frac{E_0 A}{2L} \int_0^L w_{s1,x}^2(x) dx \\
N_4 = & \frac{E_0 A}{2L} \int_0^L w_{c3,x}^2(x) dx + 3\tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c3,x}(x) w_{s3,x}(x) dx \\
N_5 = & -3\tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c3,x}^2(x) dx + \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c3,x}(x) w_{s3,x}(x) dx + 3\tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s3,x}^2(x) dx \\
N_6 = & -3\tau \lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c3,x}(x) w_{s3,x}(x) dx + \frac{E_0 A}{2L} \int_0^L w_{s3,x}^2(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_7 &= \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{c3,x}(x) dx + 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{s3,x}(x) dx \\
&\quad + \tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}(x) w_{c3,x}(x) dx \\
N_8 &= -3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{c3,x}(x) dx + \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{s3,x}(x) dx \\
&\quad + \tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}(x) w_{s3,x}(x) dx \\
N_9 &= -\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{c3,x}(x) dx + \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}(x) w_{c3,x}(x) dx \\
&\quad + 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}(x) w_{s3,x}(x) dx \\
N_{10} &= -\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{c1,x}(x) w_{s3,x}(x) dx - 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}(x) w_{c3,x}(x) dx \\
&\quad + \frac{E_0 A}{L} \int_0^L w_{s1,x}(x) w_{s3,x}(x) dx
\end{aligned} \tag{13}$$

### 2.3. Zastosowanie metody elementów skończonych

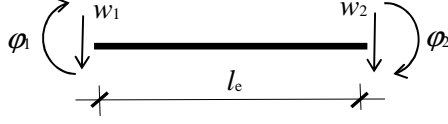
Dyskretyzację rozpatrywanego problemu dokonano za pomocą metody elementów skończonych. Równanie pracy wirtualnej ma w rozważanym przypadku postać:

$$\int_0^L \delta w(x,t) (b(x,t) + p(x,t)) dx - \int_0^L (\delta \kappa(x,t) M(x,t) + \delta \varepsilon(x,t) N(t)) dx = 0 \tag{14}$$

Równania amplitud wyprowadzono stosując metodę bilansu harmonicznych. W tym celu użyto uśrednione w względem czasu równanie pracy wirtualnej. Ma ono postać:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \int_0^L \delta w(x,t) (b(x,t) + p(x,t)) dx dt = \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^L (\delta \kappa(x,t) M(x,t) + \delta \varepsilon(x,t) N(t)) dx dt \tag{15}$$

gdzie  $T = 2\pi/\lambda$  jest okresem drgań.



Rys. 2. Typowy element skończony i oznaczenie węzłowych przemieszczeń

Fig. 2. Typical finite element and signing of nodal displacements

W pracy zastosowano typowy element skończony o długości  $l_e$  pokazany na Rys.2, dla którego aproksymację amplitud przemieszczeń i ich wirtualnych odpowiedników zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned}
 w_{c1}(x) &= \mathbf{H}(x)\mathbf{q}_{c1e}, & w_{c3}(x) &= \mathbf{H}(x)\mathbf{q}_{c3e} \\
 w_{s1}(x) &= \mathbf{H}(x)\mathbf{q}_{s1e}, & w_{s3}(x) &= \mathbf{H}(x)\mathbf{q}_{s3e} \\
 \delta w_{c1}(x) &= \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q}_{c1e}, & \delta w_{c3}(x) &= \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q}_{c3e} \\
 \delta w_{s1}(x) &= \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q}_{s1e}, & \delta w_{s3}(x) &= \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q}_{s3e}
 \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie  $\mathbf{H}(x)$  – wektor funkcji kształtu, którego składowymi są wielomiany Hermite’a trzeciego rzędu,  $\mathbf{q}_{c1e}, \mathbf{q}_{c3e}, \mathbf{q}_{s1e}, \mathbf{q}_{s3e}$  – wektory węzłowych amplitud przemieszczeń.

Po żmudnych przekształceniach równania (15) i uwzględnieniu wzorów (12) i (16) można uzyskać nieliniowe równania amplitud w postaci:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{c1} &= (\mathbf{K} - \lambda^2\mathbf{M})\mathbf{q}_{c1} + \tau\lambda\mathbf{K}\mathbf{q}_{s1} + \left(\frac{3}{4}N_1 + \frac{1}{4}N_3 + \frac{1}{2}N_4 + \frac{1}{2}N_6 + \frac{1}{4}N_7 + \frac{1}{4}N_{10}\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{c1} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4}N_2 + \frac{1}{4}N_8 - \frac{1}{4}N_9\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{s1} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4}N_1 - \frac{1}{4}N_3 + \frac{1}{2}N_7\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{c3} + \left(\frac{1}{4}N_2 + \frac{1}{2}N_8\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{s3} - \mathbf{P}_{c1} = \mathbf{0} \\
 \mathbf{r}_{s1} &= (\mathbf{K} - \lambda^2\mathbf{M})\mathbf{q}_{s1} - \tau\lambda\mathbf{K}\mathbf{q}_{c1} + \left(\frac{1}{4}N_2 + \frac{1}{4}N_8 - \frac{1}{4}N_9\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{c1} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4}N_1 + \frac{3}{4}N_3 + \frac{1}{2}N_4 + \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{4}N_7 - \frac{1}{4}N_{10}\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{s1} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{4}N_2 + \frac{1}{2}N_9\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{c3} + \left(\frac{1}{4}N_1 - \frac{1}{4}N_3 + \frac{1}{2}N_{10}\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{s3} - \mathbf{P}_{s1} = \mathbf{0} \\
 \mathbf{r}_{c3} &= (\mathbf{K} - 9\lambda^2\mathbf{M})\mathbf{q}_{c3} + 3\tau\lambda\mathbf{K}\mathbf{q}_{s3} + \left(\frac{1}{4}N_1 - \frac{1}{4}N_3 + \frac{1}{2}N_7\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{c1} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{4}N_2 + \frac{1}{2}N_9\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{s1} + \left(\frac{1}{2}N_1 + \frac{1}{2}N_3 + \frac{3}{4}N_4 + \frac{1}{4}N_6\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{c3} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4}N_5\right)\mathbf{B}\mathbf{q}_{s3} - \mathbf{P}_{c3} = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{s3} = & (\mathbf{K} - 9\lambda^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_{s3} - 3\tau\lambda \mathbf{K} \mathbf{q}_{c3} + \left(\frac{1}{4} N_2 + \frac{1}{2} N_8\right) \mathbf{B} \mathbf{q}_{c1} \\ & + \left(\frac{1}{4} N_1 - \frac{1}{4} N_3 + \frac{1}{2} N_{10}\right) \mathbf{B} \mathbf{q}_{s1} + \left(\frac{1}{4} N_5\right) \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} \\ & + \left(\frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{2} N_3 + \frac{1}{4} N_4 + \frac{3}{4} N_6\right) \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} - \mathbf{P}_{s3} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{r}_{c1}$ ,  $\mathbf{r}_{c3}$  i  $\mathbf{r}_{s1}$ ,  $\mathbf{r}_{s3}$  są wektorami reszt.

Globalne wektory obciążeń  $\mathbf{P}_{c1}$ ,  $\mathbf{P}_{s1}$ ,  $\mathbf{P}_{c3}$ ,  $\mathbf{P}_{s3}$  oraz globalne macierze mas  $\mathbf{M}$ , sztywności  $\mathbf{K}$  i geometryczne  $\mathbf{B}$  są agregowane w znany sposób przy użyciu macierzy definiowanych na poziomie elementu skończonego [2].

Macierzowo stałe  $N_1..N_{10}$  można przedstawić w następujący sposób:

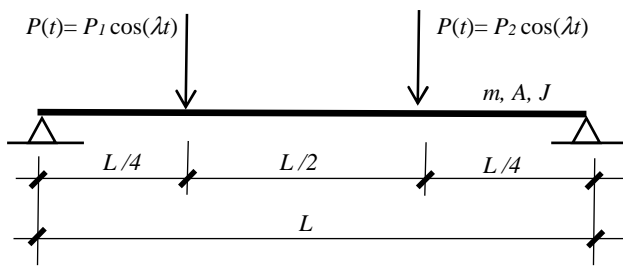
$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{E_0 A}{2L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c1} + \tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s1} & N_3 = & -\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s1} + \frac{E_0 A}{2L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s1} \\ N_2 = & -\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c1} + \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s1} + \tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s1} \\ N_4 = & \frac{E_0 A}{2L} \mathbf{q}_{c3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} & N_6 = & -3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} + \frac{E_0 A}{2L} \mathbf{q}_{s3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} \\ N_5 = & -3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} + 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s3}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} \\ N_7 = & \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} + \tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} \\ N_8 = & -3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} + \tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} \\ N_9 = & -\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} \\ N_{10} = & -\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{c1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} - 3\tau\lambda \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{c3} + \frac{E_0 A}{L} \mathbf{q}_{s1}^T \mathbf{B} \mathbf{q}_{s3} \end{aligned} \quad (18)$$

Rozwiązanie nieliniowego układu równań amplitud dla danej częstości wymuszenia  $\lambda$  wymaga zastosowania metody kontynuacji opisanej np. w [2].

### 3. Analiza dynamiczna belek

W celu zbadania dynamicznych właściwości układów z materiału lepko-sprężystego z uwzględnieniem wyższych harmonicznych przyjęto do analizy belkę wolnopodpartą pokazaną na Rys.3, która jako sprężysta była analizowana w pracy [1]. Drgania wzbudzone są przez siły harmonicznymie zmienne w czasie

zlokalizowane w odległości  $L/4$  od podpór o amplitudzie  $P_1 = 13.63E_0Jr/L^3$  i  $P_2 = -9.62E_0Jr/L^3$ , gdzie  $r$  oznacza promień bezwładności przekroju poprzecznego belki. Obliczenia wykonano dla równomiernego podziału belki na 8 elementów skończonych. Rezultaty prezentowane są w formie krzywych odpowiedzi jako funkcji względnej wypadkowej amplitudy przemieszczeń pionowych  $w_s/h$  w punkcie przyłożenia siły wzbudzającej  $P_2$  do bezwymiarowej częstości  $\lambda/\omega_1$ , gdzie  $\omega_1$  jest podstawową częstością własną analizowanego układu. Wypadkowa amplituda  $w_s$  jest pierwiastkiem sumy kwadratów składowych amplitud  $w_{1c}$  i  $w_{1s}$  w badanym punkcie,  $h$  oznacza wysokość przekroju poprzecznego belki. Porównano krzywe odpowiedzi dla belek wykonanych z materiału sprężystego z tłumieniem proporcjonalnym do macierzy mas i współczynnika tłumienia  $c = 0.01\omega_1$  oraz modelu Kelvina-Voigta dla czasu retardacji  $\tau = 1/1500s$ . Charakterystyki materiału dla modelu sprężystego jak i lepkosprężystego dobrano tak aby wielkości maksymalnych amplitud przemieszczeń (rezonans) w badanym punkcie były podobne.

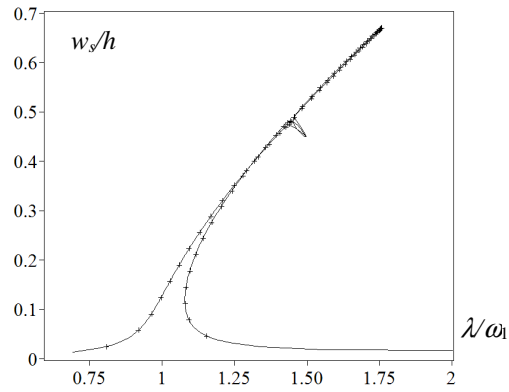


Rys. 3. Schemat analizowanej belki z niepodatnymi podporami na końcach

Fig. 3. Diagram of analyzed beam with immovable ends

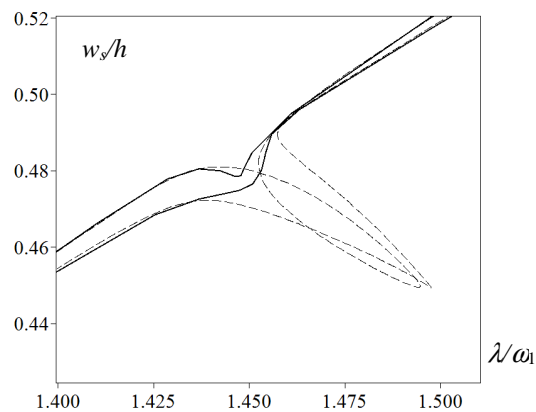
Obliczenia wykonano dla następujących danych: rozpiętość przęsła belki  $L = 4.0m$ , wymiary przekroju poprzecznego  $b \times h = 0.4 \times 0.4m$ , moduł sprężystości materiału lepkosprężystego  $E_0 = 7.0MPa$ , zgodnie z pracą [3], jednostkowa masa belki  $m = 160 kg/m$ .

Na Rys.4 przedstawiono krzywe odpowiedzi dla obu badanych modeli materiału, sprężystego i lepkosprężystego Kelvina-Voigta. Można wyraźnie zaobserwować, że wyraźny rezonans wewnętrzny występuje tylko dla modelu sprężystego, natomiast dla modelu Kelvina-Voigta jest minimalne. Na Rys.5 powiększono strefę rezonansu wewnętrznego z Rys.4, która w przypadku dalszego obniżania czasu retardacji staje się coraz bardziej zauważalna.



Rys. 4. Porównanie krzywych odpowiedzi dla belki swobodnie podpartej. Model sprężysty (—), model Kelvina-Voigta (+ + + +)

Fig. 4. Comparison of response curves for simply supported beam. The elastic model (—), the Kelvin-Voigt model (+ + + +)



Rys. 5. Strefa rezonansu wewnętrznego. Model sprężysty (---), model Kelvina-Voigta (—)

Fig. 5. The internal resonance zone. The elastic model (---), the Kelvin-Voigt model (—)

#### 4. Wnioski

W pracy zbadano wpływ wyższych harmonicznych na dynamiczne zachowanie się nieliniowych układów belkowych zbudowanych z materiału lepko-sprężystego Kelvina-Voigta. Porównano wyniki z układem sprężystym z tłumieniem proporcjonalnym do macierzy mas. Wyraźnie wskazano, że w przypadku

modelu materiału Kelvina-Voigta, pomimo bardzo niskiego czasu retardacji (małe tłumienie) nie dochodzi do zjawiska rezonansu wewnętrznego, co wskazuje, że wyraźnie wpływ na to zjawisko ma przyjęty model materiału oraz wpływ czasu retardacji na elementy nieliniowe równania amplitud, które nie występują w modelu sprężystym.

**Podziękowania.**

*Badania były wykonane w ramach działalności statutowej nr 01/11/DSPB/800.*

**Literatura**

- [1] Lewandowski R.: Okresowe drgania konstrukcji geometrycznie nieliniowych, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Rozprawy nr 291, Poznań 1993.
- [2] Wielentejczyk P., Lewandowski R.: Geometrically nonlinear, steady state vibration of viscoelastic beams, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 89, 2017, pp. 177-186.
- [3] Galucio A.C., Deü J.-F., Ohayon R.: Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators, Computational Mechanics, vol. 33, 2004, pp. 282-291.

**INFLUENCE OF HIGHER HARMONICS ON NON-LINEAR VIBRATIONS OF BEAMS MADE OF KELVIN-VOIGT MATERIAL**

**S u m m a r y**

The problem of geometrically non-linear steady state vibrations of beams excited by harmonic forces is considered in this paper. The beams are made of a viscoelastic material defined by the classic Kelvin-Voigt rheological model. The von Karman theory and the Euler-Bernoulli theory are applied to describe the effects of geometric nonlinearities of beam deformations. The influence of axial inertial forces are neglected. The immovable ends of beam system are assumed. The physical relationships for internal forces and general deformations are defined. The equations of motion and amplitudes are derived using the virtual work method, the harmonic balance method and the finite element methodology. Non-linear amplitude equations are solved applying the continuation method. In the steady-state solution of equations of motion, the higher harmonics are taken into account what enables one to examine an secondary resonances but significantly complicates the formulation and solution of the problem. Using resonance curves the dynamic behaviour of beam systems made of the viscoelasticity Kelvin-Voigt material are presented. The results are compared with these ones for elastic beams. The significance of higher harmonics for the description of steady-state non-linear vibrations are briefly discussed.

**Keywords:** Kelvin-Voigt model, geometric nonlinearities of beam, FEM, steady-state analysis, higher harmonic analysis

*Przesłano do redakcji: 14.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Zdzisław PAWLAK<sup>1</sup>

## IDENTYFIKACJA CECH SPRĘŻYSTYCH WĘZŁA KONSTRUKCYJNEGO NA PODSTAWIE WYNIKÓW TESTU DYNAMICZNEGO

W prac analizowano cechy sprężyste węzłów konstrukcji prętowych. Połączenie węzłowe uważa się za podatne, gdy relacja pomiędzy momentem zginającym a kątem obrotu przekroju nie pozwala na traktowanie połączenie jako sztywne, ani jako nominalnie przegubowe. Głównym celem pracy była próba określenia współczynnika sprężystości obrotowej na podstawie cech dynamicznych wyznaczonych eksperymentalnie. W analizie wykorzystano relację pomiędzy parametrami sprężystości wyznaczonymi odpowiednio dla konstrukcji podatnej i konstrukcji sztywnej oraz częstotliwościami drgań własnych tych układów. Częstotliwości drgań własnych węzła konstrukcyjnego zostały wyznaczone analitycznie z wykorzystaniem modelu sztywnego węzła. W teście dynamicznym zmierzono odpowiedź konstrukcji wzbudzonej impulsem, a po wykonaniu szybkiej transformacji Fouriera wyznaczono częstotliwości drgań własnych układu traktowanego jako podatny. Porównanie odpowiednich częstotliwości drgań własnych umożliwiło określenie wartości współczynnika sprężystości obrotowej, który można wykorzystać do opisu modelu węzła podatnego. Wyniki przykładu numerycznego dla wybranego węzła potwierdziły poprawność zaproponowanej metody określenia współczynnika sprężystości obrotowej na podstawie charakterystyk dynamicznych wyznaczonych w teście dynamicznym.

**Słowa kluczowe:** podatność węzła, charakterystyki dynamiczne, badania eksperymentalne, konstrukcje prętowe

### 1. Wprowadzenie

Problem oceny sztywności węzłów w konstrukcjach jest szeroko badany i omawiany w literaturze [1, 2, 3]. W obowiązującej normie do projektowania konstrukcji stalowych [4, 5] klasyfikuje się węzły z uwagi na ich sztywność oraz z uwagi na ich nośność. Ze względu na sztywność obrotową węzły dzielone są na: sztywne, nominalnie przegubowe i podatne. Zakładając w obliczeniach, że połączenia elementów są modelowane jako węzły sztywne, rozpatrywany układ traktuje się jako ciągły. Natomiast przyjęcie modelu węzła podatnego oznacza,

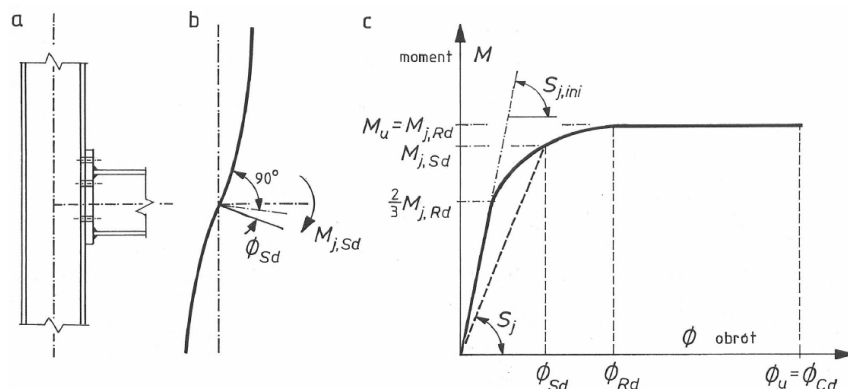
---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Zdzisław Pawlak, Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; [zdzislaw.pawlak@put.poznan.pl](mailto:zdzislaw.pawlak@put.poznan.pl)



że układ jest niepełno-ciągły oraz że w analizie należy uwzględnić zarówno właściwości sprężyste elementów jak i cechy sprężyste węzłów (podatności o skończonej wartości).

Zachowanie węzłów wpływa na rozkład sił wewnętrznych [6] i deformację konstrukcji, a także na wrażliwość na efekty II rzędu, na wielkość obciążenia krytycznego i granicznego oraz na charakterystyki dynamiczne konstrukcji [7]. W przypadku ustrojów z węzłami podatnymi wpływ ten może być znaczący. Najczęściej w analizie układów ramowych do opisu wpływu podatności węzłów na pracę konstrukcji wykorzystywana jest charakterystyka opisująca zależność pomiędzy momentem zginającym a kątem obrotu ( $M-\Phi$ ). Do jej wyznaczenia potrzebna jest znajomość, między innymi nośności przy zginaniu węzła  $M_{j,R}$  [5], początkowej sztywności obrotowej  $S_{j,ini}$  oraz zdolności do obrotu  $\Phi_C$  (Rys. 1).



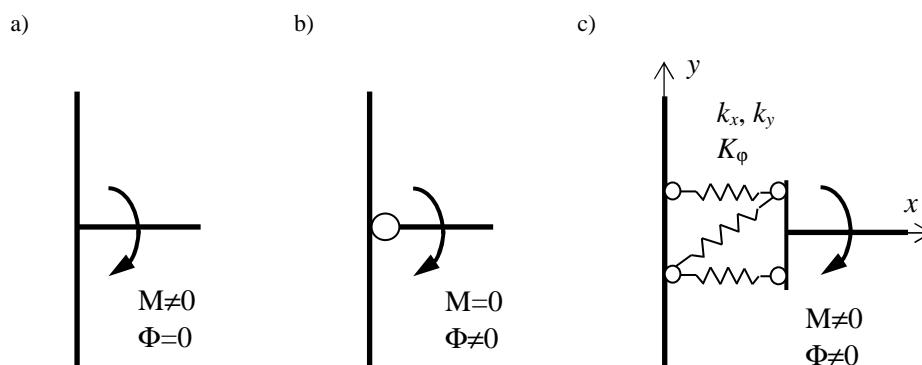
Rys. 1. Obliczeniowa charakterystyka moment-obrót węzła (a) widok węzła (b) model (c) wykres zależności moment-obrót, na podstawie [5]

Fig. 1. Design moment-rotation characteristic for joint (a) joint view (b) model (c) diagram of moment-rotation function, based on [5]

## 2. Model mechaniczny węzła

W zależności od kształtu węzła, jego wymiarów oraz liczby łączników węzeł ma określoną zdolność do przenoszenia sił wewnętrznych i w modelu obliczeniowym konstrukcji może być traktowany jako sztywny (Rys. 2 a), nominalnie przegubowy (Rys. 2 b) lub podatny o skończonej sztywności (Rys. 2 c). Jednym z najpopularniejszych połączeń stosowanych w konstrukcjach stalowych jest złącze dwóch profili dwuteowych na śruby. Uwzględnienie wszystkich części składowych takiego złącza wymaga rozbudowanego modelu mechanicznego. Do budowy modelu obliczeniowego węzła, który uwzględnia właściwości strukturalne elementów składowych można zastosować tzw. metodę składnikową, której główne zasady zawarte są w normie [5]. W metodzie tej uwzględnia się

efekty działania siły poprzecznej oraz siły osiowej w pasach i środnikach, efekt zginania blachy czołowej oraz właściwości sprężyste łączników. Podejście w którym uwzględnia się pracę przynajmniej części elementów składowych węzła jest konieczne, gdy w obliczeniach stosowany jest model węzła podatnego o określonej sprężystości.



Rys. 2. Model mechaniczny węzła (a) sztywny (b) nominalnie przegubowy (c) podatny o skończonej sztywności

Fig. 2. Mechanical model of a joint (a) rigid (b) nominally pinned (c) semirigid with finite stiffness

W modelu węzła podatnego niezbędne jest określenie właściwości sprężystych złącza po kierunku przemieszczeń translacyjnych ( $k_x, k_y$ ) oraz sztywności rotacyjnej opisywanej współczynnikiem sprężystości obrotowej  $K_\phi$ .

W pracy [1] Faella podał sposób określenia wpływu podatności węzła na odpowiedź dynamiczną wielopiętrowej i wielonawowej ramy portalowej. Z regularnej konstrukcji wydzielona została część składająca się z jednego słupa o wysokości jednej kondygnacji  $h$  oraz z dochodzących do niego rygli. W analizowanej podkonstrukcji u podstawy słupa i w głowicy dołączone były rygle o długości równej połowie rozpiętości przęsła  $L$ . Sztywności giętnie elementów zdefiniowane zostały na podstawie modułu Younga  $E$  oraz momentów bezwładności przekrojów słupa i rygla, odpowiednio  $I_c$  i  $I_b$ . Węzły, które łączyły rygle ze słupem miały zadaną sztywność rotacyjną opisaną współczynnikiem sprężystości obrotowej  $K_\phi$  wyrażonym w kNm/rad.

Na podstawie relacji pomiędzy parametrem sztywności wyznaczonym dla konstrukcji podatnej oraz konstrukcji sztywnej w pracy [1] podano wzór na stosunek odpowiednich okresów drgań własnych tych układów:

$$\Psi = \frac{T_k}{T_\infty} = \left( \frac{K_{1\infty}}{K_{1k}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

gdzie:  $T_k$  – okres drgań własnych modelu podatnego [s],

$T_\infty$  – okres drgań własnych modelu sztywnego [s],

$K_{1k}$  – współczynnik sztywności dla modelu podatnego [kNm/rad],

$K_{1\infty}$  – współczynnik sztywności dla modelu sztywnego [kNm/rad].

Dla analizowanego wycinka ramy, czyli układu czterech rygli połączonych ze słupem odpowiednie współczynniki sztywności zostały zdefiniowane jako:

$$K_{1k} = \frac{12EI_c}{h^3} \frac{\bar{K}\zeta}{\bar{K} + 6 + \bar{K}\zeta}, \quad K_{1\infty} = \frac{12EI_c}{h^3} \frac{\zeta}{1 + \zeta} \quad (2)$$

gdzie współczynnik  $\bar{K}$  nazwano bezwymiarową sztywnością obrotową, a  $\zeta$  współczynnikiem sztywności połączenia belki ze słupem:

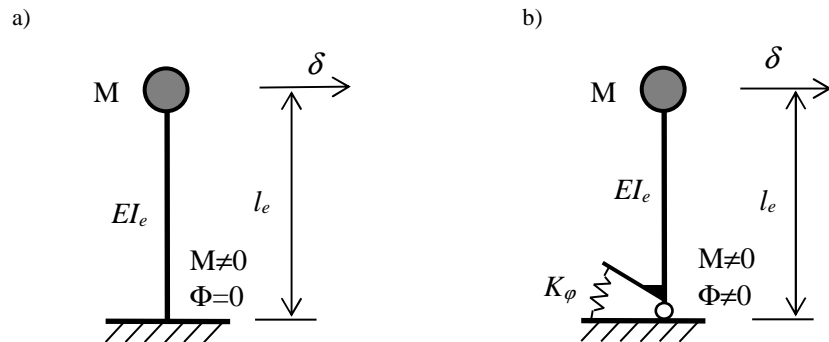
$$\zeta = \frac{EI_b}{EI_c} \frac{h}{L}, \quad \bar{K} = \frac{K_\phi L}{EI_b} \quad (3)$$

Z powyższych zależności wynika, że okres drgań własnych układu zmniejsza się wraz ze wzrostem jego współczynnika sztywności oraz że częstość drgań własnych układu maleje wraz ze spadkiem wartości współczynnika sztywności węzła.

Korzystając ze wzoru (1) określono związek pomiędzy współczynnikiem sprężystości obrotowej  $K_\phi$  a stosunkiem odpowiednich okresów drgań własnych  $\Psi$  wyznaczonym dla modelu węzła, w którym pojedynczy pręt jest połączony śrubami z podstawą (Rys. 3, 4 i 5).

Przyjęto, że w układzie modelowanym jako sztywnym kątem obrotu przekroju przy blasze czołowej jest równy zero ( $\Phi=0$ ), natomiast w układzie podatnym kąt ten jest różny od zera i zależy od wartości współczynnika sprężystości obrotowej  $K_\phi$ . Na podstawie relacji pomiędzy okresem drgań własnych wyznaczonym dla konstrukcji podatnej oraz konstrukcji sztywnej, którą oznaczono jako  $\Psi$ , wyliczono wartość współczynnika sprężystości obrotowej  $K_\phi$  w węźle podatnym (Rys. 3 b):

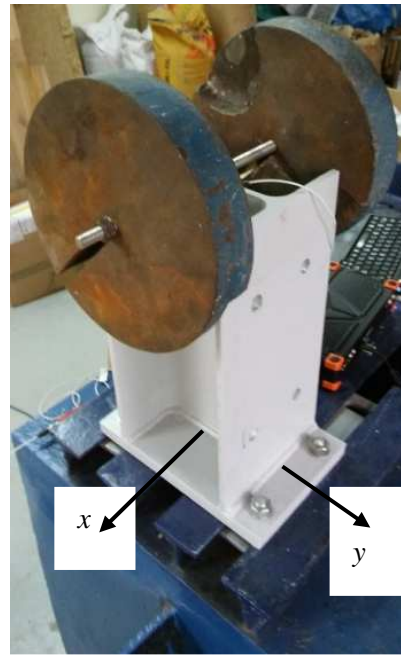
$$K_\phi = \frac{3EI_e}{l_e} \frac{1}{(\Psi^2 - 1)} \quad (4)$$



Rys. 3. Płaski model pojedynczego węzła (a) sztywny (b) podatny zadaną sprężystością obrotową  
 Fig. 3. The flat model of a single joint (a) rigid (b) semirigid with a given rotational stiffness



Rys. 4. Węzeł podatny pojedynczy  
 Fig. 4. The semirigid single joint



Rys. 5. Węzeł z dołączoną masą  
 Fig. 5. The joint with an additional mass

Po odpowiednich przekształceniach wartość okresu drgań własnych konstrukcji podatnej można ustalić na podstawie odpowiednich parametrów sprężystych rozpatrywanego węzła oraz na podstawie okresu drgań własnych  $T_{\infty}$  wyznaczonego dla konstrukcji sztywnej:

$$T_k = \left( \frac{\bar{K}}{\bar{K} + 3} \right)^{\frac{1}{2}} T_\infty \quad (5)$$

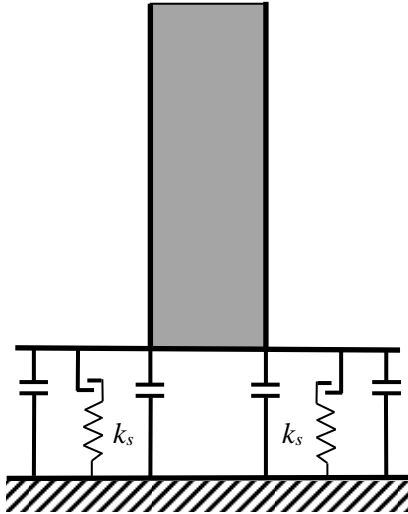
Bezwymiarową sztywnością obrotową  $\bar{K}$  należy wyznaczyć według wzoru (3) przyjmując długość elementu  $L = l_e$  (Rys. 3).

### 3. Przykład obliczeniowy

Analizie poddano węzeł zbudowany ze stalowego profilu dwuteowego HEA 200 z przyspawaną blachą czołową grubości 20 mm mocowanego do podłoża śrubami M 16 (Rys. 4).

W uproszczonym modelu węzła podatnego (Rys. 3 b) jedynym parametrem opisującym sztywność połączenia jest współczynnik sprężystości obrotowej  $K_\varphi$ .

W modelu bardziej złożonym (Rys. 6), zbliżonym do rzeczywistego elementu można uwzględnić sztywności i rozstawy śrub oraz wymiary poprzeczne samego elementu. Ponadto w takim modelu można dopuścić odrywanie blachy czołowej od podłoża oraz założyć, że śruby mają zadaną sprężystość  $k_s$  i przenoszą tylko siłę rozciągającą.



Rys. 6. Złożony model węzła podatnego

Fig. 6. The complex model of the semirigid joint

Korzystając z zaawansowanych programów bazujących na metodzie elementów skończonych węzeł konstrukcyjny można analizować przestrzennie, gdzie oprócz rozwiązań uzyskanych jak w modelu prostym można wyznaczyć

postaci i częstości drgań własnych związane z ruchem skrętnym części składowych węzła.

### 3.1. Badania doświadczalne

W badaniach doświadczalnych testowano zachowanie dynamiczne węzła konstrukcyjnego. Podczas badań wykorzystany został sprzęt:

- do wzbudzania drgań: młotek modalny 50mV/lbf, symbol 2302-50,
- do pomiaru odpowiedzi dynamicznej konstrukcji: jednoosiowy akcelerometr Endevco 100 mV/g, symbol 42A16-1032,
- do akwizycji danych, analizator SIRIUS 8xACC, symbol DEW\_SIRIUS 8xACC.

Do przetwarzania i analizy wyników z pomiaru wykorzystano oprogramowanie Dewesoft X2, wersja: SP6 (Copyright © 2000 - 2017 Dewesoft). Analizator SIRIUS posiada osiem wejść analogowych +/- 10V, zdolność próbkowania do 200 kHz/kanał, konwersję analogowo cyfrową 2x24 bit oraz interfejs komunikacyjny USB.

W kolejnych próbach zmieniano kierunek działania impulsu dynamicznego oraz zmieniano kierunek pomiaru przyspieszeń konstrukcji wzbudzanej. W teście dynamicznym element o długości 40 cm obciążano impulsem dynamicznym wywołanym młotkiem modalnym (model 2302-50). Podczas prób mierzono odpowiedź dynamiczną konstrukcji odczytując zmianę przyspieszenia w czasie przy użyciu akcelerometru (model 42A16). Dane wszystkich pomiarów zostały zebrane w analizatorze Sirius (typ 8xACC). W trakcie badań, w celu określenia częstości drgań własnych konstrukcji, w czasie rzeczywistym wykonano szybką transformację Fouriera (FFT).

Kolejne badania węzła zostały wykonane dla układu z masą dołączoną. W tym przypadku na końcu elementu umieszczono dwa krążki metalowe o masie 16,6 kg każdy (Rys. 5). W wyniku tych badań otrzymano niższe wartości częstości drgań własnych. Charakterystyki dynamiczne dla analizowanych konstrukcji wyznaczono także analitycznie przyjmując odpowiednie modele obliczeniowe.

### 3.2. Wyniki badań

Częstości drgań własnych węzła konstrukcyjnego zostały wyznaczone analitycznie z wykorzystaniem prostych modeli oraz w testach dynamicznych. Dla modelu sztywnego (Rys. 3 a) wyznaczono podstawowe częstości drgań własnych w dwóch prostopadłych płaszczyznach, związane z sztywnościami giętnymi  $EI_x$  i  $EI_y$  przyjętymi dla profilu HEA 200. Analizę wykonano w dwóch wariantach, bez masy (Rys. 4) oraz z dodatkową masą skupioną  $m = 33.2$  kg przymocowaną w górnej części (Rys. 5). Otrzymano częstości kołowe drgań własnych układu sztywnego  $\omega_{\infty,x}$  i  $\omega_{\infty,y}$ . W tabeli 1 podano wyznaczone na

podstawie częstości kołowych  $\omega$  odpowiednie częstości  $f$  wyrażone w hercach [Hz]. W teście dynamicznym wyznaczono odpowiedź konstrukcji wzbudzonej impulsem, a po przeprowadzeniu szybkiej transformacji Fouriera wyznaczono częstości drgań własnych dla układu podatnego. Uzyskane na ich podstawie okresy drgań  $T_i$  umożliwiły wyznaczenie współczynników sprężystości obrotowej  $K_\phi$  dla układu podatnego (Rys. 3b), odpowiednio w dwóch prostopadłych płaszczyznach (Tab. 1).

Tabela 1. Parametry dynamiczne wężła prostego

Table 1. The dynamic parameters of a single joint

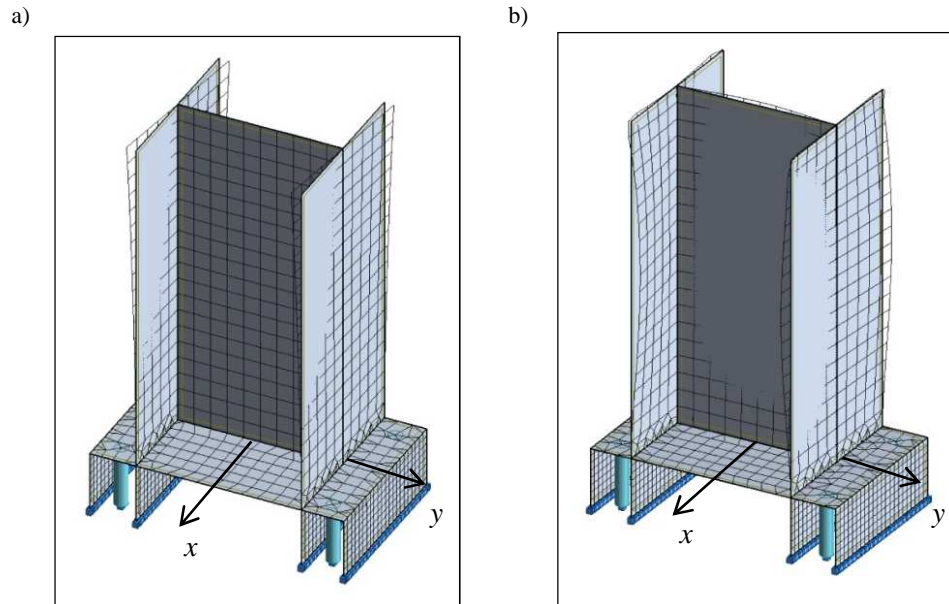
Płaszczyzna drgań	Wariant	Częstotliwość drgań własnych $f$ [Hz]		Współczynnik sprężystości obrotowej $K_\phi$ [kNm/rad]
		Model sztywny (rozwiązanie analityczne)	Model podatny (eksperyment)	
Kierunek X	bez masy	1237,4	242,9	2167
	z masą	429,4	<b>84,8</b>	2192
Kierunek Y	bez masy	786,5	191,7	1241
	z masą	258,8	<b>65,3</b>	1334

Dodatkowo rozpatrywany węzeł poddano analizie przestrzennej przyjmując sposób podparcia zgodny z modelem przedstawionym na rysunku 6. Założono, że blacha czołowa jest podparta na czterech równoległych krawędziach i styk ten nie przenosi rozciągania. Ponadto przyjęto, że śruby przenoszą tylko rozciąganie i przestają działać, gdy pojawia się siła ściskająca. Obliczenia wykonano w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2011. Przy tych założeniach otrzymano początkowe częstości drgań własnych podobne jak w eksperymencie, odpowiednio:  $f_x = 84,63$  Hz i  $f_y = 62,81$  Hz. Związane z nimi postaci drgań (Rys. 7) mają złożoną formę, typową dla układu przestrzennego.

#### 4. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że istnieje możliwość określenia współczynnika sprężystości obrotowej dla wężła podatnego na podstawie parametrów wyznaczonych w teście dynamicznym. Należy podkreślić, że wyznaczony parametr sztywności obowiązuje w zakresie sprężystym pracy wężła i można go interpretować jako tangens kąta oznaczonego jako początkowa sztywność obrotowa  $S_{j,ini}$  (Rys. 1 c).

W przypadku węzłów rozbudowanych lub złożonych z kilku profili dwuteowych do wyznaczenia współczynników sprężystości obrotowej dla każdego złącza śrubowego oddzielnie niezbędne jest przeprowadzenie analizy modalnej.



Rys. 7. Postaci drgań węzła (a) dla częstotliwości  $f = 62,81$  Hz (b) dla częstotliwości  $f = 84,63$  Hz

Fig. 7. The modes of vibrations (a) for frequency  $f = 62,81$  Hz (b) for frequency  $f = 84,63$  Hz

Analiza wyników modalnych pozwala określić postaci i częstość drgań własnych związane z odpowiednią formą odkształcenia elementu. W omawianej metodzie niezbędne jest wybranie właściwej częstości zmierzonej podczas eksperymentu i powiązanie jej z odpowiednią częstością wyznaczoną w sposób analityczny lub metodą elementów skończonych dla modelu sztywnego.

#### **Podziękowania.**

*Badania zostały wykonane i sfinansowane w ramach działalności statutowej nr 01/11/DSPB-0807 realizowanej w Instytucie Konstrukcji Budowlanych Politechniki Poznańskiej.*

#### **Literatura**

- [1] Faella C., Piluso V., Rizzano G.: Structural steel semirigid connections. Theory, Design and Software. CRC Press, 2000.
- [2] Ślęczka L: Kształtowanie i analiza wybranych węzłów ram stalowych poddanych oddziaływaniom zmiennym. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2013.
- [3] Giżejowski M., Standardowe modele połączeń podatnych w szkieletowych konstrukcjach stalowych. Inżynieria i Budownictwo, nr 10, 1997.



- [4] PN-EN 1993-1-1 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1.1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. PKN, Warszawa 2006.
- [5] PN-EN 1993-1-8 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-8: Projektowanie węzłów. PKN, Warszawa 2006.
- [6] Malesza J.: Wpływ zmian sztywności i odkształcalności węzłów na redystrybucję sił wewnętrznych w wielokondygnacyjnej konstrukcji ramowej. Budownictwo i Inżynieria Środowiska. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2, 2011.
- [7] Bródka J., Kozłowski A.: Projektowanie i obliczanie połączeń i węzłów konstrukcji stalowych, tom 2, PWT, Rzeszów 2009.

## **IDENTIFICATION OF THE STIFFNESS PARAMETERS OF THE STRUCTURAL JOINT BASED ON THE RESULTS OF THE DYNAMIC TEST**

### **S u m m a r y**

In the work the stiffness parameters of structural nodes were analyzed. The main purpose of the study was to determine the rotational stiffness of a joint. The joint is considered as a semirigid when the relationship between the bending moment and the angle of the cross-section rotation excludes the treatment of the joint as a rigid one or as a nominally pinned.

The relationship between the ratio of stiffness coefficients and the ratio of the natural frequencies derived for a flexible and a rigid structure was used. The natural frequencies for considered joint were determined analytically using the rigid model. In the dynamic test the response of the system induced by an impulse load was measured. The natural frequencies for a system regarded as a flexible one were derived using the Fast Fourier Transform. After determination of the rotational stiffness the natural frequencies were derived for the joint applying the semirigid model.

For considered joint the 3D analysis was also carried out using an advanced program based on the finite element method. The numerical example confirmed the possibility of determining of the rotational stiffness by the dynamic characteristics obtained in a dynamic test.

**Keywords:** semirigid node, dynamic characteristics, experimental investigation, bar structures

*Przesłano do redakcji: 15.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Jan BOGACKI<sup>1</sup>  
Jarosław ZAWADZKI<sup>2</sup>

## MAGNETIC MARKERS USE FOR MONITORING OF ENVIRONMENTAL POLLUTION CAUSED BY FRACTURING FLUIDS DURING SHALE GAS EXPLOITATION

Magnetic materials may be added to the fracturing fluid, as the magnetic marker allowing to determine the range and efficiency of hydraulic fracturing. The application of appropriate magnetic markers can significantly improve the efficiency of shale gas extraction. There are, however, other important benefits of magnetic markers use, involving the monitoring of environmental pollution, during gas extraction with above mentioned method. However, with the rapid increase in amount of shale gas extracted using hydraulic fracturing method, there are also credible reports on the possibility of groundwater or the soil pollution. Thus, it is necessary to apply enhanced methods, to effectively detect any fracturing fluid leakage. The use of magnetic markers gives such opportunities. In case of leakage and consequently the fracturing fluid pollution, magnetic markers are placed into the soil environment. The presence of pollutants in soil can be detected using a number of standard chemical methods, but magnetometric ones, which are much faster and cheaper deserve special attention, because they enable *in-situ* detection of the magnetic marker in fracturing fluid leakage. This article discusses the above-mentioned issues based on the literature review, the knowledge and experience of the authors.

**Keywords:** magnetic markers, shale gas, hydraulic fracturing, environmental pollution, magnetometric methods, magnetic susceptibility

### 1. Shale gas

As a consequence of high prices of energy resources and fluctuations of its prices, there are a variety of activities carried out in many countries, to ensure independence from imported raw materials and resources, and thereby guarantee

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Jan Bogacki, Faculty of Building Services, Hydro and Environmental Engineering, Warsaw University of Technology, Nowowiejska 20, 00-653 Warsaw, tel. 222345423, jan.bogacki@is.pw.edu.pl

<sup>2</sup> Jarosław Zawadzki, Faculty of Building Services, Hydro and Environmental Engineering, Warsaw University of Technology, Nowowiejska 20, 00-653 Warsaw, j.j.zawadzki@gmail.com

energy safety. Among the alternative energy sources, shale gas is mentioned. Gas combustion is more environmentally friendly than oil [43]. Shale gas is natural gas, which is trapped in the shale bedrock. The shale gas deposits are in many places in the world, among the others in the United States, China and Poland [19]. The process of industrial exploitation began only about 30 years ago [12, 22]. Shales are rocks with low porosity, what makes the process of shale gas migration considerably limited, preventing the use of shale gas as an industrial energy source. In order to increase the extraction of shale gas, it is necessary to increase the permeability of the bedrock. This is achieved using a hydraulic fracturing technology.

## 2. Hydraulic fracturing

Hydraulic fracturing is a process that increase the efficiency of the well. The process involves the hollow vertical well on the depth of the bed and a series of horizontal wells in order to penetrate it. Horizontal wells are loaded with explosives, which are then detonated. Sharp pressure pulses appearing as a result of the explosion creates tiny cracks, fractures, in the bedrock. Then the fracturing fluid is injected into the fractures.

The main component (98 - 99.5%) in most of the used fracturing fluids are water and proppant. Water is used in the process for a short time, however, it is used in a big amount, up to 20000m<sup>3</sup>/well [23]. The aim of the proppant use is to prevent the closure of created fractures, due to rock pressure [24]. Proppant has to have adequate mechanical strength, increasing with the depth of shale. In addition, the diameter of the proppant should be small enough, so that it can penetrate into the fractures - the maximum grain diameter is considered as about 2 mm.

Some chemical additives (0.5 - 2%) are added to the fracturing fluid. Many of them are characterized by significant toxicity [42]. Chemical additives used in fracturing fluid improve the fracturing process. Additives are used: to prevent the swelling of clays (e.g. diethylamine hydrochloride, sodium or potassium chloride), to prevent corrosion of pipes in a wellbore (isopropanol, methanol, chlorobenzene), to prevent stone settling (polyethylene glycol), to prevent precipitation of metal oxides (citric acid), allowing formation of a suspension of sand in water (guar gum, hemicellulose), allowing the subsequent breakdown of gelling agents, responsible for forming a suspension of sand in water (ammonium persulfate), for maintaining a neutral pH, for the proper operation of gelling agents (potassium carbonate), cleaning and disinfecting borehole (glutaraldehyde, ammonium chloride), maintaining the proper viscosity of the liquid, with increasing temperature (borate salts, isopropanol), for reducing friction (petroleum distillates), acids (hydrochloric acid).

The compositions of the fracturing fluids differ depending on the manufacturer, the country of use and the borehole depth. Proper selection of the fractur-

ing fluid composition, including, but not limiting quantities and parameters of proppant, can have a crucial influence on the fracturing process economic viability [46]. The fracturing fluid after fracturing process is pumped from the well. A returned fluid, so called flowback fluid, have usually different chemical composition and lower volume, compared to the fracturing fluid injected into the ground [36]. Changes in the chemical composition are due to the partial consumption of chemical additives in the fracturing process, leaving some portion of fluid with proppant in borehole or with draining from the well a quantity of highly saline groundwater as well as a variety of other contaminants depending on local geology.

Exploitation of shale gas using hydraulic fracturing method is a process causes much controversy. Among the most important problems, above all, the possibility of water and soil pollution, as well as a large water consumption [36] are indicated. Exploitation of shale gas will transform the area into a heavy industrial zone, which is characterized by considerable pressure on the environment [2, 27, 44]. Therefore, in many countries, studies of hydraulic fracturing have been significantly decreased, and in 2011, France was the first country that introduce a legal prohibition of hydraulic fracturing.

Shale gas may be a rich potential source of energy and because of that research on alternative to hydraulic fracturing method [17, 35] are developed. In addition, research on improving and increasing safety of hydraulic fracturing are carried out.

### 3. Magnetic marker

Proper fracturing is crucial for shale gas technology. The greater is the range of fracturing and the greater is the amount of fractures that after process remains open, the greater will be the amount of the received gas. Therefore, from an economic point of view, the most important is the estimation of fracturing range [6]. For this purpose, the use of easily detectable marker, added to the fracturing fluid, is considered.

Many materials, such as radionuclides [1, 15] may be considered as a potential marker used during hydraulic fracturing. Because of the widespread use, a potential marker has to meet a number of even contradictory criteria, inter alia, it has to be both cheap and environmental safe. For this reason, many materials, including the aforementioned radionuclides can't be used.

Requirements for potential marker can be met by a magnetic material, a substance which is active in both natural and anthropogenic magnetic fields [11, 49, 50]. In the case of a magnetic marker usage in hydraulic fracturing, range may be calculated on the basis of the respective magnetic measurements before and after the fracturing [9, 28]. Currently, it is believed, that a potential marker should be a soft magnetic material with high magnetic susceptibility and low coercivity [49, 50].

Potential materials are considered to be: natural magnetic materials, e.g. magnetite, ferrites, ferrofluids or nanomaterials [3-5, 7, 8, 10, 11, 13, 21, 26, 29, 31, 34, 45, 49-51]. The use of magnetite is associated with the risk, due to the lack of repeatability of its magnetic properties and low mechanical resistance. An alternative to the magnetite, may be its synthetic counterparts, so-called "soft" ferrites. Ferrites are commonly used in electrical engineering, among others, as the cores of the coils. Among the ferrites for the best candidates to be markers in hydraulic fracturing Zn, Mn and Ni ferrites [49, 50] are considered. It can be expected, that the magnetic properties of nanoferrites [51], due to superparamagnetism phenomena, would be better than in the case of conventional ferrite with several micrometers grain diameter [49]. Unfortunately, despite the clearly superior magnetic properties, main drawback of magnetic nanomaterials use is their very high price, reaching even 13600 \$/kg [29]. The cost of single fracturing with magnetic nanomarker can be then up to 3 billion \$/well [29]. In the case of ferrofluid (liquid made of ferromagnetic particles with size of a few to dozens nanometers, suspended in a dispersing fluid, which is usually water, mineral oil, synthetic oil, hydrocarbons or fluorohydrocarbons [16]), it can be expected, that the price doesn't have to be as high as in case of nanoferrites. However, a factor that prevents their widespread use in hydraulic fracturing is too small ferrofluid durability in extremely difficult chemical and geological fracturing conditions.

As mentioned above, it now seems, that the best material, that meets the requirements for a potential marker magnetic are "soft" ferrites. However, due to insufficient mechanical strength of the magnetic marker, ferrite can't easily replace the conventional proppants in the fracturing fluid. However, it is possible to produce magnetic-proppant composite, performing both the roles of the proppant and the magnetic marker. Currently, research on obtaining the magnetic proppants, involves a great interests.

#### **4. Fracturing fluid environmental pollution**

Hydraulic fracturing is a multistep process. During each of these stages, leakage may exist and consequently, the penetration of the fracturing fluid into the water and soil environment may happen. The most serious fracturing fluid leakage consequences can be: during its preparation and storage, during the introduction into the wellbore, during pumping the flowback fluid from wellbore and also during treatment and disposal of flowback fluid.

As a result of the leakage, fracturing fluid and all of its components are introduced into environment. Environmental threat is associated with the amount of fluid introduced into the environment and the chemical compounds - the components of the fracturing fluid [44]. The environmental pollution range can be determined with a number of conventional chemical laboratory methods. However, due to considerable time-consuming and cost ineffectiveness of chem-

ical laboratory methods, much faster and cheaper magnetic measurements methods, especially magnetometric ones, deserves special attention. Magnetic measurements allow for easy detection of the magnetic marker, also in the field, in the case of fracturing fluid environmental pollution.

## 5. Magnetometry

Magnetometry is a surface, noninvasive geophysical method in which the object of measurement is magnetic susceptibility [25]. It is sufficiently accurate method to detect magnetic anomalies caused by both natural and anthropogenic factors, resulting from the accumulation of magnetic particles. This method was originally used primarily to assess the precipitation of municipal and industrial dust onto the surface layers of soil and sludge. Dusts containing magnetic particles are emitted into the atmosphere from a variety of pollution sources, and then deposited in the surface layer of soil [14, 37-42, 48]. These particles of anthropogenic origin, can be relatively easily detected, due to their magnetic properties by magnetometric methods. One of field magnetometric measurement devices is shown in Fig. 1.

Today, the spectrum of field magnetometry applications, due to advantages of the method, is rapidly expanding. It should be noted, however, that although soil magnetometry is a fast and inexpensive geophysical alternative to time-consuming and expensive laboratory tests, it requires a lot of experience in practical use [25, 39, 48, 52].



Fig. 1. Magnetic susceptibility measurements in soil profile with SM-400 device

Rys. 1. Pomiar podatności magnetycznej w profilu glebowym miernikiem SM-400

## 6. Magnetometric methods use for fracturing fluid environmental pollution monitoring

In the case of using magnetic marker during hydraulic fracturing to determine the range of fracturing, the same marker can be also used to determine the possible water and soil environmental pollution with the fracturing or flowback fluid.

Magnetometric measurements should be performed in the immediate vicinity of the planned well and in the fracturing fluid transport corridor. The proposed density of the measuring grid, should be appropriately matched to the local conditions and their spatial variability to obtain reliable values of the magnetic background, prior to the exploitation of shale gas. In order to control the fracturing fluid pollution level, the following magnetometric monitoring scheme is proposed:

- Preliminary measurements, before any fracturing-related works, in order to determine the geochemical magnetic background,
- Control measurements, during the drilling, indicating the potential impact of excavated material on the soil surface layer,
- Control measurements, after the completion of the drilling and removal of all equipment and drilling installations,
- Measurements after hydraulic fracturing and removal of the flowback fluid,
- Final measurements at the end of exploitation and land reclamation.

Magnetometric measurements can be performed either using a portable field magnetometer, as well as the use of laboratory magnetometers [14, 25, 39, 52], based on field collected soil cores with the use of e.g. HUMAX probe. Exemplary field magnetometric measurements are shown in Fig. 2.



Fig. 2. Magnetometric monitoring by means of MS2D Bartington gauge

Rys. 2. Monitoring magnetometryczny gleby za pomocą miernika MS2D Bartington

After each stage measurement should be done, to determine spatial distribution of the measured parameters. Calculations using specialized statistical and geostatistical software should be performed in order to monitor changes in soil's spatial magnetic parameters during the exploitation of shale gas. Based on the high density grid, soil magnetic susceptibility high-resolution spatial distribution can be estimated by means of selected GIS (Geographic Information System) [33] or geostatistical methods, including those that enable the integration of data from various sensors (*co-kriging, co-simulation*) [47, 48]. In addition to the soil magnetic susceptibility spatial distribution, maps of probability, showing the probability of exceeding a critical concentration of magnetic markers associated with soil contamination, may be created. For areas within creased soils magnetic susceptibility or calculated high probability of contamination, it is proposed to perform further (secondary) measurements, using e.g. GRAD 601-2 magnetometer, with a maximum penetration depth 200cm. Fast and precise magnetic susceptibility measurements in soil profiles may be also achieved by using a SM-400 sensor. Therefore, it may be also used, to determine the three-dimensional spatial distribution of the magnetic markers in the whole soil layer near the shale gas well. Thanks to above-mentioned advantages of magnetometric methods the spatial distribution of soils magnetic susceptibility could be determined often as desired, that allows the spatiotemporal analysis of soil contamination, at the shale gas exploitation site.

## 7. Polluted soil and flowback fluid treatment

There are many conventional methods of contaminated soil remediation and wastewater treatment, that does not require the use of magnetic markers. These methods, however, are very often associated with the formation of large quantities of wastes or introduction into the effluent considerable amounts of salts.

The use of magnetic markers to determine the possible pollution of soil, can also be useful for the of flowback fluid treatment [20]. When the fracturing fluid comprises a ferrofluid, strong external magnetic field might be applied to separate magnetic particles from the flowback fluid [18]. In a similar way, magnetic proppant unused during the fracturing process can be recovered from the flowback fluid. After separation and cleaning, it could be returned for re-fracturing, with a new portion of fresh fracturing fluid.

Magnetic particles e.g. ferrites or magnetite, could also be used for the flowback fluid treatment. The magnetic particles could be used primarily to remove heavy metals and radionuclides [18]. For this purpose, adsorption processes on the surface of the magnetic material would be used.

Another mechanism that may be used for treatment, are catalytic properties of iron compounds contained in the magnetic materials. In this case two catalytic mechanisms could be considered. The first one is heterogeneous catalysis mechanism, due to the presence of the solid magnetic phase dispersed in treated flow-



back fluid. On the surface of the solid phase, several processes involving: oxidation and reduction of pollutants and metal catalyst, precipitation and coprecipitation the hydrated metals oxides and hydroxides, adsorption and coagulation [32], will overlap. The second ongoing mechanism is the homogeneous catalysis. Dissolved in the acidic environment iron-containing minerals, released  $\text{Fe}^{2+}$  ions to the solution, becomes a Fenton/pseudo-Fenton reaction activator [30].

## 8. Conclusions

Magnetic materials added to proppants, may act as the magnetic marker during the hydraulic fracturing process, enabling to determine the extent of fractures. In the case of leakage and consequently fracturing fluid pollution, magnetic markers added to fracturing fluid will be introduced into the soil environment. Therefore, the presence of magnetic markers in the soil and thus the other components of the fracturing fluid, could be determined by magnetometric methods, which are much cheaper and faster than the traditional laboratory chemical ones.

Application of magnetometric methods, will allow to determine precisely the area of fracturing fluid leakage. Moreover, thanks to its soft magnetic properties, the magnetic marker could be separated from the flowback fluid by application of external magnetic field, thereby making possible magnetic marker reuse in other fracturing, that decrease costs of the process. In addition, the catalytic properties of the magnetic marker, could be used for flowback fluid treatment, using heterogeneous and homogenous Fenton/pseudo-Fenton catalytic mechanisms.

### *Acknowledgment*

*This work was supported by the Polish National Research and Development Center (NCBiR) under grant: BLUE GAS II, EMPROP: Electromagnetic method to estimate penetration of proppant in the fracturing process.*

### **Literature**

- [1] Attendorn HG., Bowen R.: Radioactive and Stable Isotope Geology, Chapman & Hall, London, 1997.
- [2] Baranzelli C., Vandecasteele I., Barranco R.R., Rivero I.M., Pelletier N., Batelaan O., Lavalley C.: Scenarios for shale gas development and their related land use impacts in the Baltic Basin, Northern Poland, Energy Policy, 84, 2015, pp. 80-95.
- [3] Barron A.R., Skala R.D., Coker C.E., Chatterjee, D.K., Xie Y.: Method of Manufacture and the Use of a Functional Proppant for Determination of Subterranean Fracture Geometries, Patent US 2009/0288820 A1, 2009.
- [4] Barron A.R., Tour J., Busnaina A., Jung Y., Somu S., Kajm M., Potter D., Resanco D., Ullo J.: Big things in small packages, Oilfield Review. 22 (3), 2010, pp. 38-49.

- [5] Barron A.R., Potter D.K., Maguire-Boyle S.J., Pena E., Morrow L.: Methods, Apparatus, and Sensors for Publication Classification Tracing Frac Fluids in Mineral Formations, Production Waters, and the Environment Using Magnetic Particles, Patent US 2014/0357534 A1, 2014.
- [6] Bicerano J.: Proppants Coated with Piezoelectric or Magnetostrictive Materials, or by Mixtures or Combinations Thereof, to Enable Their Tracking in a Downhole Environment, Patent no US 2010/0038083 A1, 2010.
- [7] Bogacki J., Zawadzki J.: The influence of ferrite particle size on the quality of the magnetic marker in shale gas hydraulic fracturing, *Systemy wspomagania w inżynierii i produkcji. Review of problems and solutions*, 3 (15), 2016, pp. 25-33.
- [8] Borglin S.E., Moridis G.J., Becker A.: *Magnetic Detection of Ferrofluid Injection Zones*. Lawrence Berkley National Laboratory, Berkley, 1998.
- [9] Byerlee, J.D., Johnston, M.J.S.: A magnetic method for determining the geometry of hydraulic fractures, *Pageoph* 114, 1976, pp. 425-433.
- [10] Chen S.: Precision Making of Subsurface Locations, Patent no US 2012/0234533 A1, 2012.
- [11] Cocuzza M., Pirri C., Rocca V., Verga F.: Current and future nanotech applications in the oil industry. *American Journal of Applied Sciences*. 9 (6), 2012, pp. 784-793.
- [12] Curtis J.B.: Fractured shale-gas systems, *AAPG Bulletin*, 86, 2002, pp. 1921-1938.
- [13] Ersoz H.V.: Use of Magnetic Liquids for Imaging and Mapping Porous Subterranean Formations, Patent US 2014/0041862 A1, 2014.
- [14] Fabijańczyk P., Zawadzki J., Magiera T., Szuszkiewicz M.: A methodology of integration of magnetometric and geochemical soil contamination measurements, *Geoderma* 277, 2016, pp. 51-60.
- [15] Ferronato M., Gambolati G., Teatini P., Baù D.: Radioactive marker measurements in heterogeneous reservoirs: numerical study, *International Journal of Geomechanics*. 79, 2004, pp. 79-92.
- [16] Frycz M.: Wpływ temperatury i stężenia cząstek magnetycznych Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> na wartość gęstości ferrocieczy wykonanej na bazie oleju silnikowego, *Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Gdyni*, 64, 2010, pp. 51-58.
- [17] Gandossi L.: An Overview of Hydraulic Fracturing and Other Formation Stimulation Technologies for Shale Gas Production, Report EUR 26347 EN, Institute for Energy and Transport, European Commission, 2013.
- [18] Giakisikli G., Anthemidis A.N.: Magnetic materials as sorbents for metal/metalloid preconcentration and/or separation. A review, *Analytica Chimica Acta*, 789, 2013, pp. 1-16.
- [19] Guire de E.: Shale gas recovery—Engineering a big business, *American Ceramic Society Bulletin*, 93 (1), 2014, pp. 27.
- [20] Henley D.: Process for single system electrocoagulation, magnetic, cavitation and flocculation (EMC/F) treatment of water and wastewater, Patent US 2013/0161262 A1, 2013.
- [21] Huh C., Nizamidin N., Pope G.A., Milner T.E., Wang B.: Hydrophobic Paramagnetic Nanoparticles as Intelligent Crude Oil Tracers, Patent WO 2014123672A1, 2014.

- [22] Javadpour F., Fisher D., Unsworth M.: Nanoscale Gas Flow in Shale Gas Sediments, *Journal Of Canadian Petroleum Technology*, 46, 2007, pp. 55-61.
- [23] Koniecznyńska M., Woźnicka M., Antolak O., Janica R., Lichtarski G., Nidental M., Otwinowski J., Starzycka A., Stec B., Grzegorz W.: *Badania Aspektów Środowiskowych Procesu Szczelinowania Hydraulicznego Wykonanego W Otworze Łebień LE-2H*, Państwowy Instytut Geologiczny, Warszawa, 2011.
- [24] Liang F., Sayed M., Al-Muntasheri G.A., Chang F.F., Li L.: A comprehensive review on proppant technologies, *Petroleum* 2015, pp. 1-14.
- [25] Magiera T., Zawadzki J.: Magnetometria glebowa – nowe narzędzie geofizyczne do oceny zanieczyszczenia gleb, *Geofizyka. Biuletyn Informacyjny PBG*, 2, 2006, pp. 74-90.
- [26] Maramatsu S., Takasugi S., Osato K.: Three-dimensional Detection System for Detecting Fractures and Their Distribution in the Earth Crust Utilizing an Artificial Magnetic Field and Magnetic Particle Tracer, US Patent No. 5151658, 1992.
- [27] Meng Q.: Spatial analysis of environment and population at risk of natural gas fracking in the state of Pennsylvania, USA, *Science if the Total Environment* 515-516, 2015, pp. 198-206.
- [28] Meyer T.J.: Mapping and Monitoring of Hydraulic Fractures Using Vector Magnetometers, Patent US 2015/0268373 A1, 2015.
- [29] Morrow L., Potter D.K., Barron A.R.: Detection of magnetic nanoparticles against proppant and shale reservoir rocks, *Journal of Experimental Nanoscience*. 10 (13), 2014, pp. 1028-1041.
- [30] Munoz M., de Pedro Z.M., Casas J.A., Rodriguez, J.J.: Preparation of magnetite-based catalysts and their application in heterogeneous Fenton oxidation – A review, *Applied Catalysis B: Environmental*, 176-177, 2015, pp. 249-265.
- [31] Nguyen, P.D., Weaver, J.D., Bartom, J.A.: Method of Tracking Fluids Produced from Various Zones in Subterranean Wells. Patent US 6,725,926 B2, 2004.
- [32] Norena L.E., Wang J.A.: *Advanced Catalytic Materials - Photocatalysis and Other Current Trends*, InTech, DOI: 10.5772/60491, 2016.
- [33] Pękala A., Głowienka E.: Badania korelacji pierwiastków śladowych w środowisku glebowo-roślinnym przy zastosowaniu metod GIS, *Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury – Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, JCEEA, 63 (2), 2016, pp. 209-219, DOI: 10.7862/rb.2016.123.
- [34] Potter D.K., Barron A.R., Maguire-Boyle S.J., Orbaek A.W., Ali A., Harrison L.: Magnetic Particles for Determining Reservoir Parameters, Patent WO2011153339, 2011.
- [35] Rogala A., Krzysiek J., Bernaciak M., Hupka J.: Non-aqueous fracturing technologies for shale gas recovery, *Physicochemical Problems of Mineral Processing*. 49 (1), 2013, pp. 313-322.
- [36] Saaba B.: Potential Treatment Options for Hydraulic Fracturing Return Fluids: A Review, *ChemBioEng Revs*. 1 (6), 2014, pp. 273-279.
- [37] Strzyszczyński Z.: Magnetic susceptibility of soils in the areas influenced by industrial emissions. [W:] R. Schulz (Ed.), *Soil Monitoring*. Monte Verita. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, pp. 255-269.

- [38] Strzyszczyk Z., Magiera T., Heller F.: The influence of industrial emissions on the magnetic susceptibility of soils in Upper Silesia, *Studia Geophysica et Geodaetica*, 40, 1996, pp. 276-286.
- [39] Strzyszczyk Z., Magiera T.: Heavy metal contamination and magnetic susceptibility in soils of southern Poland, *Physics and Chemistry of the Earth*, 23, 1998, pp. 1127-1131.
- [40] Strzyszczyk Z., Magiera T.: Chemical and mineralogical composition of some ferromagnetic minerals occurring in industrial dusts and contaminated soils, *Mitteilungen der Deutschen Bodenkundlichen Gesellschaft*, Bd.96 (H.2), 2001a, pp. 697-698.
- [41] Strzyszczyk Z., Magiera T.: Magnetic susceptibility measurement on ombrothrophic peat in monitoring of industrial immision, *Archives of Environmental Protection*, 27, 2001b, pp. 141-167.
- [42] United States House of Representatives Committee on Energy and Commerce Minority Staff, *Chemicals Used in Hydraulic Fracturing*, 2011.
- [43] Urbanik M., Tchórzewska-Cieślak B.: Ecological aspects of the natural gas use, *Czasopismo Inżynierii Łądowej, Środowiska i Architektury – Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, JCEEA, 62 (1), 2015, pp. 409-417, DOI: 10.7862/rb.2015.29.
- [44] US EPA Plan to Study the Potential Impacts of Hydraulic Fracturing on Drinking Water Resources, US Environmental Protection Agency, Office of Research and Development, Washington, D.C, 2011.
- [45] Wilt M., Sen P.: Electromagnetic Imaging of Proppant in Inducted Fracturing, Patent US 2014/0374091A1, 2014.
- [46] Yuan J., Luo D., Feng L.: A review of the technical and economic evaluation techniques for shale gas development, *Applied Energy* 148, 2015, pp. 49-65.
- [47] Zawadzki J.: *Metody geostatystyczne dla kierunków przyrodniczych i technicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2011.
- [48] Zawadzki J.: Wykorzystanie metod geostatycznych w badaniach środowiska przyrodniczego, *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Inżynieria Środowiska*, 3-134, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2005.
- [49] Zawadzki J., Bogacki J.: Rozwój technologii magnetycznych w wydobywaniu gazu łupkowego, *Systemy wspomaganie w inżynierii produkcji. Górnictwo, Perspektywy i zagrożenia* 1 (13), 2016a, pp. 25-37.
- [50] Zawadzki J., Bogacki J.: Smart magnetic markers use in hydraulic fracturing, *Chemosphere*, 162, 2016b, pp. 23-30.
- [51] Zawadzki J., Bogacki J.: On the possibility of magnetic nano-markers use for hydraulic fracturing in shale gas mining, *Geophysical Research Abstracts*, 18, 2016c, EGU2016-6749-1.
- [52] Zawadzki J., Fabijańczyk P., Magiera T., Rachwał M.: Geostatistical microscale study of magnetic susceptibility in soil profile and magnetic indicators of potential soil pollution. *Water, Air, & Soil Pollution* 226 (5), 2015, pp. 1-8.

## ZASTOSOWANIE MARKERÓW MAGNETYCZNYCH DO MONITORINGU ZANIECZYSZCZENIA ŚRODOWISKA PŁYNEM SZCZELINUJĄCYM PODCZAS EKSPLOATACJI GAZU ŁUPKOWEGO

### Streszczenie

Materiały magnetyczne dodawane do płynu szczelinującego jako marker magnetyczny, mogą w procesie szczelinowania hydraulicznego pełnić dodatkowe funkcje, oprócz umożliwienia określenia zasięgu szczelin w skałach złożowych wytwarzanych w tym procesie. Ocenia się, że zastosowanie odpowiednich markerów magnetycznych może znacznie poprawić wydajność wydobycia gazu łupkowego. Istnieją jednakże inne, istotne korzyści z zastosowania markerów magnetycznych, polegające na monitoringu zanieczyszczenia środowiska w trakcie wydobycia gazu łupkowego omawianą metodą. Niestety, wraz z gwałtownym wzrostem ilości wydobywanego gazu łupkowego, z zastosowaniem metody szczelinowania hydraulicznego, pojawiły się również wiarygodne doniesienia o możliwości zanieczyszczenia wód podziemnych lub gleby, w trakcie tego procesu. Konieczne jest więc zastosowanie skutecznych metod wykrywania potencjalnego wycieku płynu szczelinującego. Stosowanie markerów magnetycznych daje takie możliwości. W przypadku wystąpienia wycieku i w konsekwencji zanieczyszczenia środowiska płynem szczelinującym, również markery magnetyczne zostają wprowadzone do środowiska gruntowego. Obecność zanieczyszczeń w gruncie można stwierdzić za pomocą wielu standardowych metod chemicznych. Ze względu na znaczną czasochłonność i kosztochłonność bezpośrednich metod laboratoryjnych, na uwagę zasługują znacznie szybsze i tańsze metody magnetometryczne, które pozwalają na łatwe, *in-situ*, wykrycie markera magnetycznego w ewentualnym wycieku. W artykule omówione zostaną wspomniane powyżej zagadnienia na podstawie przeglądu literaturowego oraz wiedzy i doświadczenia autorów.

**Słowa kluczowe:** markery magnetyczne, gaz łupkowy, szczelinowanie hydrauliczne, zanieczyszczenie środowiska, metody magnetometryczne, podatność magnetyczna

*Przesłano do redakcji: 20.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Andrzej CIŃCIO<sup>1</sup>  
Jan FEDOROWICZ<sup>2</sup>

## ANALYSIS OF WALL STRUCTURES SUBJECTED TO MINING DISCONTINUOUS DEFORMATIONS

The paper presents a simplified methodology for the analysis of static building construction longwall when within the horizontal projection of the foundation can find a local threshold or a fault area. It shows the formulation of the basic assumptions of work and provides theoretical considerations leading to the determination of additional load rigid structure located above the gap. Then formulated a way that the separation of the designated load spatial body of the building on each side of the building. The results were confronted with the results of the analyzes of numerical aspects of behavior of buildings on the emerging facet of land in the form of a threshold. Analyzed the structures of rigid construction, constructed in accordance with the principles set out in the guidelines. The analysis was performed by MES with the program Abaqus and the Robot program. It adopted with the assumption that the fault coverage will not exceed the defined work called. critical distance. In the construction of the model surface mining in addition to the model of linear-elastic and model Winkler's used for substrates simplest models of the material elastic-plastic - model of the surface of plasticity in the form of a condition Coulomb-Mohr and Drucker-Prager, and model the mechanics of the critical state of Modified-Cam-Clay.

**Keywords:** Influences mining, buildings in mining area, numerical analysis, constitutive models of soil, Modified Cam-Clay

### 1. Introduction

Mining, irrespectively of the pace and depth, always exerts negative impact on the land development. Loads of buildings caused with such impacts differ in character, direction, range of action and frequency of occurrence from loads to which buildings are designed in steady areas. Deforming ground base generally causes creation of additional internal forces in the building, resulting mainly from ground friction against the foundations or its pressure onto vertical elements of the building plunged into soil, influence of various vertical and hori-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Andrzej Cińcio, Politechnika Śląska, Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych, ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice; andrzej.cincio@polsl.pl

<sup>2</sup> Jan Fedorowicz, Wyższa Szkoła Techniczna, Wydział Architektury, Budownictwa i Sztuk Stosowanych, ul. Rolna 43, 40-555 Katowice; jankfedorowicz@gmail.com

zontal displacements of the soil and inclination of the land. While considering the problems of housing construction on mining areas one mainly thinks of designing new buildings and adapting such buildings to the expected land deformations already in the designing phase. However, the impact of mining onto the existing buildings is an equally important and broad issue concerning the housing construction on mining areas. Mining of shallowly-seated deposits or intensive mining may cause occurrence of local disorders of land surface continuity in a form of for example thresholds, slits, stepped parts or craters (Fig. 1). Such phenomena affect mainly all land which is unfavourably "geologically conditioned" for example areas of outcrops and natural tectonic subsidence when there is threat that subsequent exploitation will naturally start processes of rock layers sliding or cause flow of underground waters to old excavation sites.

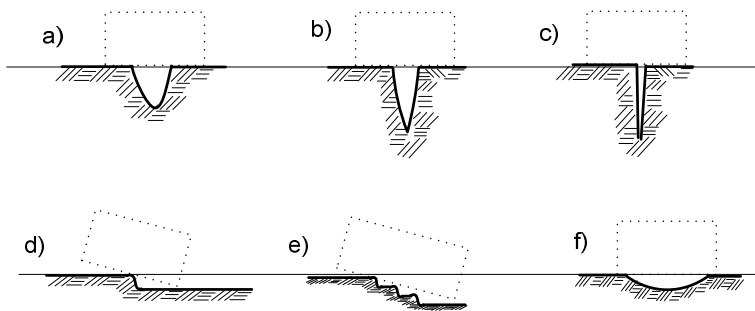


Fig. 1. Types of deformation of the discontinuous surface a) sink hole, b) funnel, c) gap, d) and e) ground braces, f) local sink

Rys. 1. Rodzaje deformacji nieciągłych powierzchni terenu, a) zapadlisko, b) lej, c) szczelina, d) i e) progi, f) zapadlisko lokalne

Taking into account the possibility of protecting the building object against the occurrence of a state threatening the safety of users we have to eliminate catastrophic-like deformations such as craters or landslides of several meters depths. Nevertheless, it seems that such cases were always connected with erroneous exploitation and overexploitation of deposits.

Still, there are some areas where thresholds and stepped parts are the only form of local deformations. They are usually the consequence of subsequent exploitation which as a result of the existing, appropriate geological conditions starts the processes of for example removal of affected rock formations or flow of underground water to old goafs. Then, if there is a risk of creation of stepped parts or thresholds on the surface, running within the reach of buildings location, one must consider the manner of their protection. In Polish literature there are no elaborations dealing with such issue. Some special cases of the impact of discontinuous deformations on specially protected masonry buildings are considered in works [1-5]. Short elaborations appearing from time to time in technical litera-

ture usually refer to the existing specific situations of threat to buildings with land discontinuity and handle the analysis of possibilities to save the endangered building structure and its repair. As an example, work published in 1990 by Sachs [8] mentions only the problem of forecasting possible landslide deformations in the mining areas. The indications concerning the manner of assessing internal forces in buildings founded on areas with discontinuous deformations are included only in Russian [10] and Ukrainian [11] publications.

This work includes a certain, simplified methodology, previously presented in works [1-5], of conducting static analysis of wall-structure buildings in situation when a local threshold or stepped parts can be found within the horizontal projection of their foundations [6] - as shown in Fig. 2. The formulation of basic work assumptions was presented as well as some theoretical considerations were given that allow defining additional loads of a rigid building to be found over the stepped part. Next, the manner of distributing the specified load of building's spatial block onto particular walls of the building was presented.

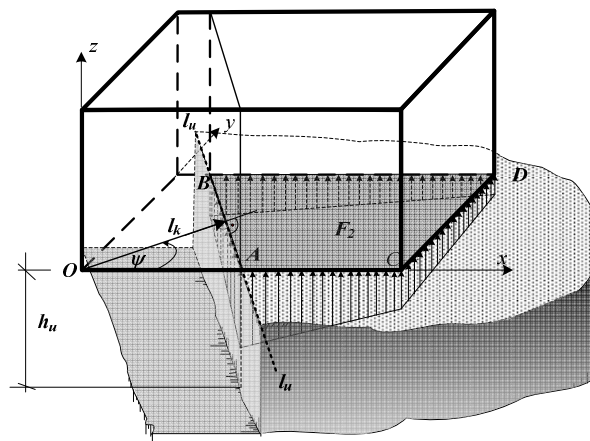


Fig. 2. Scheme of the analyzed case of the building's position on the stepped

Rys. 2. Schemat analizowanego przypadku położenia budynku nad uskokiem

The final part of the work was devoted to the presentation of numeric calculations on FEM models of the structure-subsoil system, both the simplest ones defined with linear and elastic model (e) or with the use of parametric Winkler's base, as well as the advanced ones - physically non-linear where the base was modelled with the use of the following models: Coulomb-Mohr (C-M), Drucker-Prager (D-P) and Modified Cam-Clay (MCC). The received results of numerical calculations in the form of stress diagrams for the structure were compared with values reached on the basis of the presented models. Finally, conclusions were



formed allowing to the use of information included herein when designing the wall structure in conditions of possible occurrence of discontinuous area deformations.

## 2. Analysis assumptions

The following initial assumptions were considered herein:

- analysis is performed of wall-structure buildings, designed as rigid according to designing guidelines [7,9],
- buildings threatened with occurrence of discontinuous deformations within the horizontal projection such as threshold or stepped part may be protected in a manner enabling to users safe transfer of loads by the structure,
- the direction of edges of possible stepped part (threshold) is defined within the permitted error as a result for example of geological conditions. Real parallel position of stepped part edges has a random character, though. Moreover, it is expected, that the position shall not exceed the so called critical position of the stepped part,
- the subsoil model shall be linear elastic one parameterized with the vertical elasticity coefficient  $C_o$  [7, 9].

Numerical analysis herein was conducted with the following assumptions:

- the length of the stepped part edge  $l_u$  (Fig. 2) is large enough to analyse the behaviour of subsoil as in the task of the state of the plain strain (PSO),
- the range of the stepped part  $l_k$  (Fig. 2) does not exceed the so called "critical value" adopted herein, and the height of the stepped part  $h_u$  is sufficient for the part of the building, with the specific value  $l_k$ , to "hang" over the stepped part, without the contact with subsoil,
- the structure is modelled as a substitute full block made of linear elastic material (e) in flatwise of the state tensile strength (PSN) or the state of the plain strain (PSO) with specified stiffness defined with the elastic material parameter  $E_b$ ,
- in the structure there is analysis of extreme generalized crosscutting forces (bending moments  $M_{zg}$  and lateral forces  $Q_b$ ) indicated on the basis of distribution of horizontal stress state  $\sigma_{11}$  and shear stress  $\sigma_{12}$  (and their change over the structure length) as well as deformation of the structure,
- load of the structure constitutes dead weight and payload (eg. shown in Fig. 2) and in all analyzed cases is assumed as unchanged,
- the appearance of the stepped part in non-linear tasks is modelled through gradual removal of particular finite elements or finite elements groups) in the calculation model during the analysis, in separate incremental step, upon completion of the process of its loading,
- in order to eliminate the impact on internal forces of minor subsoil thrust forces during deformation of the structure in the initial phase of numerical

analysis, firstly, finite elements are removed along vertical sides of the deepened structure.

The applied term: "critical position of the stepped part" shall be understood as the final possible position of the stepped part edge, where the building shall "hang" over the stepped part, without the occurrence of rotation as a rigid block (Fig. 2).

### 3. Formulation of the problem and its analytical solution

Let's analyze any horizontal projection of the building, described in a global coordinate system  $(x,y,z)$  – Fig. 3. Let's assume that the resultant  $Q$  of building loads - dead weight and payload is located in point  $\Gamma(\Delta_x, \Delta_y)$ . Let's assume position of the stepped part edge  $l_u$  described with distance  $l_k$  from the beginning of the coordinate system  $(x,y,z)$  and angle  $\psi$ , included between line  $l_k$  perpendicular to line  $l_u$  and axis  $Ox$ . Let the stepped part edge  $l_u$  divide the building's horizontal projection area into two parts:  $F_1$  – part deprived of contact with subsoil and  $F_2$  – intermediating in transferring load  $Q$  to subsoil.

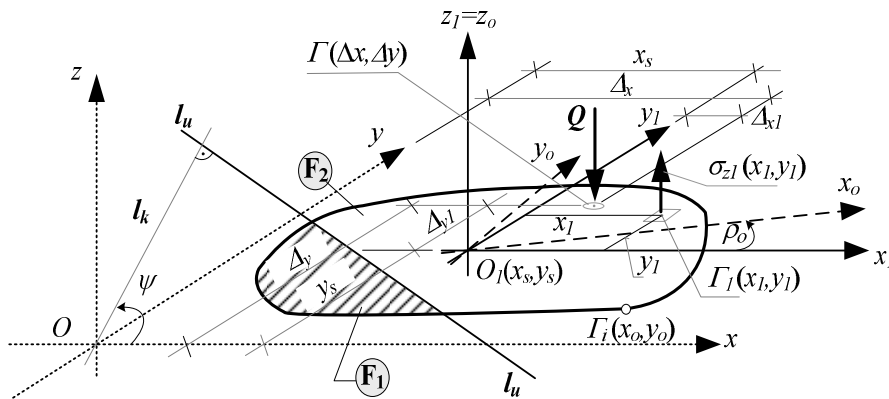


Fig. 3. System of forces load and load balancing operation structure  $Q$

Rys. 3. Układ sił obciążenia i równoważących działanie obciążenia budowli  $Q$

Let's choose any point  $O_1(x_s, y_s)$  in part  $F_2$  as the beginning of new coordinate system  $(x_1, y_1, z_1)$  parallel to system  $(x, y, z)$ . Assuming that the building is a rigid block, the linear elastic impact of subsoil may be approximately described in system  $(x_1, y_1, z_1)$  with equation:

$$\sigma_{z_1}(x_1, y_1) = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \tag{1}$$

Assuming that the rotation of the building in the placement plane (round axis  $Oz_l$ ) is marginal and does not have an impact on changing additional building forces, the general conditions of the building - subsoil system balance may be written (Fig. 3):

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{x_l} = 0 &\Rightarrow \int_{F_2} y_1 \cdot \sigma_{z_l}(x_1, y_1) \cdot dF_2 = Q \cdot (\Delta_y - y_s) \\ \sum M_{y_l} = 0 &\Rightarrow \int_{F_2} x_1 \cdot \sigma_{z_l}(x_1, y_1) \cdot dF_2 = Q \cdot (\Delta_x - x_s) \\ \sum P_{z_l} = 0 &\Rightarrow \int_{F_2} \sigma_{z_l}(x_1, y_1) \cdot dF_2 = Q \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Based on the analysis of system solution form (2) it results that if point  $O_l(x_s, y_s)$  is the centre of gravity of field  $F_2$ , and the coordinate system  $(x_l, y_l, z_l)$  covers the main central coordinate system  $(x_o, y_o, z_o)$  for the part of foundation projection of field  $F_2$  then solution (2) shall have the following form:

$$\begin{aligned} a &= \frac{Q \cdot \Delta_{x_o}}{J_{y_o}^{(2)}}, \\ b &= \frac{Q \cdot \Delta_{y_o}}{J_{x_o}^{(2)}}, \\ c &= \frac{Q}{F_2} \end{aligned} \quad (3)$$

where:

$J_{x_o}^{(2)}, J_{y_o}^{(2)}$  – the moments of inertia of field  $F_2$  with respect to the main central axis of the coordinate system  $(x_o, O_l, y_o)$ ,

$\Delta_{x_o}, \Delta_{y_o}$  – coordinates defining the position of the resultant load  $Q$  in the main central coordinate system  $(x_o, O_l, y_o)$ .

Then, the equation of the subsoil resistance (1) written in the main central coordinate system  $(x_o, O_l, y_o)$  shall have the following form:

$$\sigma_{z_o}(x_o, y_o) = \frac{Q}{F_2} \cdot \left( \frac{x_o}{\left( \frac{J_{y_o}^{(2)}}{F_2 \cdot \Delta_{x_o}} \right)} + \frac{y_o}{\left( \frac{J_{x_o}^{(2)}}{F_2 \cdot \Delta_{y_o}} \right)} + 1 \right) \quad (4)$$

It can be observed that expression (4) has an analogous form to the expression describing the distribution of stress in the cross section of the bar compressed eccentrically. Thus, the expression in the formula bracket (4) defines in the main central coordinate system  $(x_o, O_I, y_o)$  the equation of line along which the elastic subsoil resistance  $\sigma_{z_o}(x_o, y_o)$  is equal zero.

From the presented solution we reckon that for the set direction  $\psi$  of the stepped part, a maximum distance  $l_k$  of the stepped part may be defined that corresponds to critical position of the stepped part at which under the building "hanging" over the stepped part the foundation is not detaching from the subsoil yet. Having settled the critical location of the stepped part on the basis of dependencies (4), though, the full load may be indicated of a building treated as a rigid block, resulting from the appearance of the stepped part. Distributing, on the basis of balance conditions, the indicated load of the building onto particular walls we can define load of each wall independently.

#### 4. Example illustrating indication of forces in the building located over the stepped part

Let's analyze any horizontal projection of the building, described in a global coordinate system  $(x, y, z)$  – Fig. 3. Let's assume that the resultant  $Q$  of building loads - dead weight and payload is located in point  $\Gamma(\Delta_x, \Delta_y)$ . Let's assume position of the stepped part edge  $l_u$  described with distance  $l_k$  from the beginning of the coordinate system  $(x, y, z)$  and angle  $\psi$ , included between line  $l_k$  perpendicular to line  $l_u$  and axis  $Ox$ . Let the stepped part edge  $l_u$  divide the building's horizontal projection area into two parts:  $F_1$  – part deprived of contact with subsoil and  $F_2$  – intermediating in transferring load  $Q$  to subsoil.

We indicate load of building created of four walls with geometry shown in Fig. 4 at occurrence of the stepped part of value  $l_k$  critical at angle  $\psi=0^\circ$ . For calculations, the average pressure of building's foundations onto ground was assumed at the level  $\sigma_z=100 \text{ kPa}$ . With the given foundations projection geometry the vertical elasticity coefficient in acc. with [7, 9] is constant and amounts to  $C_o=0.72E_o$  where  $E_o$  – primary ground deformation module, and the corrected horizontal projection of foundations is identical to the actual projection.

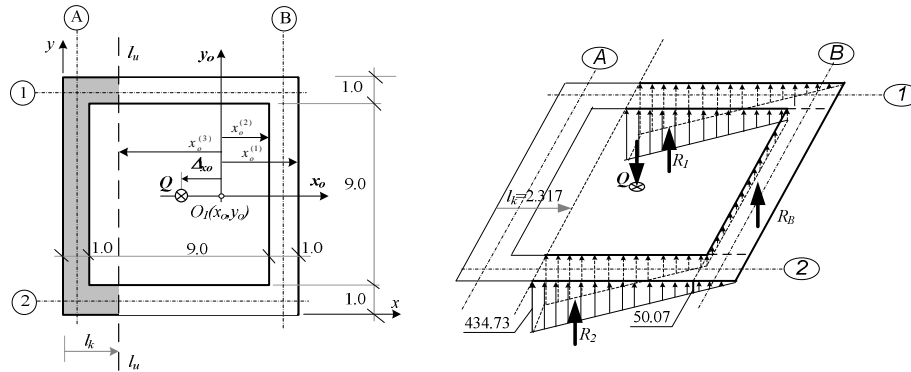


Fig. 4. Scheme of horizontal projection and calculated load of the building

Rys. 4. Schemat rzutu poziomego i wyznaczone obciążenie budynku

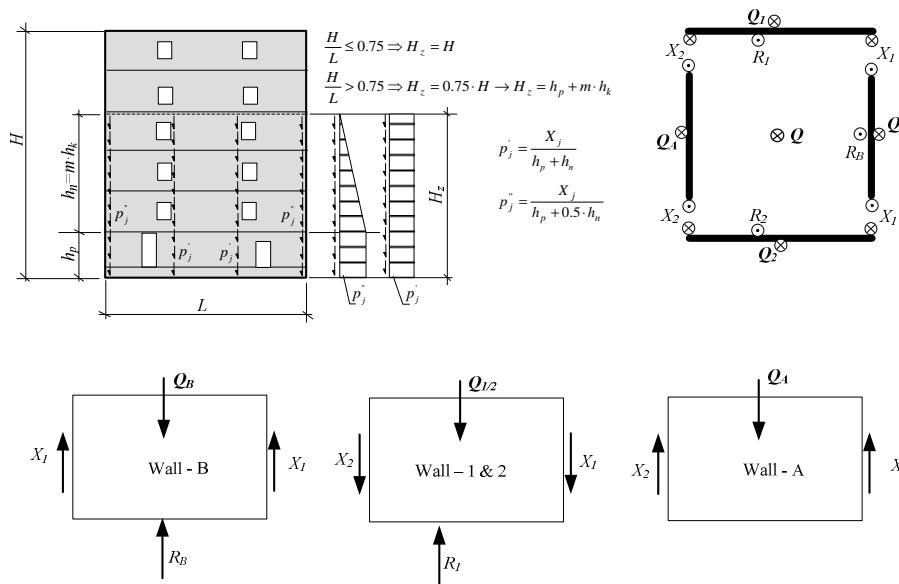


Fig. 5. Distribution of mining load on individual walls of a building

Rys. 5. Rozdział obciążenia górniczego na poszczególne ściany budynku

Next, having divided the analysed 3D spatial arrangement into particular walls (Fig. 5), from the balance conditions we receive loads of particular walls amounting to:  $Q_1 = Q_2 = 1100 \text{ kN}$ ,  $Q_A = Q_B = 900 \text{ kN}$ ,  $X_1 = 337.34 \text{ kN}$ ,  $X_2 = 450 \text{ kN}$ . In the detailed analysis of particular building walls the indicated loads  $X_i$ , depending on the particular walls measurements proportions and intensity of perforation with window or door openings, may be distributed in height for example in a manner suggested in [7, 9]. The details of such distribution are shown in Fig. 5.

### 5. Numerical model of the structure - subsoil and chosen analysis results

The building loads indicated in the previous chapter were compared with values achieved in numerical analysis with the use of FEM and elastic and non-elastic subsoil models.

The geometry of the calculation model was shown in Fig. 6. The calculation model was built through placing a discrete FEM grid composed of square and triangular elements, concentrated in areas of expected increased component gradients of the stress condition.

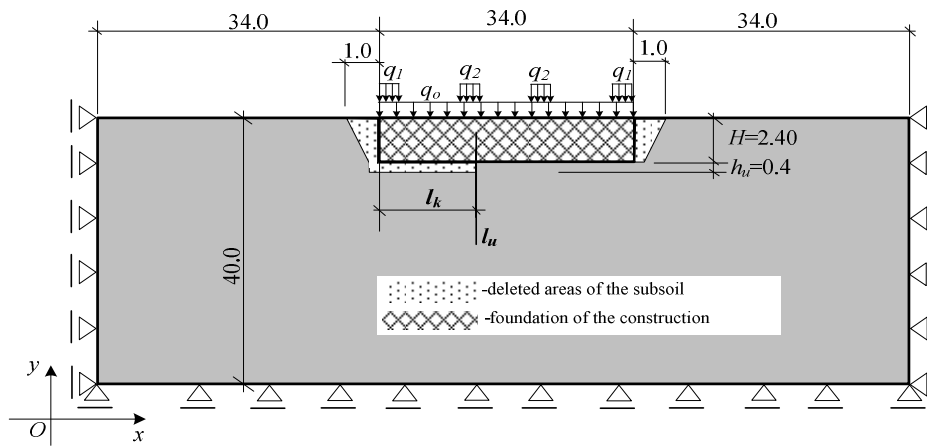


Fig. 6. The geometry of the numerical model of the construction-subsoil

Rys. 6. Geometria modelu obliczeniowego układu budowla-podłoże gruntowe

The character of the discrete grid was shown in Fig. 7. There, on subsequent model fragments: s-1, s-2, s-3, s-4 the simulation course was schematically shown how the landslide appears under the structure in the calculation model. The building was modelled as uniform block of height  $H=2.0m$ , described with elastic material of parameters  $E_b=3.4 \cdot 10^7 \text{ kPa}$  and  $\nu=0.167$ . The structure model load was assumed on the basis of actual engineering design equal to:  $q_0=158 \text{ kN/m}^2$ ,  $q_1=140.1 \text{ kN/m}^2$ ,  $q_2=62.3 \text{ kN/m}^2$  and the specific gravity of the structure material was assumed  $\gamma=25 \text{ kN/m}^3$ .

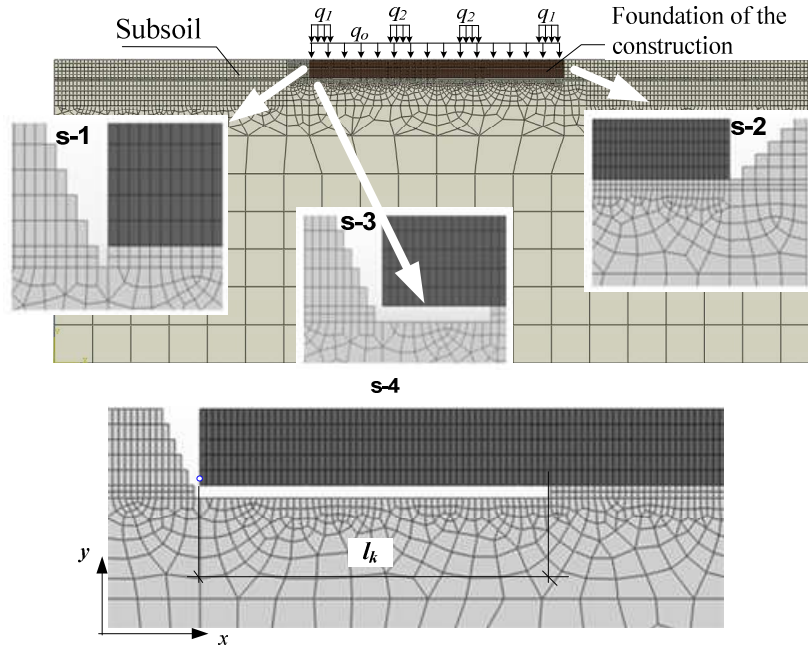


Fig. 7. Discrete mesh and the order of the removal of finite element in the simulation of the formation of landslides

Rys. 7. Siatka modelu obliczeniowego oraz kolejność usuwania elementów skończonych w symulacji powstawania usuwiska

As mentioned in the introduction, the subsoil was modelled with the use of different constitutive models, apart from the linear elastic one (e), also non-linear: Coulomb-Mohr (C-M), Drucker-Prager (D-P) and Modified Cam-Clay (MCC). The values of material parameters adopted in the analysis as well as designations of particular model are included in table 1. In calculations it was assumed that the mining area stepped part will take place in the distance  $l_k=11.2m$  – Fig. 6.

In the following Figures 8 to 10, the distribution of horizontal stress was presented achieved in numerical calculations in the upper extreme horizontal cross-section of the building for particular variants of the model differing in the adopted material models, in comparison to the analytical solution. Designations identifying particular curves of diagrams are included in tab. 1

On the basis of achieved results of numerical analyses it may be assumed that the building stress may be estimated on the basis of the suggested analytical method to solve the problem if the achieved results based on (4) are reduced by about 15-25% which corresponds to values of all internal forces, displacements and deformations multiplied by the reduction coefficient  $\alpha=(0.75\div 0.85)$  – as shown in Fig. 8 to 10.

Table 1. Accepted material parameters used for constitutive models of the subsoil

Tabela 1. Przyjęte parametry materiałowe dla zastosowanych modeli konstytutywnych podłoża gruntowego

Marking on fig. 8-10	Subsoil model	$\phi [^\circ]$	$c [kPa]$	$l_k [m]$	$\nu$	$E_{bud} [kPa]$	$E_{gr} [MPa]$
(e)-a	(e)	Solution of the cantilever length $l_k=8.60 m$ or $l_k=11.20 m$ subjected to distributed load $q_0, q_1$ i $q_2$ from fig. 6.					
(e)-b	(e)	Solution of the rigid beam loaded of subsoil reactions according to (4) for $l_k=11.20 m$ and distributed load: $q_0, q_1$ i $q_2$ from fig. 6.					
(e)-1	(e)	-	-	11.20	0.30	$3.24 \cdot 10^7$	20
(e)-2	(e)	-	-				50
(e)-3	(e)	-	-				100
(D-P)-1	(D-P)	30	5				50
(D-P)-2	(D-P)	40	5				50
(D-P)-3	(D-P)	30	5				100
(D-P)-4	(D-P)	40	5				100
(C-M)-18	(C-M)	20	50				20
(C-M)-19	(C-M)	20	100				20
(C-M)-20	(C-M)	40	5				50
(C-M)-21	(C-M)	20	50	60			
(C-M)-22	(C-M)	20	100	60			
(C-M)-23	(C-M)	40	5	100			
(mcc)-5	(MCC)	30	$e_{cs}=1.788, \kappa=0.0074, \lambda=0.066, M=1.2, K_o^{(NC)}=1-\sin(\phi^i),$	11.20	0.30	$q^*=50 kPa, K_o^{(OC)}$ - according to Wroth's eq. , $\gamma=20 kN/m^3,$	

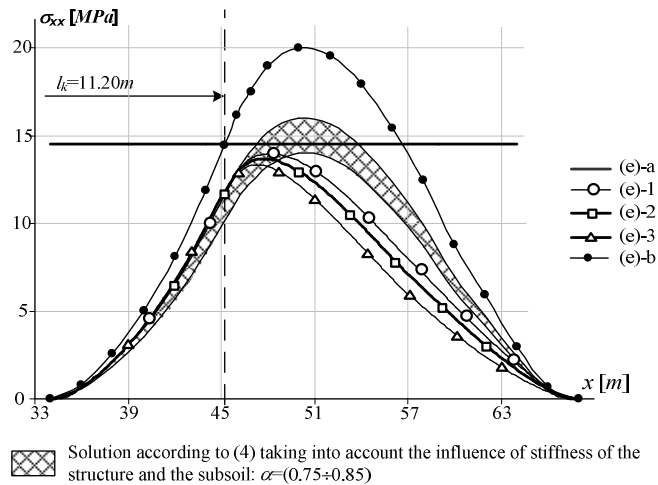


Fig. 8. Subsoil model (e),  $l_k=11.2m$  – change the horizontal normal stress in the upper end horizontal section through the building

Rys. 8. Model podłoża (e),  $l_k = 11.2m$  – zmiana poziomego naprężenia normalnego w górnym skrajnym poziomym przekroju przez budowlę



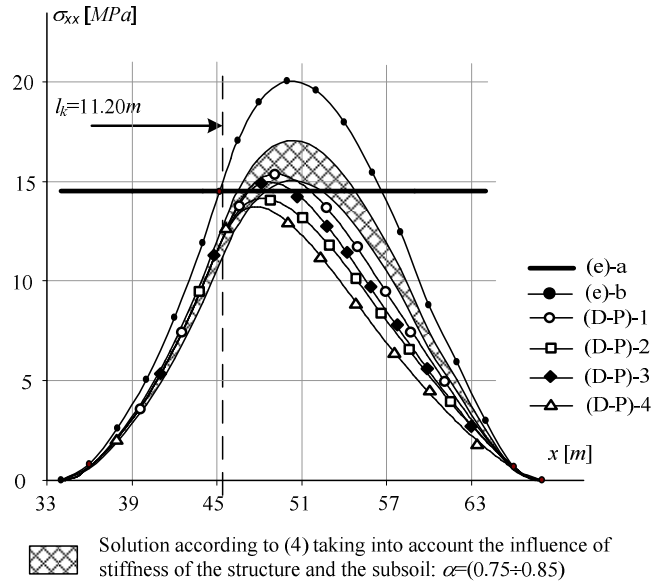


Fig. 9. Subsoil model (D-P),  $l_k = 11.2m$  – change the horizontal normal stress in the upper end horizontal section through the building

Rys. 9. Model (D-P),  $l_k = 11.2m$  – zmiana poziomego naprężenia normalnego w górnym skrajnym poziomym przekroju przez budowlę

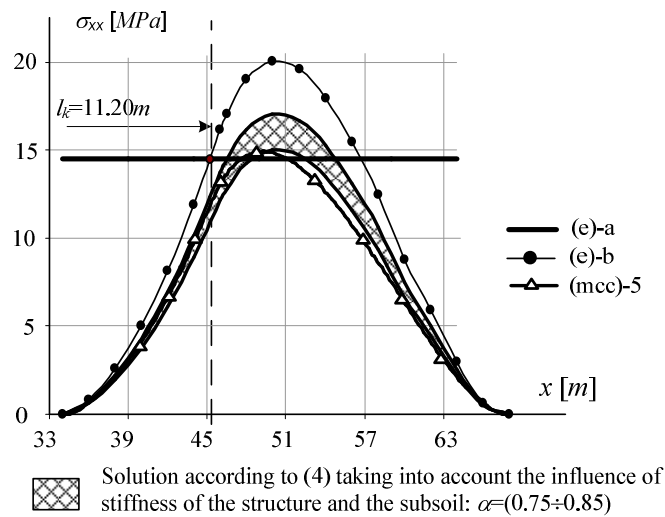


Fig. 10. Subsoil model (MCC),  $l_k = 11.2m$  – change the horizontal normal stress in the upper end horizontal section through the building

Rys. 10. Model (MCC),  $l_k = 11.2m$  – zmiana poziomego naprężenia normalnego w górnym skrajnym poziomym przekroju przez budowlę

### 6. Numerical model of the structure on elastic parametric subsoil and chosen analysis results

The last model presented in the work is a simplified, engineering model of the analysed structure in which the subsoil is represented with a parametric linear elastic Winkler's model (Fig. 11) of several different stiffnesses resulting from the adopted ground deformation modules specified in Fig. 12. The calculations were made in FEM with the use of program Robot.

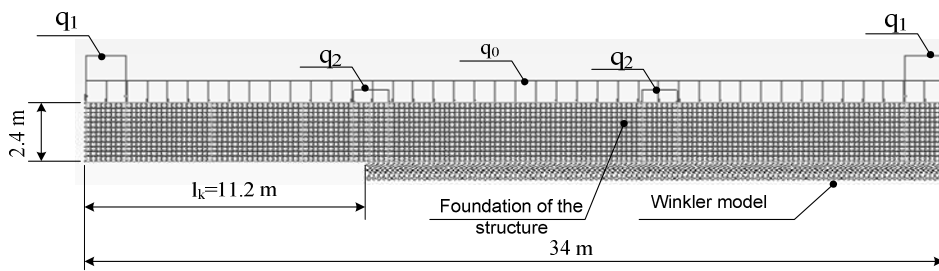


Fig. 11. Diagram of a simplified FEM model in the program ROBOT  
 Rys. 11. Schemat uproszczonego modelu MES w programie ROBOT

Figure 12 presents the numerical calculation-based distribution of horizontal stress in upper fibres of the analyzed wall for length of the stepped part  $l_k=11.2m$  and for different parameters of subsoil stiffness.

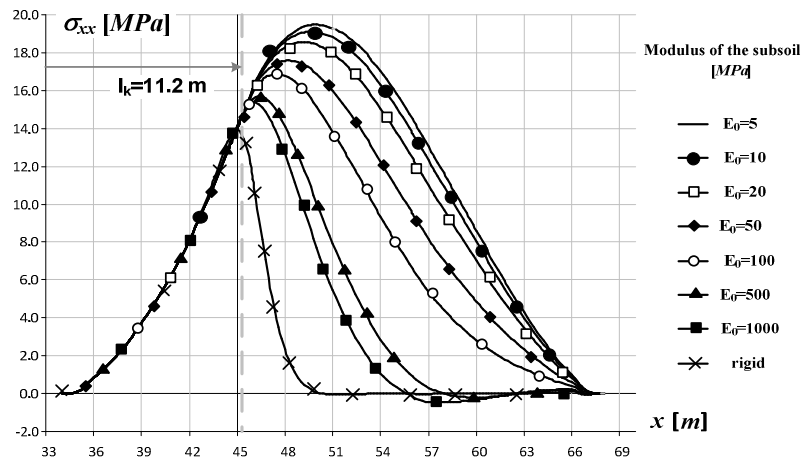


Fig. 12. Winkler subsoil model - change the horizontal normal stress in the upper end horizontal section through the building

Rys. 12. Model podłoża Winklera – zmiana poziomego naprężenia normalnego w górnym skrajnym poziomym przekroju przez budowlę

## 7. Summary

Following the analysis of achieved results, it stems out that the values of horizontal normal stress received on the basis of a solution of the building treated as a rigid block (analytical solution) are greater than the values received on the basis of numerical solutions by about 10-25%. Nevertheless, the values of horizontal normal stress indicated on the basis of elementary support diagram of the building are lower from the proper values resulting from the numerical calculations.

On the basis of the analysis of values of internal forces for the elastic solution it results that the stiffness adopted in the calculations of the elements representing the building, compared to the ground stiffness is so large that its further increasing does not significantly change the solution (Fig. 8). It may also be observed that stress of the building changes for the adopted subsoil model depending on the value of its material parameters only in the defined, slight scope.

Lower values of normal stress achieved in numerical analyses may be interpreted as a result of more accurate model both of the structure as well as the ground model, additionally considering in the second case the inelastic properties of the subsoil.

### *Acknowledgement*

*Numerical analyses were performed at ACK CYFRONET AGH Kraków, based on grant MNiSW/SGI3700/PŚląska/054/2010 and MNiSW/SGI3-700/PŚląska/056/2010.*

### **References**

- [1] Cińcio A., Fedorowicz J., Ruszel B.: Wall-buildings in mining areas of the discontinuous deformations. Part I – theoretical discussion, Proceedings of the 10th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, 3-5 October 2012, Bratislava, p. 17-20.
- [2] Cińcio A., Fedorowicz J., Ruszel B.: Wall-buildings in mining areas of the discontinuous deformations. Part II – numerical analyses, Proceedings of the 10th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, 3-5 October 2012, Bratislava, p. 21-24.
- [3] Fedorowicz L., Fedorowicz J., Cińcio A.: Metoda analizy statycznej ścian budynków mieszkalnych na terenach górniczych o deformacjach nieciągłych. Bezpieczeństwo Pracy i Ochrona Środowiska w Górnictwie nr 1, 1995, s. 36-40.
- [4] Fedorowicz L., Fedorowicz J.: Analiza wyężenia wzmocnienia gorsetowego budynków murowanych na terenach górniczych o deformacjach nieciągłych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Gliwice, seria Budownictwo, z. 84, 1997.
- [5] Fedorowicz L., Fedorowicz J.: Obliczanie budynków mieszkalnych zagrożonych awarią na terenach górniczych o deformacjach nieciągłych. Materiały Naukowo – Technicznej Konferencji „Awarie Budowlane”, Szczecin-Międzyzdroje, maj 1994, t. 2, s. 455÷461.

- [6] Ledwoń J. A.: Budownictwo na terenach górniczych. Arkady, Warszawa 1983.
- [7] Projektowanie budynków na terenach górniczych. Instrukcje, Wytyczne, Poradniki, 416/2006. Wydawnictwo ITB, Warszawa 2006.
- [8] Sachs J.: Prognozowanie deformacji zapadliskowych na terenach górniczych z uwzględnieniem badań geofizycznych. Wydawnictwo ITB, Warszawa 1990.
- [9] Wytyczne projektowania budynków o ścianowym układzie nośnym podlegających wpływowi eksploatacji górniczej. Instrukcja 286. Wydawnictwo ITB, Warszawa 1988.
- [10] Методические указания по проектированию мер защиты эксплуатируемых зданий и сооружений в районах залегания крутопадающих пластов. ВНУМУ, Ленинград 1973.
- [11] Указания по проектированию бескаркасных зданий в центральном районе донбаса на площадях залегания крутопадающих угловых пластов. РСН-227-71. ГКСМ УССР по делам строительства, Донецк 1071.

## ANALIZA KONSTRUKCJI ŚCIANOWYCH NARAŻONYCH NA WPŁYW NIECIĄGŁYCH DEFORMACJI GÓRNICZYCH

### Streszczenie

W pracy przedstawiono uproszczoną metodykę przeprowadzania analizy statycznej budynków o konstrukcji ścianowej w sytuacji, gdy w obrębie rzutu poziomego ich fundamentów może znaleźć się lokalny próg lub uskok terenu. Przedstawiono sformułowanie podstawowych założeń pracy oraz podano rozważania teoretyczne prowadzące do określania dodatkowego obciążenia budowli sztywnej znajdującej się nad uskokiem. Następnie sformułowano sposób pozwalający na rozdzielenie wyznaczonego obciążenia przestrzennej bryły budynku na poszczególne ściany budynku. Uzyskane rezultaty skonfrontowano z wynikami przeprowadzonych analiz numerycznych zagadnienia zachowania się budowli nad powstającym uskokiem terenu w postaci progu. Analizie poddano budowlę o konstrukcji sztywnej, skonstruowane zgodnie z zasadami podanymi w wytycznych. Analizę przeprowadzono metodą MES przy pomocy programu Abaqus oraz programu Robot. Przyjęto przy tym założenie, że zasięg uskoku nie przekroczy zdefiniowanej w pracy tzw. odległości krytycznej. W budowie modelu podłoża górniczego oprócz modelu liniowo-sprężystego oraz modelu Winklera wykorzystano dla podłoża najprostsze modele materiału sprężysto-plastycznego – model z powierzchnią plastyczności w postaci warunku Coulomba-Mohra oraz Druckera-Pragera, a także model mechaniki stanu krytycznego Modified-Cam-Clay.

**Słowa kluczowe:** wpływy górnicze, budynki na terenie górniczym, analizy numeryczne, modele konstytutywne gruntu, Modified Cam-Clay

*Przesłano do redakcji: 20.02.2017 r*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*



Urszula PAWLAK<sup>1</sup>  
Michał SZCZECINA<sup>2</sup>

## DYNAMIC STABILITY CRITERION FOR THE EVALUATION OF A STEEL INDUSTRIAL HALL WITH INTERNAL TRANSPORT

The paper presents the problem of dynamic criterion of stability loss of industrial hall with internal transport. The analysis was performed with finite element method. As a result of the calculation the relationship of eigenfrequency and axial compressive force was presented. On the basis of these results fundamental recommendations formulated for designers of steel halls with internal transport.

**Keywords:** steel halls, internal transport, stability, dynamics

### 1. Introduction

Steel halls are widespread in today's industrial construction. Versatile qualities of steel provide structural engineers and architects with a wide range of opportunities to design a variety of structures from simple portal frames to state of the art projects with non-conventional shapes and functions. The structures are constructed relatively quickly and their price is more attractive than that of masonry buildings. Steel halls can be easily extended and adapted according to the needs of clients [1].

The majority of steel halls are single storey, single or two bay industrial structures. No space divisions (partition walls) are constructed in the longitudinal or transverse direction inside the building. External walls and roof covering define the floor area of the hall, secure the structure against the effects of loads induced by the external environment, and provide required rigidity.

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Urszula Pawlak, Politechnika Świętokrzyska, Wydział Budownictwa i Architektury, 25-314 Kielce; al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7. Tel: +48 41 34-24-803, Fax: +48 41 34-43-784, u.pawlak@tu.kielce.pl

<sup>2</sup> Michał Szczecina, Politechnika Świętokrzyska, Wydział Budownictwa i Architektury, 25-314 Kielce; al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7. Tel: +48 41 34-24-804, Fax: +48 41 34-43-784, michalsz@tu.kielce.pl

Industrial halls typically accommodate overhead cranes (top running, underhung, or wall travelling cranes), which facilitate handling of heavy loads and ensure smooth transport.



Rys. 1. Przemysłowa hala stalowa z transportem wewnętrznym [2]

Fig. 1. Steel industrial hall with on-site handling [2]

Steel industrial halls carry various dynamic and static loads, such as:

- permanent loads (self weight),
- large roof area-related loads (snow, wind),
- equipment-related loads, e.g., overhead cranes,
- vibration-induced loads and those from handling equipment collisions,
- thermal effects,
- seismic mechanism-related loads.

The design of steel halls takes place in stages and, for the safety of operation and durability of the building, it is preceded by thorough analyses of structural systems, which carry the load to the foundations, in terms of statics, stability and dynamics of the structure.

The paper presents a dynamic evaluation of the stability of a steel industrial hall with on-site handling using the structural stability dynamic criterion proposed by Gomuliński A. and Witkowski M. [3] for dynamic analysis of structural movement stability.

## 2. Dynamic criterion of structural stability evaluation – BASIC concept

The term dynamic criterion of structural stability evaluation concerns the analysis of harmonic vibrations of the system under large longitudinal forces.

The main structural system is subjected to static, i.e., non-time-varying external load, which induces large axial forces  $S$  in the bars. These forces affect the stiffness of structural elements. Compressive forces decrease and tensile forces increase the stiffness of the bars. Further considerations will refer to the case when forces  $S$  induce large compressive forces in the bars.

The stiffness matrix is defined by the following formula (1)

$$\tilde{K} = K - K_G(S) \quad (1)$$

where

$K$  – linear stiffness matrix,

$K_G$  – geometric stiffness matrix.

Determining the conditions under which the system might move about the equilibrium position without the action of external excitation involves the analysis of equation (3). The motion equation (3) results from the equation of energy balance (2)

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (K - K_G)q = Q(t) \quad (2)$$

where

$M$  – inertia (mass) matrix,

$C$  – damping matrix,

$K$  – linear stiffness matrix,

$K_G$  – geometric stiffness matrix,

$Q(t)$  – force (time function) forcing the movement,

$q, \dot{q}, \ddot{q}$  – vector of displacement, velocity, acceleration,

assuming that  $Q(t) = 0$  and ignoring damping  $C = 0$  at the lack of static loads  $K_G = 0$ .

$$M\ddot{q} + \tilde{K}q = 0 \quad (3)$$

If we assume that

$$\ddot{q} = -\omega^2 \cdot q \quad (4)$$

formula (3) can be written:

$$(\tilde{K} - \tilde{\omega}^2 M)q = 0 \quad (5)$$



The solution to equation (5) has the form of harmonic functions of variable  $t$  (time), then, if condition (6) is satisfied

$$\det(\tilde{K} - \tilde{\omega}^2 M) = 0 \quad (6)$$

The solution to equation (6) comprises an ordered set of values  $\tilde{\omega}_i$  ( $i=1,2, \dots, n$ ), i.e., harmonic vibration frequency. The components of matrix  $\tilde{K}$  are dependent on the current value of force  $S$ , which is why it affects values  $\tilde{\omega}_i$ .

$$\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i(S) \quad (7)$$

It is impossible to determine the analytic form of (7), but there is a simple way of analysing the effect of force  $S$  in the first, the smallest, frequency  $\tilde{\omega}_1$ . For  $S = 0$ , matrix  $\tilde{K} = K$ , therefore equation (6) is equivalent with the equation defining the critical balance state (8), and the values  $\tilde{\omega}_i$  express the eigenfrequencies of the structure  $\omega_i$ .

$$\det(K - K_G) = 0 \quad (8)$$

The solution to equation (8) gives the critical values of the load  $S_*$ , which leads to the conclusion that if the force  $S$  reaches the smallest critical value, then solution to (6), i.e., the smallest root, is  $\tilde{\omega}_1^2 = 0$ .

If we assume that the force  $S$  increases from 0 to the first critical values  $S_{*1}$ , then the smallest frequency of free harmonic vibrations decreases from  $\omega_1$  to 0.

Physical interpretation of this phenomenon is as follows: if force  $S$  reaches the critical value, vibration stops. Conversely, if the structure deviated from the equilibrium position does not vibrate and remains in the steady configuration, then the applied  $S$  force takes the critical value.

Expression

$$\tilde{\omega}_i(S) = 0 \quad (9)$$

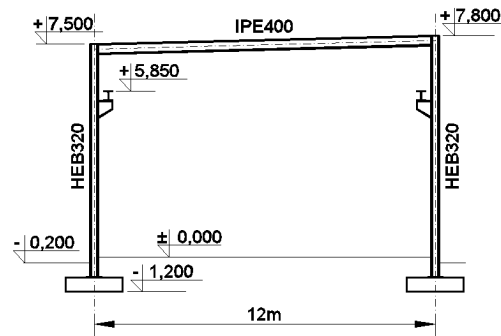
defines the dynamic criterion of the loss of stability [3].

### 3. Dynamic criterion of stability loss in steel industrial hall with internal transport - evaluation

#### 3.1. A brief description of the structure under investigation

The steel industrial hall shown in Fig. 2 (cross-section) and Fig. 3 (axonomic projection) was evaluated in terms of dynamic stability.

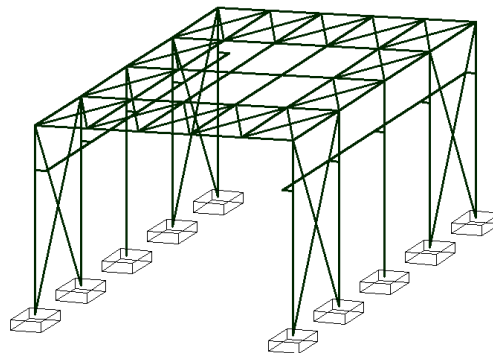
The hall is a steel structure constructed on the reinforced concrete footing. It is located in Kielce, in the first wind load zone and third snow load zone. The soil at the foundation level is sandy loam with the index of liquidity  $I_L=0.2$ . The foundation level was assumed to be 1m below the ground surface level.



Rys. 2. Przekrój konstrukcji hali przemysłowej z transportem wewnętrznym [4]

Fig. 2. Cross-section of the industrial hall with on-site handling [4]

The main structural system of the hall is a flat steel single bay frame of a single storey building with a monopitch roof and short cantilevers for supporting the runway beam. The connection between the columns and foundations is fully fixed, with a hinged/pinned connection between the steel rafter and the column. The structure has an axial span of 12m, and its height to the top point of the roof is 7.8m. The beam of the frame is a solid IPE 400 profile and the column is a solid HEB 320 profile. The running beams lean on a short steel cantilever connected rigidly with the column shank. The steel cantilever was constructed to be a plate element with variable height.



Rys. 3. Rysunek aksonometryczny konstrukcji hali [4]

Fig. 3. Axonometric projection of the hall structure [4]

The short cantilever is connected with the shank by welding with the use of fillet weld. The joint is additionally strengthened with ribs. The roof beam and the column are connected by bolting.

The spatial layout of the hall comprises five flat structures mentioned above arranged at intervals of 6m. The roof is made from deep profile roof sheet placed on steel purlins that use IPE 200 sections arranged 2.4m apart. Roof bracings were made from steel rods 20 mm in diameter in the end regions of the roof. All connections in the roof structure were bolted, and the box profile sheet was fastened with self-drilling screws.

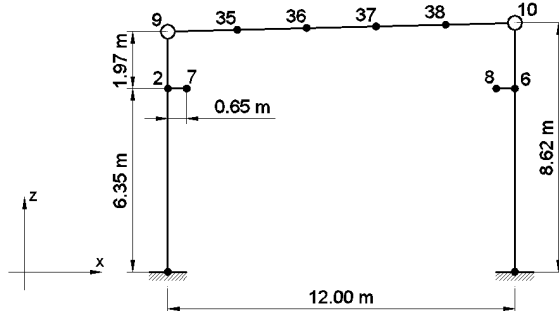
Side and end walls were made of sandwich panels mounted to a steel sub-frame. The bracing in the end regions used an equal leg angle 80x80x6.

The overhead crane girder used a solid profile HEA300. The tracks were secured with buffer stops. The overhead crane ZXJ with a capacity of 50 kN moves at a speed of 40m/min. The speed of a trolley is 30m/min, and the lifting speed reaches 12.5m/min.

The whole structure is made of class S235JR steel, with a pad footing of C30/37 concrete reinforced with RB500W steel.

### 3.2. Dynamic criterion of stability of a steel industrial hall with internal transport - analysis

The evaluation of dynamic stability of the hall used Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2014 software, based on the Finite Element Method. The static diagram of the hall is shown in Fig. 4. Nodes from 35 to 38 are the points at which purlins are supported by main girders.

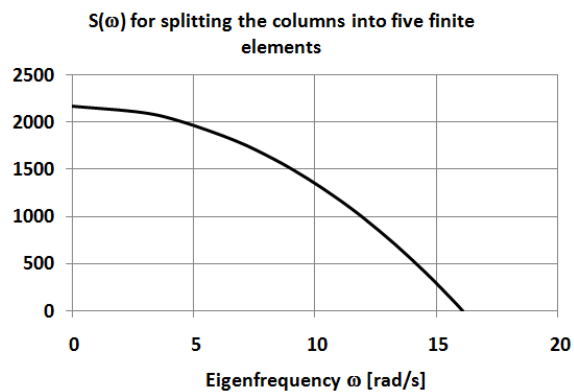


Rys. 4. Schemat statyczny modelu hali [4]

Fig. 4. Static diagram of the hall [4]

The assumption that the axial forces applied to the columns of the structure increase from 0 (no compression; free vibration) to the value equal to the critical force (then some of the natural vibrations should be 0) was the basis for the analysis. The calculations used the FEM for different degrees of discretisation of

the frame columns to 1, 3 and 5 elements. The results are shown in Fig. 5 in the form of a graph. The graph shows the relationship between the eigenfrequency and axial forces in the columns. Since the degree of discretisation had a negligible effect on the value of the first critical force and the first eigenfrequency, the authors of this paper decided to only present the results for splitting the columns into five finite elements.



Rys. 5. Zależność  $S(\omega)$  dla podziału słupów na 5 elementów skończonych

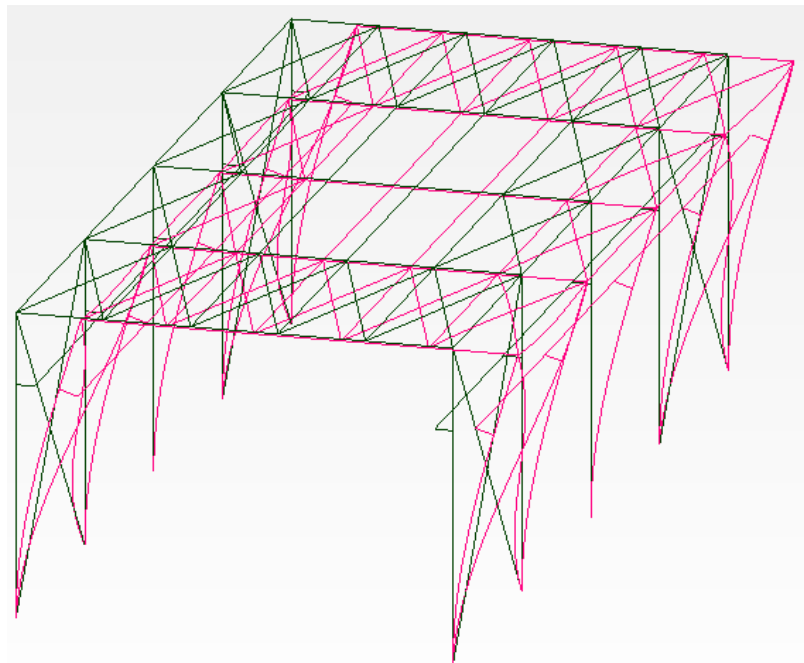
Fig. 5. Dependence of  $S(\omega)$  for splitting the columns into five finite elements

As shown in the graph above, the relationship of the vibration frequency and axial force is non-linear. When the compressive force in the columns approaches the critical value, vibration decays. When the structure is displaced from the equilibrium position and there is no vibration, then the axial force value is equal to that of the critical force. The area closed between the graph and the axes of the coordinate system is called a safety region. If the eigenfrequency and the axial force in the columns form a pair of coordinates of the point contained within the safety region, the structure is not threatened with dynamic stability loss.

### 3.3. Deformed geometries of the structure

Similarly to the case of stability analysis and eigenproblem analysis in dynamics, deformed geometries of structures can be represented as an issue of dynamic stability loss. This paper deals with three such modes:

- in the absence of axial forces, this mode will be the mode of natural vibration (free vibrations),
- if the axial forces are equal to the critical force, buckling occurs and vibrations decay,
- the deformed mode for the axial forces of 1000 kN, then the eigenfrequency is 11.91 rad/s.



Rys. 6. Postać odkształcona konstrukcji [5]

Fig. 6. Deformed shape of the structure [5]

Figure 6 shows the deformed mode identical for the three cases above. Tables 1, 2 and 3 present eigenvectors. For the presented mode, the nodal displacement values correspond to components of eigenvector. The numbers of nodes and the axes are as in Fig. 4.

Tabela 1. Wektor własny przy braku sił osiowych (drżania swobodne)

Table 1. Eigenvector for the absence of axial forces (free vibrations)

Node	Case	Form	Component UX	Component UZ	Component RY
2	4	1	0,00606656	-0,00000020	0,00149914
6	4	1	0,00573902	0,00000025	0,00142820
7	4	1	0,00606679	-0,00075005	0,00150024
8	4	1	0,00573924	0,00071462	0,00142924
9	4	1	0,00914418	-0,00000024	0,00155442
10	4	1	0,00913328	0,00000032	0,00149501
35	4	1	0,00883825	-0,00002753	0,00000802
36	4	1	0,00883854	-0,00003892	0,00000198
37	4	1	0,00883766	-0,00003659	-0,00000312
38	4	1	0,00883608	-0,00002497	-0,00000548

Tabela 2. Wektor własny dla S=2167 kN

Table 2. Displacements for S=2167 kN

Node	Case	Form	Component UX	Component UZ	Component RY
2	4	1	0,00600761	-0,00000037	0,00161342
6	4	1	0,00563370	0,00000035	0,00153495
7	4	1	0,00600761	-0,00080708	0,00161342
8	4	1	0,00563370	0,00076783	0,00153495
9	4	1	0,00938550	-0,00000049	0,00172609
10	4	1	0,00937549	0,00000048	0,00167261
35	4	1	0,00904149	-0,00001211	0,00000137
36	4	1	0,00904101	-0,00001135	-0,00000156
37	4	1	0,00904101	-0,00000692	-0,00000167
38	4	1	0,00904168	-0,00000564	0,00000106

Tabela 3. Wektor własny dla S=1000 kN

Table 3. Displacements for S=1000 kN

Node	Case	Form	Component UX	Component UZ	Component RY
2	4	1	0,00604415	-0,00000028	0,00154838
6	4	1	0,00569713	0,00000030	0,00147412
7	4	1	0,00604428	-0,00077462	0,00154898
8	4	1	0,00569725	0,00073751	0,00147469
9	4	1	0,00925073	-0,00000036	0,00162811
10	4	1	0,00924014	0,00000039	0,00157095
35	4	1	0,00892829	-0,00002012	0,00000486
36	4	1	0,00892829	-0,00002576	0,00000033
37	4	1	0,00892783	-0,00002250	-0,00000240
38	4	1	0,00892728	-0,00001581	-0,00000238

The analysis indicates that the deformed shape remains unchanged with the axial force increasing in the columns. In the case of a hall with overhead rail, this mode has a sway-like character.

#### 4. Conclusions

The performed analysis has a great practical importance, as the designer of steel halls has to account for both compressive forces in the columns and load-induced vibration. Investigation of  $S(\omega)$  is necessary for all buildings of this type and provides the answer to the fundamental question concerning the dynamic criterion of stability. A close relationship between axial forces and eigenfrequency of the structure is the reason why these quantities cannot be considered separately.

## References

- [1] Przewodnik projektanta, Konstrukcje stalowe w Europie, Nowoczesne Hale, Wydawnictwo Elamem, 2013.
- [2] gzut.pl (dostęp: 13.02.2017 r.).
- [3] Gomuliński A., Witkowski M., Mechanika budowli, kurs dla zaawansowanych, OWPW, Warszawa 1993.
- [4] Szczecina M., Projekt hali z transportem wewnętrznym w Kielcach.
- [5] Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2014 – user’s guide.

## **DYNAMICZNE KRYTERIUM OCENY STATECZNOŚCI STALOWEJ HALI PRZEMYSŁOWEJ Z TRANSPORTEM WEWNĘTRZNYM**

### **Streszczenie**

W referacie przedstawiono zagadnienie dynamicznej utraty stateczności hali stalowej z transportem wewnętrznym. Analizę przeprowadzono metodą elementów skończonych. Jako wynik obliczeń przedstawiono zależność częstości drgań własnych konstrukcji od siły ściskającej w słupach konstrukcji. Na podstawie wyników analizy sformułowano podstawowe zalecenia dla projektantów konstrukcji hal stalowych z transportem wewnętrznym.

**Słowa kluczowe:** hale stalowe, transport wewnętrzny, stateczność, dynamika

*Przesłano do redakcji: 14.02.2017 r*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Seweryn KOKOT<sup>1</sup>

## WPLYW SZYBKOSCI UTRATY SŁUPA NA DYNAMICZNĄ ODPOWIEDŹ KONSTRUKCJI ŻELBETOWEJ

W konstrukcjach ramowych, nagła utrata słupa spowodowana na przykład eksplozją ładunku wybuchowego czy uderzeniem pojazdu powoduje dynamiczną odpowiedź, która w przypadku niewystarczającej odporności konstrukcji może prowadzić do częściowej lub całkowitej katastrofy. Pojęcie "nagłości" jest nieprecyzyjne i dlatego warto zbadać jak szybkość utraty słupa wpływa na maksymalne przemieszczenie i jak to przemieszczenie odnosi się do przemieszczenia statycznej utraty słupa. W tym celu przeprowadzono symulacje numeryczne odpowiedzi żelbetowego budynku słupowo-belkowego, który wcześniej został poddany eksperymentalnej quasi-statycznej utracie słupów. Symulacje polegają na stopniowym wydłużeniu czasu trwania utraty słupa od zera do wartości, która asymptotycznie zbliża się do odpowiedzi statycznej. Ze względu na różne rozpiętości przęseł, rozważono trzy scenariusze utraty słupa. Stwierdzono, że wpływ szybkości utraty słupa zależy od możliwości przeniesienia obciążeń przez pozostałą część konstrukcji, a to przejawia się w wartościach okresu drgań własnych dla postaci w kierunku pionowym konstrukcji bez danego słupa. Podano także czasy trwania utraty słupa, dla których odpowiedź jest na umownym poziomie 95% maksymalnej odpowiedzi dynamicznej oraz wartości znormalizowanego czasu w stosunku do odpowiedniego okresu drgań własnych, co może posłużyć jako wskazówka przy dobieraniu kroku czasowego całkowania równań ruchu w obliczeniach dynamicznych przy użyciu metody elementów skończonych.

**Słowa kluczowe:** postępująca katastrofa, obciążenie wyjątkowe, modelowanie konstrukcji żelbetowej, współczynnik dynamiczny

### 1. Wprowadzenie

Nagła utrata elementu nośnego, jakim jest słup, belka lub fragment ściany, może prowadzić do zjawiska częściowej lub całkowitej katastrofy postępującej. Przyczyną utraty elementu nośnego konstrukcji może być eksplozja ładunku wybuchowego, wybuch gazu, czy uderzenie pojazdu. Analizowanie szczegóło-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Seweryn Kokot, Politechnika Opolska, Katedra Mechaniki, Konstrukcji Budowlanych i Inżynierskich, ul. Katowicka 48, 45-061 Opole; tel. 77 449 8579; s.kokot@po.opole.pl



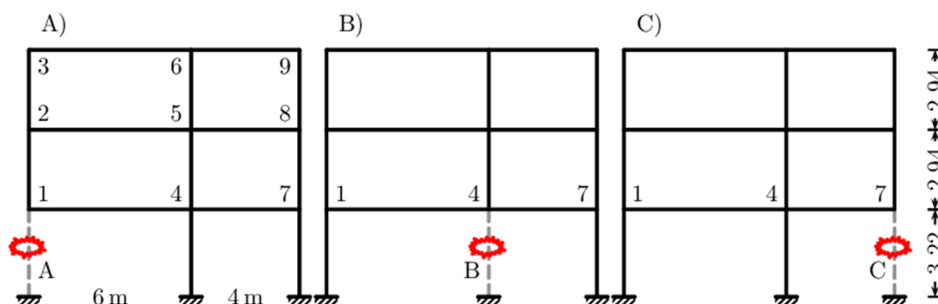
we konkretnego przypadku obciążenia wyjątkowego działającego na daną konstrukcję wymaga dużego nakładu pracy na etapie modelowania konstrukcji i obciążenia, dlatego istotne jest przyjęcie założeń, które pozwolą na uproszczenie całego procesu analizy z zachowaniem żądanego poziomu dokładności rozwiązania.

W ostatnich latach pojawiło się wiele wytycznych i przepisów w dokumentach normowych [1,2,3] dotyczących projektowania nowych obiektów, jak również sprawdzenia i wzmacniania istniejących budynków na możliwość wystąpienia obciążenia wyjątkowego prowadzącego do postępującej katastrofy [4]. Oprócz ogólnych wymagań spełnienia integralności konstrukcji poprzez układ stężeń pionowych i poziomych, bardziej dokładne analizy wymagają przeprowadzenia obliczeń dynamicznych za pomocą metody elementów skończonych z uwzględnieniem nieliniowości materiałowych i geometrycznych.

W wielu dokumentach [1,2,3] zalecana jest analiza dynamiczna modelu konstrukcji ze względu na nagłą utratę słupa lub belki. W konstrukcjach ramowych, nagła utrata słupa wywołuje drgania, które w przypadku niewystarczającej odporności konstrukcji może prowadzić do katastrofy. Pojęcie nagłości jest jednak nieprecyzyjne i dlatego ważne jest zbadać jak czas trwania utraty słupa wpływa na odpowiedź dynamiczną. W tym celu przeprowadzono symulacje numeryczne odpowiedzi żelbetowego budynku słupowo-belkowego, który wcześniej został poddany eksperymentalnej utracie słupów [5].

## 2. Opis analizowanej konstrukcji i jej model obliczeniowy

Badanym obiektem niniejszego artykułu jest żelbetowy budynek o dwóch kondygnacjach, dwóch nawach w kierunku podłużnym i jednej nawie w kierunku poprzecznym.



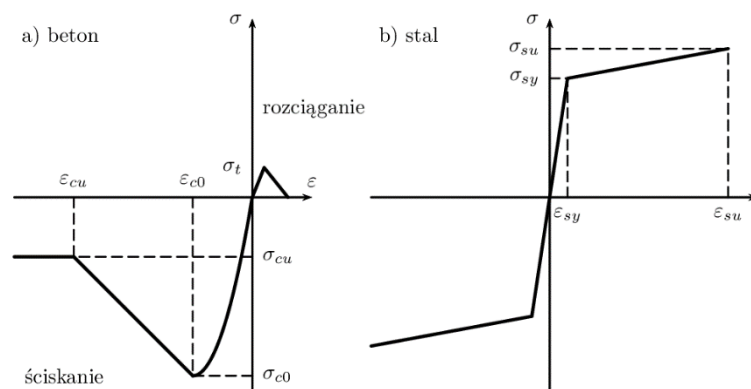
Rys. 1. Wymiary ramy płaskiej i trzy przypadki utraty słupa A, B i C

Fig. 1. Dimensions of the plane frame and three cases of column removal A, B and C

Budynek składa się z dwóch ram płaskich (rys. 1) połączonych belkami poprzecznymi. Rygle ram są szerokości 1 m i wysokości 0,24 m. Strop posiada

taką samą wysokość jak rygle (0,20 m grubość stropu i wylewka gr. 0,04 m). Słupy ram są kwadratowe o wymiarach 0,4 x 0,4 m. Z powodu zredukowanej wysokości rygla, zbrojenie belek jest znaczne po obu stronach, a tylko niektóre pręty zbrojeniowe są zakotwione w słupach. Obiekt ten najpierw został poddany testom sejsmicznym w laboratorium ELSA Wspólnotowego Centrum Badawczego Komisji Europejskiej w Isprze, Włochy [5,6]. Po tych testach można było zaobserwować jedynie nieznaczne zarysowanie w pobliżu połączeń słupów i belek, a następnie budynek ten został przeznaczony do kontrolowanego zniszczenia poprzez wycinanie słupów w sposób quasi-statyczny. Budynek zdołał przemieścić utratę obu słupów środkowych ram płaskich, jednak dalsze badania eksperymentalne zostały przerwane ze względów bezpieczeństwa.

W celu analizy różnych możliwości utraty słupa dolnej kondygnacji przyjęto trzy scenariusze A), B) i C), w których osobno utracie podlegają słupy A, B lub C (rys. 1). Model obliczeniowy budynku składa się z 30 ramowych elementów skończonych (21 dla belek i 9 dla słupów), przy czym elementy są sformułowane w ujęciu naprężeniowym [7]. Możliwość wystąpienia nieliniowości materiałowej w elementach skończonych uwzględnia się w tzw. punktach Gaussa (5 punktów kontrolnych wzdłuż długości elementu), których przekroje poprzeczne są typu włóknowego (ang. fiber model). Polega to na tym, że przekrój dzieli się na tzw. włókna elementarne, do których przypisane są związki konstytutywne betonu lub stali w zależności od położenia włókna. W pracy tej wykorzystuje się modyfikacje modeli betonu Kenta-Parka [8] i stali Menegotto-Pinto [9], których obwiednie związków naprężenie-odkształcenie pokazane są na rys. 2. Należy dodać, że modele te uwzględniają także degradację sztywności i wytrzymałości przy obciążeniu cyklicznie zmiennym. Ponadto nieliniowość geometryczną przyjęto zgodnie ze sformułowaniem tzw. korotacyjnym [10], które uwzględnia wpływ dużych przemieszczeń w sposób ścisły, w odróżnieniu od tradycyjnego podejścia nieliniowości geometrycznej typu P- $\Delta$ .



Rys. 2. Obwiednie związków konstytutywnych dla a) betonu i b) stali

Fig. 2. Backbones of constitutive relationships for a) concrete and b) steel

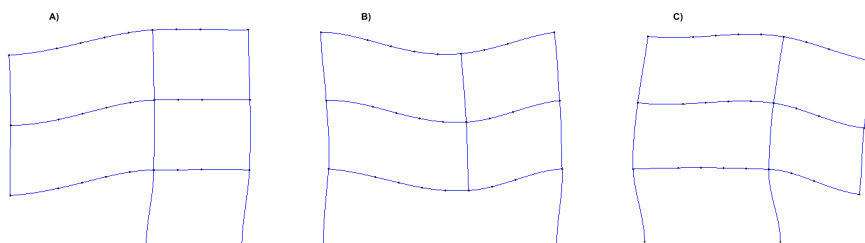
Podstawowe parametry materiałowe zostały przyjęte na podstawie testów wytrzymałościowych próbek, a ich wartości średnie wynoszą:  $\sigma_{c0} = 37,22\text{MPa}$ ,  $\epsilon_{c0} = 0,002$ ,  $\sigma_{cu} = 6\text{MPa}$ ,  $\epsilon_{cu} = 0,0035$ ,  $\sigma_{sy} = 524,6\text{MPa}$ ,  $E_s = 200\text{GPa}$ ,  $\sigma_{su} = 640\text{MPa}$ ,  $\epsilon_{su} = 0,10$ .

W tabeli 1 przedstawiono sześć początkowych okresów drgań własnych dla poszczególnych scenariuszy utraty słupa, przy czym pierwsza wartość odnosi się do konstrukcji wyjściowej, a wartość poniżej oznaczona symbolem "\*" do konstrukcji po wystąpieniu degradacji sztywności i wytrzymałości w wyniku uplastycznienia w kilku przekrojach. Miarodajne, z punktu widzenia utraty słupa, postacie drgań w kierunku pionowym, dla trzech scenariuszy, pokazane są na rys. 3. Postacie te odnoszą się do okresów  $T_2$  z tabeli 1, gdyż pierwsze postacie dotyczą przemieszczeń konstrukcji w kierunku poziomym.

Tabela 1. Sześć początkowych okresów drgań własnych dla trzech scenariuszy utraty słupa

Table 1. Six initial natural periods of free vibrations for three column removal scenarios

Nr postaci	T <sub>1</sub> [s]	T <sub>2</sub> [s]	T <sub>3</sub> [s]	T <sub>4</sub> [s]	T <sub>5</sub> [s]	T <sub>6</sub> [s]
A)	0,3422	0,1883	0,0763	0,0499	0,0488	0,0396
A)*	0,7513	0,3777	0,1615	0,1003	0,0949	0,0806
B)	0,2746	0,1227	0,0772	0,0503	0,0473	0,0412
B)*	0,5096	0,2512	0,1447	0,0998	0,0975	0,0827
C)	0,3469	0,1151	0,0715	0,0506	0,0464	0,0453
C)*	0,6229	0,2119	0,1256	0,0828	0,0781	0,0772



Rys. 3. Postacie drgań własnych w kierunku pionowym dla przypadków utraty słupa A, B i C

Fig. 3. Mode shapes in vertical direction for cases of column removal A, B and C

### 3. Procedura obliczeniowa

Procedura obliczeń numerycznych do celu tego artykułu polega na obliczeniach w pętli, gdzie poszczególne iteracje odnoszą się do stopniowo zwiększanych wartości czasu trwania utraty słupa  $t_r$ . Wewnątrz pętli, dla ustalonej wartości  $t_r$  obliczenia wykonywane są według następujących kroków:

- zdefiniowanie modelu MES,
- przyłożenie obciążenia ciężarem własnym i obciążenia bocznego od wiatru,
- odczytanie węzłowych sił przekrojowych słupa w węźle połączenia z pozostałą częścią konstrukcji,
- usunięcie słupa z modelu MES,
- w węźle połączenia z pozostałą częścią konstrukcji, przyłożony jest zestaw sił odpowiadający wcześniej odczytanym siłom w słupie (siły te działają jako stałe w czasie),
- przyłożenie w tym samym węźle zestawu sił przeciwnie skierowanych narastających w czasie  $t_r$  do pełnej wartości, tak aby symulować utratę słupa,
- wykonanie nieliniowej analizy dynamicznej MES,
- w wyniku obliczeń otrzymuje się przebieg czasowy odpowiedzi, z którego należy wyszukać maksymalną wartość przemieszczenia pionowego w węźle nad usuniętym słupem.

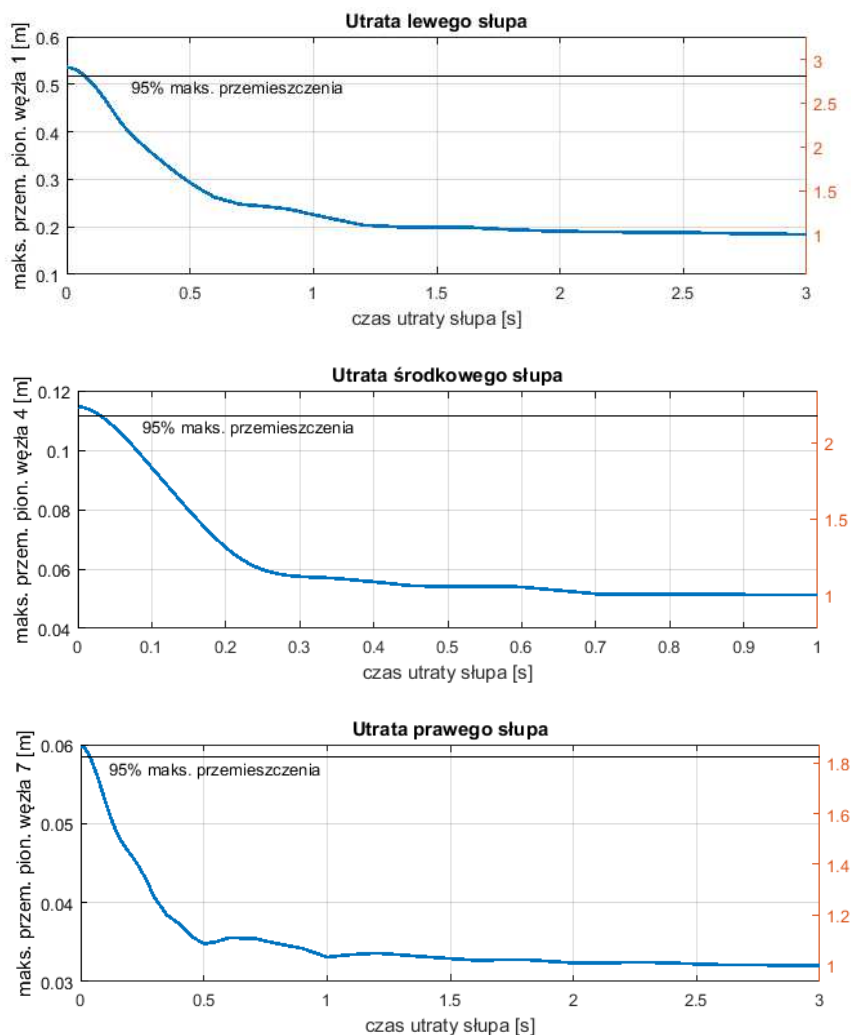
Po wykonaniu pętli obliczeń dla dyskretnych wartości czasu trwania  $t_r$  usunięcia słupa, wyniki ekstremalnych wartości przemieszczeń pionowych przedstawia się na wykresie.

W symulacjach numerycznych MES wykorzystano metodę Newmarka do rozwiązania równań ruchu z przyjętym krokiem czasowym (np. 0,001 s). Macierz tłumienia Rayleigha obliczono na podstawie 5% tłumienia dla dwóch pierwszych postaci drgań własnych.

Przedstawioną procedurę, jak i obliczenia można zaimplementować w wielu pakietach obliczeń MES z modułem obliczeń dynamicznych, jednak ze względu na wielokrotne powtarzanie podobnych obliczeń z modyfikacją niektórych parametrów wskazane jest wykorzystanie środowiska obliczeń MES z możliwością zautomatyzowania obliczeń w pętli. Do celów niniejszego artykułu wykorzystano środowisko OpenSees [11], które oparte jest na języku programowania Tcl.

#### 4. Wyniki obliczeń

Po wykonaniu obliczeń zgodnie z procedurą przedstawioną w poprzednim punkcie otrzymano wyniki zależności maksymalnego przemieszczenia w funkcji  $t_r$  co pokazano na rys 4. Można zauważyć, że największe maksymalne przemieszczenia występują dla  $t_r = 0,001$ , czyli równego krokowi czasowemu  $\Delta t$ , a następnie wartości spadają, by ustabilizować się na poziomie przemieszczenia, które wynika ze quasi-statycznego monotonicznego usuwania słupa, co oznaczone jest po prawej stronie osi wykresów jako wartość 1,0. Tym samym można zaobserwować jako rośnie współczynnik dynamiczny dla krótszych czasów trwania  $t_r$ . Dla  $t_r = 0,001$ , wartości współczynników dynamicznych wynoszą odpowiednio: A) 2,91; B) 2,24; C) 1,87; dla trzech scenariuszy utraty słupa.



Rys. 4. Zależność czasu utraty słupa względem maksymalnego przemieszczenia w kierunku pionowym w węźle pod którym słup uległ zniszczeniu: a) utrata słupa A, b) utrata słupa B c) utrata słupa C

Fig. 4. Relationship between the time of column removal and maximum vertical displacement at node under which the column has been destroyed: a) removal of column A, b) removal of column B, c) removal of column C

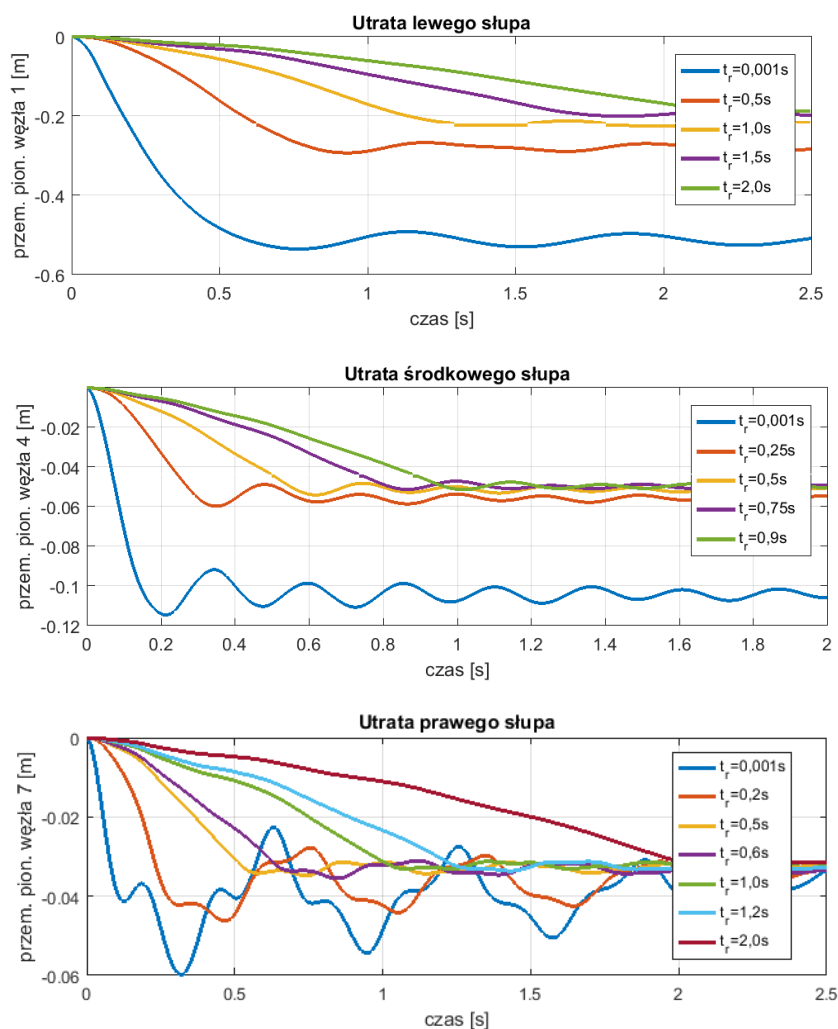
Wartości czasu trwania utraty słupa, dla których amplituda odpowiedzi spada poniżej umownego poziomu 95% maksymalnego możliwego przemieszczenia dla najmniejszego czasu trwania utraty słupa (0,001s), wynoszą odpowiednio dla poszczególnych scenariuszy: A) 0,073 s, B) 0,031 s, C) 0,038 s (co pokazano na rys. 4). Jeśli odniesie się je do wartości okresów drgań własnych

( $T_2$  z tabeli 1) to znormalizowane wartości wynoszą odpowiednio: A) 0,39, B) 0,25, C) 0,33. Można zauważyć, że im ten okres jest krótszy tym szybciej konstrukcja reaguje na nagłą utratę elementu podpierającego. Intuicyjnie można by postawić hipotezę (zwłaszcza dla analizy liniowo-sprężystej), że wpływ czasu trwania utraty słupa na dynamiczną odpowiedź konstrukcji związany jest z okresem drgań własnym odpowiadającym postaci (niekoniecznie pierwszej postaci drgań wynikającej z rozwiązania zagadnienia własnego), która przedstawia ruch w kierunku pionowym konstrukcji bez słupa, jednak fakt, że podczas utraty słupa następuje uplastycznienie w najbardziej wyężonych przekrojach, co z kolei pociąga za sobą zmniejszenie sztywności (zwiększenie okresów drgań), dlatego potwierdzenie postawionej hipotezy nie jest oczywiste.

Na rys. 5 przedstawione są wybrane przebiegi czasowe przemieszczeń pionowych w węzłach 1, 4 i 7 zgodnie z rys. 1 scenariuszy utraty słupa. Warto zauważyć, że dla scenariusza A) i B) dominuje jedna postać drgań własnych, natomiast dla scenariusza C) widoczne są drgania, gdzie dominujące są dwie postaci drgań własnych, co powoduje, że maksymalna wartość przemieszczenia pionowego jest mniej przewidywalna dla ustalonego  $t_r$  i w związku z tym wykres na rys. 4C nie jest monotonicznie malejący (pojawiają się minima lokalne). Ponadto na rys. 5 widoczne są drgania oscylujące wokół docelowego przemieszczenia z okresem drgań własnych odpowiadającym wartościom z tabeli 1, wartość oznaczona symbolem "\*". Oznacza to, że w pierwszej fazie po utracie słupa następuje ruch konstrukcji w dół i jeśli w pozostałej części konstrukcji zdoła wykształcić się zastępcza ścieżka obciążenia (dzięki dyssypacji energii i uplastycznieniu materiału w najbardziej wyężonych przekrojach), wówczas sztywność konstrukcji jest mniejsza i tym samym wydłużają się okresy drgań własnych.

## 5. Podsumowanie i wnioski

W niniejszym artykule przedstawiono procedurę i wyniki, których zadaniem było określenie wpływu szybkości utraty słupa na efekty dynamiczne w odpowiedzi konstrukcji. Obciążenie wyjątkowe jakim jest np. eksplozja ładunku wybuchowego może spowodować zniszczenie elementu nośnego w ciągu kilku milisekund, zatem celowe jest zbadanie jaki przyjęć krok czasowy, aby osiągnąć kompromis między dokładnością wyników i zminimalizować czasochłonność obliczeń.



Rys. 5. Przebiegi czasowe przemieszczeń pionowych w węzle, pod którym słup uległ zniszczeniu dla wybranych czasów trwania utraty słupa dla przypadków A, B i C

Fig. 5. Time histories of vertical displacement at node under which the column has been destroyed for selected time duration of column removal for cases A, B and C

Na podstawie wyników otrzymanych dla konkretnej konstrukcji żelbetowej z trzema przypadkami utraty pojedynczego słupa, można sformułować następujące wnioski:

- maksymalne pionowe przemieszczenie w węzle nad usuniętym słupem przy najmniejszym czasie utraty słupa (0,001s) jest 2-3 krotnie większe od analogicznego przemieszczenia przy prawie-statycznej utracie słupa (długi czas usuwania reakcji pochodzących od podpierającego słupa),

- czasy trwania utraty słupa powodujący przemieszczenia pionowe na umownym poziomie 95% maksymalnego możliwego przemieszczenia pionowego (dla  $t_r = 0,001$  s) są rzędu 0,03-0,07 s (rys. 4), co oznacza, że zarówno krok czasowy jak i czas utraty słupa może wynosić maksymalnie 0,01s. Przy czym, krótsze chwile czasowe wymagane są w pierwszej fazie (do maksymalnego przemieszczenia pionowego), a dłuższe chwile czasowe można przyjąć w drugiej fazie, co preferuje użycie metody całkowania numerycznego równań ruchu, w której krok czasowy jest przyjmowany w sposób zmienny. Z drugiej jednak strony obliczenia nieliniowe mogą wymagać krótszych chwil czasowych niezbędnych do osiągnięcia zbieżności obliczeń np. w metodzie Newtona-Raphsona,
- rozwiązanie zagadnienia własnego wskazuje, że pierwsza postać drgań to drgania w kierunku poziomym, a w drugiej postaci dominuje ruch konstrukcji w kierunku pionowym. Ta druga postać dominuje w drganiach konstrukcji po utracie słupa w przypadku A i B (rys. 5A i B), natomiast w przypadku C, dodatkowo widoczny jest udział kolejnej postaci opisującej ruch w kierunku pionowym (rys 5C). Dla analizowanej konstrukcji przed uplastycznieniem okresy drgań własnych  $T_2$  są w zakresie 0,11-0,19s (zob. tabela 1),
- fakt uplastycznienia niektórych przekrojów (przywęzłowych lub przęsłowych) powoduje zmniejszenie sztywności i tym samym wydłużenie okresów drgań własnych (tabela 1, wartości oznaczone symbolem "\*"), a zatem najczęściej stosowana analiza liniowa (liniowość materiałowa) nie pozwalałaby na określenie zmian sztywności i tym samym prowadziłyby do innych wniosków.

## Literatura

- [1] DoD UFC Guidelines., Design of Buildings to Resist Progressive Collapse, Unified Facilities Criteria (UFC) 4-023-03. Department of Defence (DoD), 2005.
- [2] PN-EN 1991-1-7, Eurokod 1 - PN-EN 1991-1-7: Oddziaływania na konstrukcje - Część 1-7: Oddziaływania ogólne - Oddziaływania wyjątkowe, 2006.
- [3] GSA Guidelines., GSA Progressive Collapse Analysis and Design Guidelines for New Federal Office Buildings and Major Modernizations Projects. General Services Administration (GSA), 2003.
- [4] Kokot S.: Literature survey on current methodologies of assessment of building robustness and avoidance of progressive collapse. JRC Scientific and Technical Reports JRC 5598, European Commission, Joint Research Centre, 2009.
- [5] Kokot S., Anthoine A., Negro P., Solomos G.: Static and dynamic analysis of a reinforced concrete flat slab frame building for progressive collapse. Engineering Structures, vol. 40, 2012, pp. 205-217.
- [6] Kokot, S., Analiza ramy żelbetowej na obciążenia wyjątkowe według metody zastępczej ścieżki obciążenia, Inżynieria i Budownictwo, 8, 2012, pp. 444-446.
- [7] Neuenhofer A., Filippou, F. C., Evaluation of nonlinear frame finite element models, Journal of Structural Engineering, vol. 123, 7, 1997, pp. 958-966.



- [8] Scott B. D., Park R., Priestley M. J. N., Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates, *ACI Journal*, 1982, vol = 79, 1, pp. 13-27.
- [9] Filippou F. C., Popov E. P., Bertero V. V., Effects of bond deterioration on hysteretic behavior of reinforced concrete joints, University of California, Berkeley, 1983.
- [10] Crisfield M., Nonlinear finite element analysis of solids and structures, Wiley, 1991, New York.
- [11] McKenna F., Fenves G. L., Scott M. H., OpenSees - Open system for earthquake engineering simulation, Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA., <http://opensees.berkeley.edu>.

## **DYNAMIC RESPONSE OF A REINFORCED CONCRETE STRUCTURE UNDER SUDDEN COLUMN REMOVAL**

### **S u m m a r y**

In frame structures, a sudden column removal, which can be triggered by a blast of an explosive material or a vehicle impact, causes dynamic response, which in case of insufficient structural capacity can lead to partial or total progressive collapse. The notion of suddenness is imprecise and therefore it is worth to evaluate how the rate of column removal influences the maximum displacement and how this displacement refers to the displacement produced by static column removal. To this end, the response from numeric simulations of a reinforced concrete column-beam structure has been evaluated. This real structure had been earlier tested experimentally for quasi-static column removals. The numerical simulations consist in progressive increase of time of column removal from zero to the value, which asymptotically approaches the static response. Since the lengths of frame spans are not equal, three column removal scenarios have been investigated. It should be noted that the impact of rate of column removal depends on the ability of the remaining structure to withstand the lack of column and this reflects in the natural period for mode corresponding to the vertical downward motion of the model without the column. It is also interesting to compare the time duration of column removal for which the response is in the range of 95% of maximum dynamic response for three column removal scenarios and the normalized time related to the corresponding natural period. This indication can be useful when selecting the time step in numerical integration of equations of motion in dynamic analysis using finite element method.

**Keywords:** progressive collapse, accidental loading, modelling of reinforced concrete structures, dynamic factor

*Przesłano do redakcji: 15.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Marian KLASZTORNY<sup>1</sup>  
Karol ZIELONKA<sup>2</sup>  
Daniel B. NYCZ<sup>3</sup>  
Pawel POSUNIAK<sup>4</sup>

## EXPERIMENTAL VERIFICATION OF SIMULATION OF TB32 CRASH TEST FOR SP-05/2 ROAD SAFETY BARRIER ON HORIZONTAL CONCAVE ARC

The study concerns a selected road safety barrier consisting of a B-type guiderail, Sigma-100 posts with 2.00 m spacing, and supporting elements of a trapezoid cross section, located between the posts and the guiderail. The barrier is formed on a horizontal concave arc having a radius of 150 m. The full-scale experimental TB32 crash test was carried out for a vehicle impacting at the angle of 20°, on the testing grounds of the Automotive Industry Institute, Warsaw, Poland. The numerical modelling and simulation methodology of a barrier – vehicle system, recently developed by the authors is applied. Simulation of the above test was performed using LS-Dyna v.971 finite element code, while maintaining the conditions of the experimental test. All the functionality parameters for the barrier are studied, among others, ASI, THIV, working width, vehicle motion trajectory in the exit box. The results of the simulation tests were compared with those of the full-scale experimental test. The experimental verification of the numerical modelling and simulation of the selected crash test is rated positively. It was proven, both numerically and experimentally, that the TB32 crash test does not meet the condition imposed on the vehicle motion trajectory in the exit box.

**Keywords:** road safety barrier on horizontal concave arc, simulation crash test, experimental crash test, experimental verification of modelling and simulation

### 1. Introduction

According to standards [1, 2], crash tests certifying road safety barriers are performed experimentally on a straight section of the barrier. The approval crite-

<sup>1</sup> Corresponding author / autor do korespondencji: Marian Klasztorny, Military University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics and Applied Computer Science, 2 gen. S. Kaliskiego Street, PL-00908 Warsaw, Poland; phone: +48 605 953 533; m.klasztorny@gmail.com

<sup>2</sup> Karol Zielonka, Automotive Industry Institute, 55 Jagiellonska Street, PL-03301 Warsaw, Poland; phone: +48 22 7777 015; k.zielonka@pimot.eu

<sup>3</sup> Daniel B. Nycz, Jan Grodek State Vocational Academy, Institute of Technology, 6 Reymonta Street, PL-38500 Sanok, Poland; phone: +48 698 615 128; daniel.nycz@interia.pl

<sup>4</sup> Pawel Posuniak, Automotive Industry Institute, 55 Jagiellonska Street, PL-03301 Warsaw, Poland; phone: +48 22 7777 015; p.posuniak@pimot.eu

ria for a crash test include the following functional parameters of the barrier: ASI, THIV, working width, vehicle motion trajectory in the exit box, penetration of the vehicle into the barrier and vice versa, continuity of the guide rail during the collision. After performing a crash test, it should also be confirmed that the length of the test section of the barrier is sufficient to demonstrate the full operation of the system. Standard [3] introduces the possibility of certification by the simulation of road safety barriers slightly modified in reference to the so-called parent barrier (certified experimentally). It is therefore reasonable to develop numerical modelling and simulations of road crash tests.

The study concerns the full-scale experimental verification of the numerical modelling and simulation of the TB32 crash test for the selected road safety barrier on a horizontal concave arc. The literature review and methodology for the numerical modelling and simulation of crash tests, developed by part of the team of authors, was published in Refs. [4, 5]. This methodology is presented in Section 3 in a shortened form.

## 2. Functionality criteria of road safety barriers

Standard [1] defines the criteria for crash tests and the test methods to which road restraint systems should be subjected. Standard [2] describes action classes in reference to protective barriers via determining their functional characteristics, such as the restraint level, the working width, the collision intensity level. Standards [1, 2] do not include road bends.

Restraint levels are determined from crash tests including small (T1, T2, T3), normal (N1, N2), increased (H1, H2, H3), very high (H4a, H4b) levels. In the case of restraint level N2, the approval of TB11 and TB32 crash tests is required. The TB32 crash test conditions are as follows: impact velocity 110 km/h, collision angle 20°, total car mass 1500 kg.

The collision intensity level reflects the impact of the collision on the vehicle's occupants, measured by the acceleration severity index, ASI, and the theoretical head impact velocity, THIV. The A level corresponds to  $ASI \leq 1.0$ , THIV  $\leq 33$  km/h. Parameter ASI specifies the size of the motion onerousness during the collision with the restraint system, for a human located in the vicinity of the vehicle centre-of-gravity. Acceleration severity index  $ASI(t)$  is calculated from the formula [1]

$$ASI(t) = \sqrt{\left(\frac{\bar{a}_x(t)}{\hat{a}_x}\right)^2 + \left(\frac{\bar{a}_y(t)}{\hat{a}_y}\right)^2 + \left(\frac{\bar{a}_z(t)}{\hat{a}_z}\right)^2}, \quad ASI = \max_t [ASI(t)] \quad (1)$$

where

$$\bar{a}_j(t) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} a_j(t) dt, \quad j = x, y, z \quad (2)$$

and:  $x, y, z$  – longitudinal, lateral and vertical directions in the vehicle, respectively,  $t$  – time variable,  $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$   $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$  – acceleration components related to the car centre-of-gravity,  $\hat{a}_x = 12g, \hat{a}_y = 9g, \hat{a}_z = 10g$  – limits of acceleration components in  $x, y, z$ -directions,  $\bar{a}_x(t), \bar{a}_y(t), \bar{a}_z(t)$   $\bar{a}_x(t), \bar{a}_y(t), \bar{a}_z(t)$  – acceleration components related to the car centre-of-gravity, passed through a Butterworth four-pole no-phase digital filter, of low-bandwidth, of the limit frequency of 13 Hz (acceleration component values averaged over a moving time interval  $\delta = 50$  ms),  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> – gravity acceleration.

The theoretical head impact velocity, THIV, is used to evaluate the collision intensity, in relation to persons in the vehicle, during the car collision with the restraint system. It is assumed that a person inside the vehicle is an object (theoretical head) moving freely in such a way that during the turning of the vehicle (impact into restraint system), the head moves further in a straight line and irrespective of the vehicle, until the impact into an inside surface (walls of theoretical cabin). The collision speed of the theoretical head with the moving theoretical cabin is the THIV parameter. The calculation algorithm for parameter THIV takes into account the vehicle velocity components corresponding to the motion of the car in the  $xy$ -horizontal plane [6].

Working width  $W$  is the distance between the side face of the barrier from the traffic side before the collision and the maximum dynamic lateral position of any greater part of the barrier. The working width is a measure of barrier deformation. Standard [2] stands 8 levels of working width; level  $W4$  corresponds to distance  $W \leq 1.3$  m.

The VCDI parameter is a deformation index of the vehicle compartment. The VCDI parameter record includes both the location and extent of damage to the car cab, in the form of  $XYabcdefg$  where  $XY$  – place of deformation (capital symbols),  $abcdefg$  – seven indices defining percent reduction in the seven characteristic interior dimensions of car cabin [2].

The car, after collision with the barrier and shifting in contact with the barrier, should bounce from the barrier so that the wheel trace does not exceed the front line of the exit box, which is located at a distance of  $A = 2.2$  m + the car width + 16% of car length [2]. For Dodge Neon car this distance is  $A = 4.53$  m. The exit box is  $B = 10$  m long, starting from the exit point of last wheel beyond the barrier face original line. Locking the vehicle in the barrier or skidding is permitted. The vehicle cannot roll over during and after the impact.

### 3. Shortened description of methodology of numerical modelling and simulation of crash tests of road safety barriers

The TB32 crash test was simulated using the non-linear explicit LS-Dyna FE code. The Dodge Neon car numerical model taken from the the public library

developed by the National Crash Analysis Center, USA [7] and properly corrected, was applied. The vehicle numerical model includes more than 330 material models assigned to particular parts of car and consists of ~279,700 finite elements. All the functionality parameters of the tested barrier, required by standards [1, 2], were determined. The following software was used:

- preprocessing: Catia v5r19<sup>®</sup> (Part Design<sup>®</sup>, Generative Shape Design<sup>®</sup>, Assembly Design<sup>®</sup>), HyperWorks 11.0<sup>®</sup> (HyperMesh<sup>®</sup>, HyperMorph<sup>®</sup>), LS-PrePost 4.2<sup>®</sup>;
- processing: LS-Dyna v.971<sup>®</sup>;
- postprocessing: HyperWorks 11.0<sup>®</sup> (HyperView<sup>®</sup>, HyperGraph<sup>®</sup>), LS-PrePost 4.2<sup>®</sup>, Excel<sup>®</sup>.

The numerical modelling and simulation was performed using the methodology as described in Refs. [4, 5] and LS-Dyna v.971 FE code. The main items of this methodology are described in Table 1 in a concise form. Original terms, symbols and units, used in the Keyword User's Manual [8] of the LS-Dyna FE code, are applied.

#### 4. Description of barrier SP-05/2 and experimental crash test technology

A SP-05/2<sup>®</sup> barrier [9] of the N2-W4-A category [2], made of hot-dip galvanized S235JR steel, is produced by Stalprodukt JSC Co., Bochnia, Poland.

Table 1. Parameters/options of modelling and simulation of crash tests of road safety barriers

Tabela 1. Parametry/opcje modelowania i symulacji testów zderzeniowych barier ochronnych

Item	Parameters / options
road safety barrier shell steel parts meshing	4-node shell finite elements of QUAD4 topology; Belytsko–Tsai formulation with 1 in-plane integration point and 5 integration points through thickness (ELFORM_2 formulation)
road safety barrier shell steel parts material model	*MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY (*MAT_24) elastic-plastic model with isotropic hardening; material constants taken from manufacturer's certification excluding FAIL parameter (numerical parameter determined on basis of calibration tests sensitive to meshing – plastic strain to failure and finite element erosion)
6-screw joints of guiderail segments	discrete beam elements with 6 DOFs, reflected by 6 stiffness characteristics (ELFORM_6 formulation); *NONLINEAR_PLASTIC_DISCRETE_BEAM (*MAT_068) nonlinear elastoplastic and linear viscous model; parameters and stiffness characteristics determined by comparison of 3D and 2D tension test modelling of guiderail joint section; 3D modelling: 8-node solid elements of HEX8 topology constant stress solid element (ELFORM_1 formulation) Flanagan–Belytschko stiffness form of hourglass control

Table 1 (cont.). Parameters/options of modelling and simulation of crash tests of road safety barriers

Tabela 1 (cd.). Parametry/opcje modelowania i symulacji testów zderzeniowych barier ochronnych

Item	Parameters / options
guiderail–post bolt joints	*CONSTRAINED_GENERALIZED_WELD_SPOT kinematic constraints; load capacities taken from bolt characteristics
bolt preload	dynamic relaxation procedure; *INITIAL_STRESS_SECTION option; approach used in 3D modelling only
asphalt/concrete pavement surface; roadside surface	rigid horizontal plane
road side soil meshing	posts embedded in soil cylinders; 3D finite elements of HEX8 and PENTA6 topology; 8-node solid element, trilinear shape functions, 1 integration point (ELFORM_1 formulation)
road side soil material model	*MAT_SOIL_AND_FOAM (*MAT_005) model; material constants taken from NCAC library [7]; soil cylinders coated with artificial shell with properties of *MAT_NULL (*MAT_009) material; no contact with roadside surface
vibration damping	*DAMPING_PART_STIFFNESS damping model; damping ratios: 0.03 - road safety barrier shell steel parts, 0.10 - road side soil
car model	Dodge Neon car numerical model taken from NCAC public library [7]; corrections to adapt car model to oblique crash tests: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ changing tire model from *AIRBAG model into *AIRBAG_SIMPLE_PRESSURE_VOLUME model</li> <li>✓ declaration of tire pressure equal to 2.3 bar</li> <li>✓ correction of suspension (application of *MAT_66 material model and BEAM elements in ELFORM_6 formulation, stiffness and damping suspension adjustment, adding preload in dynamic relaxation process)</li> <li>✓ dynamic relaxation (influence of gravity load) before starting vehicle collision with barrier</li> <li>✓ declaration of vehicle linear velocity and wheel angular velocity at start time point</li> <li>✓ adjustment of wheel alignment and wheel rotation axis</li> <li>✓ correction of contact options</li> <li>✓ correction of control cards</li> <li>✓ hourglass control (elimination of non-physical forms of vibration)</li> <li>✓ placing *ELEMENT_SEATBELT_ACCELEROMETER at car centre of gravity on rigid solid element connected to chassis by means of *CONSTRAINED_EXTRA_NODES bonds</li> <li>✓ correction of bond stiffness</li> </ul>
contact	*CONTACT_AUTOMATIC_SINGLE_SURFACE model between potential contact pairs; additionally, *CONTACT_INTERIOR for roadside soil and foam

Table 1 (cont.). Parameters/options of modelling and simulation of crash tests of road safety barriers

Tabela 1 (cd.). Parametry/opcje modelowania i symulacji testów zderzeniowych barier ochronnych

Item	Parameters / options
friction	Coulomb kinematic friction; experimental identification based on standards; friction coefficients: steel – steel pairs: 0.25, steel – soil pairs: 0.30, dry asphalt/concrete – tire pairs: 0.90, dry roadside – tire pairs: 0.68
Hourglass control	global stiffness procedure in Flanagan–Belytshko formulation
displacements	large
strains	large
numerical integration	explicit; finite difference method; time step assumed based on Courant–Friedrichs–Levy criterion

The connectors use M16 bolt sets of a 4.6 strength class. The main structural components of the barrier are: a B-type guide rail consisting of segments of an overall length of 4.30 m and a 4.00 m effective length, Sigma-100 posts of a length of 1.90 m at intervals of 2.00 m, supporting elements of a trapezoidal cross section and A-type rectangular pads [9]. The TB11 and TB32 crash tests results announced by the barrier producer are as follows: ASI = 0.8, W = 1.10 m, THIV = 23 km/h, VCDI = RF0001000 (the right-front place of deformation, the fourth dimension shortened by no more than 10%, the remaining characteristic dimensions shortened by no more than 3%) [4].

Full-scale experimental crash tests were carried out on the testing grounds at the Automotive Industry Institute, Warsaw, Poland, designed to carry out crash tests on all restraint levels of a protection system. The testing grounds consist of two main parts:

- a drive track 3.2 m wide and 200 m long, equipped with a drive rail, driving ropes, a drive trolley and a drive motor, used to accelerate the vehicle
- a crash square of a 1300 m<sup>2</sup> area (length 55 m, width 25 m).

The superstructure of the drive track and crash square is made of reinforced concrete. The load capacity of the track allows carrying out tests using vehicles weighing up to 40 000 kg. In the channel located in the track axis, the drive rail is installed, which is a guide for the drive trolley with roller bearings and steel wire ropes. The second trolley acts as a brake for the drive trolley and as a retarder for the drive rope.

In the crash test, the recording equipment met the requirements specified in standard [1]. The video recording uses three cameras for fast photos (min. 500 frames per second). The cameras were placed in front of and behind the barrier arc. The third camera was placed on an arm at a height of 24 m to record the respective crash site (top view). The impact speed of the car was measured using a laser device. To ensure safety, concrete barriers and an RC emergency braking

system for the test vehicle were installed. The following measurement equipment was used:

- acceleration sensors –Measurement Specialties model 64C<sup>®</sup>, mounted in the centre of gravity of the vehicle, to measure the acceleration components in the directions of the longitudinal, lateral and vertical axes of the vehicle
- angular rate sensors –DTS model ARS-8K<sup>®</sup>, mounted in the centre of gravity of the vehicle, to measure the angular rate components around the longitudinal, lateral and vertical axes of the vehicle
- DTS recording system to record with sampling rates up to 100 kHz
- laser device to measure the impact velocity of the car (at a distance of 15 m from the barrier)
- 3 Phantom<sup>®</sup> cameras for fast photos.

The location of the centre of gravity of the test car was examined in the Laboratory of Testing Vehicles, Automotive Industry Institute, Warsaw, Poland, according to the relevant standard.

## **5. Experimental verification of modelling and simulation of selected crash test**

The test sections of the SP-05/2 barrier had a length of 64.00 m as measured along the concave arc with a radius of 150 m. The central part with a length of 40.00 m was composed of 10 segments of guide rail, with a 4.00 m effective length each, and Sigma-100<sup>®</sup> posts interspaced 2.00 m. Barrier ends with a length of 12.00 m each were mounted horizontally, i.e. the end segments of the guide rail were horizontal.

The impact angle, as measured between the longitudinal axis of the vehicle and the tangent to the arc of the guiderail at the intersection of the vehicle axis with this arc, was 20°, which corresponds to an angle of 23° between the axis of the drive track and the tangent to the guide arc in the middle of the barrier test section. The distance of the arc of the mounting the posts from the edge of the concrete pavement was 0.30 m. The theoretical point of impact, i.e. the intersection of the drive track axis with the guide face arc was located at a distance of 7.00 m from the barrier centre.

The experimental and simulation crash tests for barrier SP-05/2 mounted in a horizontal concave arc of a R=150 m radius were carried out at the impact velocity of  $v_i=97.7$  km/h, reduced by 12.3 km/h compared to the standard speed of 110 km/h. The simulation included a time interval of 0 – 3 seconds measured from the collision start time.



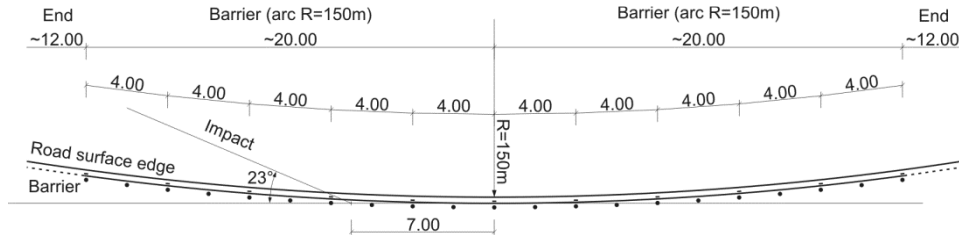


Fig. 1. Barrier SP-05/2 in horizontal concave arc of  $R = 150$  m radius and car impact location for TB32 test

Rys. 1. Bariera SP-05/2 w łuku poziomym wklęsłym o promieniu  $R=150$  m i położenie uderzenia pojazdu dal testu TB32

Figure 2 compares the TB32 experimental and simulation tests, in the form of photos at selected time points, extracted from the video recorded from the top view. Figure 3 compares the relevant graphs of the acceleration severity index vs. time  $t$ . The experimental  $ASI(t)$  curve is shown in two variants:

- (1) CAT: a curve determined at the sampling frequency of 105 Hz, using DIAdem 2015<sup>®</sup> software –Crash Analysis Toolkit<sup>®</sup> module.
- (2) LPP: a curve determined at the sampling frequency of 104 Hz, according to the standard algorithm [1] programmed in the LS-PrePost postprocessor of the LS-Dyna FE code.

Table 1 compares the values of the functionality parameters of barrier SP-05/2 for the TB32 test. The measured/calculated and rounded (according to standard [2]) values are reported. The conclusions resulting from the full-scale experimental test TB32 and from comparison of the simulation and experimental test results are as follows:

- (1) In the experimental crash test, the right front (RF) suspension and wheel were destroyed. After the first (major) impact of the car into the barrier, skidding (tail rotation) of the car and rebound of the car from the barrier, with significant crossing of the front line of the exit box were observed.
- (2) The reason for the destruction of the RF suspension and wheel could be the age of the car (18 years) and the mileage (~200 000 km). In further tests, cars currently in use should be used.
- (3) The experimental  $ASI(t)$  plot maps the initial impact of the car into the guid-rail and successive impacts into seven posts. The first six posts plasticized on contact with the ground, and were overturned on the roadside, after having broken the post-guide rail bolt connections.
- (4) The compatibility of the experimental and simulation trajectories of the vehicle motion is good. Slight differences in the trajectories are only observed in the exit box. The main reason could be the lack of criteria for destruction of the RF suspension and wheel in the NCAC car numerical model.

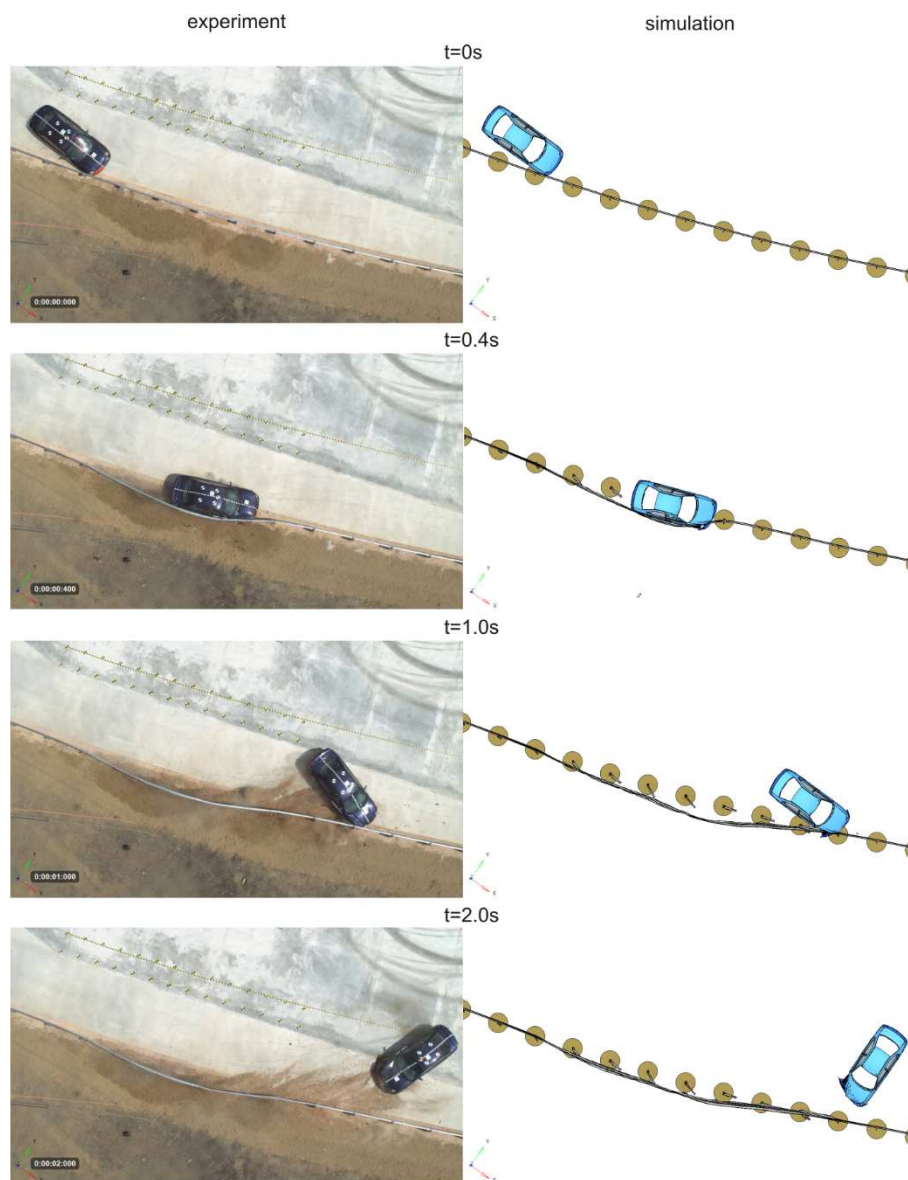


Fig. 2. Comparison of experimental and simulation tests TB32/CB, from top view, at selected time points

Rys. 2. Porównanie testu eksperymentalnego i symulacyjnego TB32, w widoku z góry, w wybranych punktach czasowych

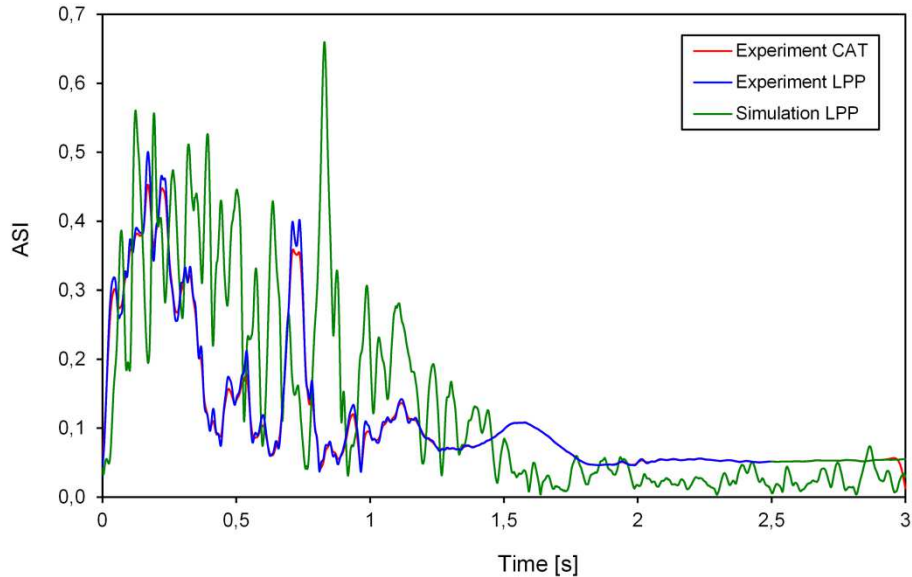


Fig. 3. Comparison of  $ASI(t)$  experimental and simulation graphs for test TB32

Rys. 3. Porównanie eksperymentalnego i symulacyjnego wykresu  $ASI(t)$  dla testu TB32

Table 2. Summary of functionality parameter values of barrier SP-05/2 for test TB32

Tabela 2. Zestawienie wartości parametrów funkcjonalności bariery SP-05/2 dla testu TB32

Conditions	ASI [-]	THIV [km/h]	W [m]
Experiment, CAT	0.45 (0.5)	26.26 (26)	0.990 (1.0)
Experiment, LPP	0.50 (0.5)	16.30 (16)	
Simulation, LPP	0.56 (0.6 for $t \sim -0.2$ s) 0.66 (0.7 for $t \sim -0.9$ s)	16.49 (16)	1.076 (1.1)

- (5) In the initial phase, the exact value of ASI in the simulation is higher by 12.0% than that in the experiment (LPP), which is assessed as good compatibility. Qualitative compatibility of the  $ASI(t)$  simulation and experimental graphs is acceptable. ASI in the simulation corresponds to the impact of the vehicle into the seventh post, causing the skidding and rebound of the car off the barrier. The main reason is the lack of criteria for the destruction of the RF suspension and wheel in the NCAC car model.
- (6) The oscillations in the simulated  $ASI(t)$  graph prove too small vibration damping in the NCAC car numerical model. This model requires further modifications on damping and destruction criteria.
- (7) The  $ASI(t)$  graphs calculated by the CAT and LPP algorithms vary slightly, which is caused by reducing the sampling rate by one rank in the LPP algorithm.

- (8) The simulated and experimental values of the THIV parameter are consistent. The simulated working width is higher by 8.7% than the width in the experiment, which is assessed as good compatibility.
- (9) The criteria for approval for the TB32 crash test for a SP-05/2 barrier of class N2-W4-A, built on a horizontal concave arc of a radius of  $R=150$  m, are met except for the exit box criterion. This conclusion is valid for both the simulation and the experiment.

## 6. Final conclusions

- (1) Protective road barriers of class N2-W4-A applied on road bends with a relatively small radius (150 m or so), the exit box criterion in the TB32 crash test may not be met, even at a reduced velocity of the car, by 10% compared to the standard velocity.
- (2) In the experimental TB32 crash test for a road safety barrier of class N2-W4-A, used on a horizontal concave arc of a 150 m radius, the front right suspension and wheel of the car were destroyed. After the major impact of the car into the barrier, skidding and rebound of the vehicle off the barrier, with substantial crossing of the front line of the exit box were observed.
- (3) The possible reason for destruction of the FR suspension and wheel of the Dodge Neon car used in the experiments could be the car's age (18 years) and mileage (~200 000 km). In further TB32 tests, cars of different makes currently in use, weighting 1500 kg should be applied.
- (4) The experimental verification of the TB32 simulation crash test for the selected curved barrier, is reasonably positive. The main reason for some differences between the experiment and the simulation could be the lack of criteria for destruction of the RF suspension and wheel in the NCAC numerical car model. This model requires further modifications.

### *Acknowledgements*

*This work was supported by the National Centre for Research and Development, Poland, under Grant No. PBS1/B6/14/2012. This support is gratefully acknowledged.*

### **References**

- [1] PN EN 1317-1:2010, Road restraint systems – Part 1: Terminology and general criteria for test methods (in Polish), 2010.
- [2] PN EN 1317-2:2010, Road restraint systems – Part 2: Performance classes, impact test acceptance criteria and test methods for safety barriers including vehicle parapets (in Polish), 2010.
- [3] PN-EN 1317-5+A2:2012. Road restraint systems – Part 5: Product requirements and evaluation of conformity for vehicle restraint systems (in Polish), 2012.

- [4] Nycz D.B., Modelling and numerical research of crash tests for barrier of N2-W4-A category on road bends (in Polish), Ph.D. thesis, Military Univ. Technol. Press, Warsaw, Poland, 2015.
- [5] Klasztorny M., Nycz D.B., Szurgott P.: Modelling and Simulation of Crash Tests of N2-W4-A Category Safety Road Barrier in Horizontal Concave Arc, Int. Journal of Crashworthiness, vol. 21, no. 6, 2016, pp. 644-659.
- [6] Manual for Assessing Safety Hardware. The American Association of State Highway and Transportation Officials, 2009, [http://books.google.pl/books?id=LV0mSYE9-S0C&printsec=frontcover&hl=pl&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](http://books.google.pl/books?id=LV0mSYE9-S0C&printsec=frontcover&hl=pl&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false), uploaded 2014-09-18.
- [7] Vehicle models, National Crash Analysis Center, USA, <http://www.ncac.gwu.edu/vml/models.html>, uploaded 2014-09-18.
- [8] Hallquist J. O., LS-DYNA Keyword User's Manual, Livermore Software Technology Corp., Livermore, CA, USA, May 2007.
- [9] System N2-W4-A (SP-05/2), Stalprodukt S.A., Bochnia, Poland, 2011.

## WERYFIKACJA EKSPERYMENTALNA SYMULACJI TESTU ZDERZENIOWEGO TB32 DROGOWEJ BARIERY OCHRONNEJ SP-05/2 W ŁUKU POZIOMYM WKŁĘŚLYM

### Streszczenie

Przedmiotem badań numerycznych i eksperymentalnych jest stalowa taśmowa drogowa bariera ochronna, składająca się z prowadnicy typu B, słupków Sigma-100 w odstępach 2,00 m oraz elementów podporowych. Bariera jest w łuku poziomym wklęsłym o promieniu 150 m. Test zderzeniowy TB32 według PN-EN 1317 przeprowadzono na poligonie Przemysłowego Instytutu Motoryzacji w Warszawie, z użyciem samochodu Dodge Neon. Zastosowano metodologię modelowania numerycznego i symulacji układu bariera – pojazd opracowaną przez część zespołu autorów. Symulację ww. testu zderzeniowego przeprowadzono przy zastosowaniu systemu LS-Dyna v.971, przy zachowaniu warunków testu eksperymentalnego. Analizą objęto wszystkie parametry funkcjonalności bariery określone w normie PN-EN 1317, m.in. ASI, THIV, szerokość pracująca, trajektoria ruchu pojazdu w polu wyjścia. Przeprowadzono weryfikację eksperymentalną modelowania numerycznego i symulacji testu TB32. Wynik weryfikacji oceniono pozytywnie. Udowodniono, zarówno numerycznie, jak i eksperymentalnie, że w rozpatrywanym przypadku bariery w łuku poziomym test TB32 nie spełnia kryterium pola wyjścia pojazdu.

**Słowa kluczowe:** drogowa bariera ochronna w łuku poziomym wklęsłym, symulacyjny test zderzeniowy, eksperymentalny test zderzeniowy, weryfikacja eksperymentalna modelowania i symulacji

*Przesłano do redakcji: 17.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Zbigniew SIENKIEWICZ<sup>1</sup>

## PIONOWE DRGANIA WŁASNE OSIOWOSYMETRYCZNEJ SZTYWNEJ BRYŁY ZAGŁĘBIONEJ W INERCYJNEJ PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

Przedstawiono analizę pionowych drgań własnych masywnej osiowosymetrycznej sztywnej bryły zagłębionej w jednorodnej inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Zespoloną sztywność półprzestrzeni z więzami nałożonymi przez sztywną bryłę otrzymano z rozwiązania mieszanego osiowosymetrycznego zagadnienia brzegowego dynamicznej teorii sprężystości metodą elementów brzegowych w dziedzinie częstości. Część rzeczywista zespolonej sztywności pionowej reprezentuje sztywność i inercję podłoża, część urojona przedstawia tłumienie związane z rozchodzeniem się fal w półnieskończonym ośrodku sprężystym (tłumienie radiacyjne). Współczynniki sztywności i tłumienia półprzestrzeni są funkcjami częstości drgań. Częstość drgań własnych sztywnej bryły z więzami nałożonymi przez inercyjną półprzestrzeń sprężystą jest pierwiastkiem nieliniowego równania charakterystycznego. Analizę drgań własnych przeprowadzono stosując parametry bezwymiarowe: współczynnik zagłębienia bryły w podłożu, współczynnik masy, współczynnik częstości oraz współczynnik tłumienia radiacyjnego. Przedstawiono zależność współczynnika częstości drgań własnych i współczynnika tłumienia od współczynnika masy i współczynnika zagłębienia. Wyznaczono również współczynniki częstości drgań własnych bryły przy pominięciu tłumienia radiacyjnego oraz w przypadku bryły zagłębionej w półprzestrzeni nieinercyjnej, której pionowa sztywność statyczna jest granicą dynamicznego współczynnika sztywności półprzestrzeni przy częstości dążącej do zera. Różnice między współczynnikami częstości reprezentują wpływ tłumienia radiacyjnego oraz inercji półprzestrzeni.

**Słowa kluczowe:** częstości drgań własnych, interakcja dynamiczna, metoda elementów brzegowych, nieliniowe równanie charakterystyczne

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Zbigniew Sienkiewicz, Politechnika Koszalińska, Wydział Inżynierii Lądowej, Środowiska i Geodezji, Katedra Mechaniki Budowli, ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin; tel. 94-3478-567; zbigniew.sienkiewicz@wilsig.tu.koszalin.pl

## 1. Wprowadzenie

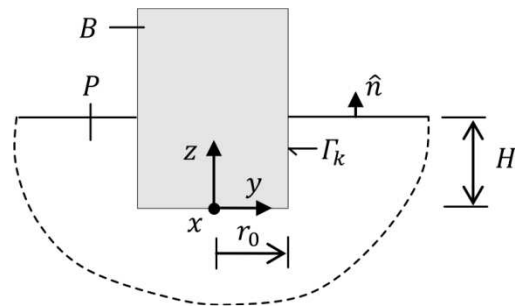
Klasyycznym modelem fundamentu blokowego pod maszyną jest sztywna bryła na nieinercyjnym podłożu sprężystym [1],[2]. Bardziej zaawansowanym modelem jest sztywna bryła zagłębiona w inercyjnej półprzestrzeni sprężystej [3], [4], [5]. W analizie dynamicznej ważnym problemem jest zagadnienie własne [1]. Pionowe i złożone drgania własne masywnego fundamentu o podstawie prostokątnej zagłębionego w półprzestrzeni lepkosprężystej z lokalnym modelowaniem wpływu zasypki analizowano w pracy [6]. Przypadek masywnego bloku o podstawie kwadratowej na powierzchni uwarstwionej półprzestrzeni sprężystej przedstawiono w pracy [7].

W prezentowanej pracy analizuje się pionowe drgania własne masywnej osiowoosymetrycznej sztywnej bryły zagłębionej w inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. W układzie bryła-półprzestrzeń uwzględniono interakcję dynamiczną rozwiązując mieszane osiowoosymetryczne zagadnienie brzegowe teorii sprężystości w dziedzinie częstości.

## 2. Sformułowanie problemu

### 2.1. Układ sztywna bryła-półprzestrzeń sprężysta

Rozpatruje się osiowoosymetryczną sztywną bryłę  $B \subset R^3$  o masie  $m$  i promieniu  $r_0$ , połączoną więzami dwustronnymi z inercyjną półprzestrzenią sprężystą  $P \subset R^3$  na powierzchni kontaktu  $\Gamma_k = \Gamma_k^B \cap \Gamma_k^P$ , gdzie  $\Gamma_k^B \subset \partial B$  oznacza część powierzchni bryły w kontakcie z półprzestrzenią a  $\Gamma_k^P \subset \partial P$  – część powierzchni półprzestrzeni w kontakcie z bryłą (rys. 1.).



Rys. 1. Sztywna bryła  $B$  zagłębiona w półprzestrzeń sprężystej  $P$

Fig. 1. Rigid body  $B$  embedded in an elastic half-space

Właściwości półprzestrzeni sprężystej określają: gęstość  $\rho$ , współczynnik Poissona  $\nu$  i moduł ścinania  $G$ .

## 2.2. Interakcja kinematyczna w układzie bryła-półprzestrzeń

Niech funkcja  $w^*(t; \omega) = w_0^* e^{i\omega t}$  opisuje zmienne w czasie  $t$  przemieszczenia nieważkiej osiowosymetrycznej sztywnej bryły  $B^* = B|_{m=0}$  w kierunku pionowej osi  $z$  (rys. 1.), gdzie  $w_0^*$  – amplituda drgań,  $\omega$  – częstość w  $rad/s$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Harmoniczne pionowe oscylacje sztywnego stempla stanowią osiowosymetryczne wymuszenie kinematyczne na powierzchni kontaktu  $\Gamma_k^P$  półprzestrzeni z bryłą. W półprzestrzeni sprężystej  $P$  powstanie osiowosymetryczne pole przemieszczenia  $\vec{u}(\underline{x}, t; \omega)$ ,  $\underline{x} \in P \subset R^3$ , które w układzie walcowym  $(r, \varphi, z)$  ma składowe niezależne od kąta  $\varphi$ :  $\vec{u}(\underline{x}, t; \omega) = (u_r(\underline{x}; \omega), 0, u_z(\underline{x}; \omega)) e^{i\omega t}$ .

Pole przemieszczenia  $u_r(\underline{x}; \omega)$ ,  $u_z(\underline{x}; \omega)$ ,  $\underline{x} \in P$  musi spełniać następujące warunki:

- równania ruchu Naviera w dziedzinie częstości [8],
- przemieszczeniowy warunek brzegowy na powierzchni kontaktu  $\Gamma_k^P \subset \partial P$ ,

$$u_r(\underline{x}; \omega) = 0, \underline{x} \in \Gamma_k^P$$

$$u_z(\underline{x}; \omega) = w_0^*, \underline{x} \in \Gamma_k^P$$

- naprężeniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni półprzestrzeni  $\Gamma_0^P \subset \partial P \setminus \Gamma_k^P$ ,

$$t_r^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega) = 0, \underline{x} \in \Gamma_0^P$$

$$t_z^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega) = 0, \underline{x} \in \Gamma_0^P$$

gdzie  $\hat{n}$  oznacza wektor jednostkowy normalny do powierzchni  $\Gamma_0^P$  i skierowany na zewnątrz  $P$ ,

- warunek wypromieniowania w ośrodku półnieskończonym [9].

Sformułowanie całkowe powyższego mieszanego osiowosymetrycznego zagadnienia brzegowego dynamicznej teorii sprężystości określone jest tylko na tworzącej  $L$  powierzchni  $\partial P$  [10]:

$$\frac{1}{2} \{u_{os}(\underline{x}; \omega)\} = \int_L \left( [A(\underline{x}, \underline{y}; \omega)] \{t_{os}^{(\hat{n})}(\underline{y}; \omega)\} - [B(\underline{x}, \underline{y}; \omega)] \{u_{os}(\underline{y}; \omega)\} \right) r(\underline{y}) dl(r(\underline{y}), z(\underline{y})) \quad (1)$$

gdzie:

$$\{u_{os}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}, \{t_{os}^{(\hat{n})}\} = \begin{Bmatrix} t_r^{(\hat{n})} \\ t_z^{(\hat{n})} \end{Bmatrix},$$



$$[A] = 2 \int_0^\pi \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} \cos \varphi + \tilde{U}_{12} \sin \varphi & \tilde{U}_{13} \\ \tilde{U}_{31} \cos \varphi + \tilde{U}_{32} \sin \varphi & \tilde{U}_{33} \end{bmatrix} d\varphi(\underline{y}),$$

$$[B] = 2 \int_0^\pi \begin{bmatrix} \tilde{T}_{11} \cos \varphi + \tilde{T}_{12} \sin \varphi & \tilde{T}_{13} \\ \tilde{T}_{31} \cos \varphi + \tilde{T}_{32} \sin \varphi & \tilde{T}_{33} \end{bmatrix} d\varphi(\underline{y}),$$

$\tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{ij}(\underline{x}, \underline{y}; \omega)$  – zespolone przemieszczenie punktu  $\underline{y}$  w kierunku  $j$  w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, wywołane stacjonarną siłą skupioną  $1e^{i\omega t}$ , działającą w punkcie  $\underline{x}$  w kierunku  $i$  (kartezjański układ współrzędnych),

$\tilde{T}_{ij} = \tilde{T}_{ij}(\underline{x}, \underline{y}; \omega)$  – zespolona składowa wektora naprężenia w punkcie  $\underline{y}$  w kierunku  $j$  w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, wywołana stacjonarną siłą skupioną  $1e^{i\omega t}$ , działającą w punkcie  $\underline{x}$  w kierunku  $i$  (kartezjański układ współrzędnych).

Brzegowe równanie całkowe (1) można rozwiązać numerycznie dzieląc brzeg  $L$  na  $N$  segmentów liniowych z jednym węzłem w środku każdego elementu [11]. Z rozwiązania otrzymuje się m.in. przybliżony rozkład zespolonego pola naprężenia  $\tilde{t}_z^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega)$  na powierzchni kontaktu  $\Gamma_k^P \subset \partial P$ . Wypadkowa tego pola wynosi:

$$\tilde{R}_z^P(t; \omega) = \int_{\Gamma_k^P} \tilde{t}_z^{(\hat{n})}(\underline{x}; \omega) e^{i\omega t} dS(\underline{x}) = \tilde{K}_z(\omega) w^*(t; \omega)$$

gdzie:  $\tilde{K}_z(\omega)$  – pionowa zespolona sztywność dynamiczna półprzestrzeni z więzami nałożonymi przez sztywny nieważki stempel kołowy.

Stacjonarną reakcję półprzestrzeni  $\tilde{R}_z^P(t; \omega)$  można zapisać w postaci

$$\tilde{R}_z^P(t; \omega) = (\text{Re} \tilde{K}_z + i \text{Im} \tilde{K}_z) w^*(t; \omega) = K_V(\omega) w^*(t; \omega) + C_V(\omega) \dot{w}^*(t; \omega) \quad (2)$$

gdzie:  $K_V = \text{Re} \tilde{K}_z$  – współczynnik sztywności półprzestrzeni,

$C_V = (\frac{1}{\omega}) \text{Im} \tilde{K}_z$  – współczynnik tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni,

$\dot{w}^* \equiv \frac{d}{dt} w^*$ .

### 2.3. Pionowe drgania własne sztywnej bryły z więzami nałożonymi przez półprzestrzeń sprężystą

Rozwiązanie zagadnienia interakcji kinematycznej w układzie nieważka sztywna bryła-półprzestrzeń sprężysta umożliwia analizę pionowych drgań wła-

snych osiowosymetrycznej sztywnej bryły o masie  $m$ , zagłębionej w inercjalnej półprzestrzeni sprężystej. Równanie ruchu pionowego bryły ma postać:

$$m\ddot{w}(t; \omega) = -R_z^P(t; \omega) \quad (3)$$

gdzie reakcja półprzestrzeni  $R_z^P(t; \omega)$  dana jest zależnością wynikającą z rozwiązania zagadnienia interakcji kinematycznej (2) :

$$R_z^P(t; \omega) = K_V(\omega)w(t; \omega) + C_V(\omega)\dot{w}(t; \omega) \quad (4)$$

Uwzględnienie zależności (4) w równaniu ruchu (3) prowadzi do jednorodnego równania różniczkowego:

$$m\ddot{w}(t; \omega) + C_V(\omega)\dot{w}(t; \omega) + K_V(\omega)w(t; \omega) = 0,$$

którego rozwiązanie postuluje się w postaci ruchu oscylacyjnego z częstością  $\omega$  i parametrem tłumienia  $h$ :

$$w(t; \omega) = w_0 e^{-ht} e^{i\omega t} = w_0 e^{i(\omega+ih)t}$$

Warunek istnienia rozwiązania oscylacyjnego  $\omega \neq 0$  ma postać

$$\frac{K_V(\omega)}{m} - \left(\frac{C_V(\omega)}{2m}\right)^2 - \omega^2 = 0 \quad (5)$$

Miejsce zerowe nieliniowego równania (5)  $\omega^* \equiv \omega^d$  jest częstością pionowych drgań własnych sztywnej bryły z tłumieniem radiacyjnym (falowym) inercyjnej półprzestrzeni sprężystej. Po wyznaczeniu częstości  $\omega^d$ , parametr tłumienia  $h$  oblicza się ze wzoru

$$h(\omega^d) = \frac{C_V(\omega^d)}{2m}$$

Pomijając tłumienie radiacyjne półprzestrzeni w równaniu (5), tj. zakładając  $C_V(\omega) \equiv 0$ , otrzymuje się inne miejsce zerowe  $\omega^* \equiv \omega^n$ , które jest częstością pionowych drgań własnych bryły bez tłumienia falowego. Zakładając, że podłoże jest nieinercyjne otrzymuje się częstość drgań własnych bryły  $\omega^{st}$  ze wzoru

$$\omega^{st} = \sqrt{\frac{K_V^{st}}{m}}$$

gdzie  $K_V^{st} = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_V(\omega)$  jest pionową statyczną sztywnością półprzestrzeni sprężystej z więzami nałożonymi przez sztywny nieważki stempel kołowy. Różnice między  $\omega^d$  i  $\omega^n$  reprezentują wpływ tłumienia radiacyjnego inercyjnej półprzestrzeni na częstości drgań własnych sztywnej bryły natomiast różnice między nietłumionymi częstościami  $\omega^n$  i  $\omega^{st}$  przedstawiają wpływ inercji półnieskończonego podłoża sprężystego.

### 3. Analiza parametryczna

Analizę parametryczną pionowych drgań własnych osiowosymetrycznej masywnej sztywnej bryły zagłębionej w podłożu sprężystym przeprowadzono stosując następujący zbiór parametrów bezwymiarowych:

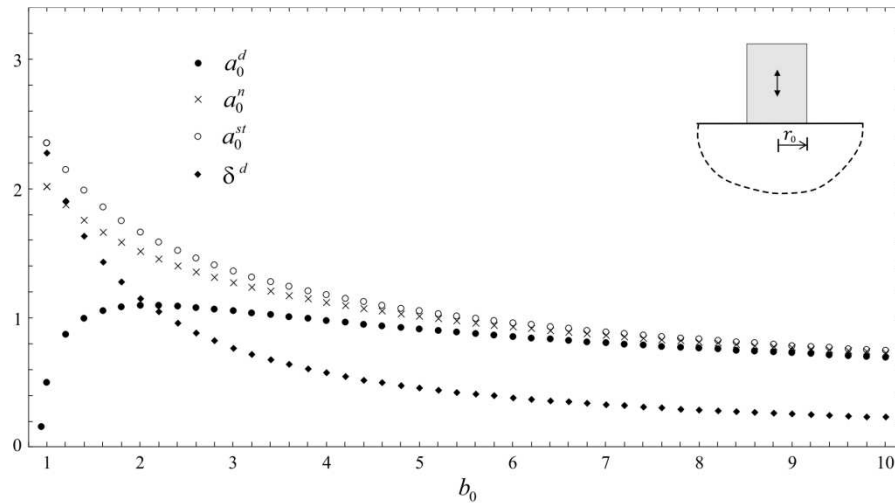
- współczynnik zagłębienia bryły w podłożu:  $H/r_0$ ,
- współczynnik masy:  $b_0 = m/(\rho r_0^3)$ ,
- współczynniki częstości:  $a_0 = \omega r_0/\sqrt{G/\rho}$ ;  $a_0^d = a_0(\omega^d)$ ;  $a_0^n = a_0(\omega^n)$ ;  $a_0^{st} = a_0(\omega^{st})$ ,
- współczynnik tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni:  $\delta^d = hr_0/\sqrt{G/\rho}$ ,
- współczynnik Poissona półprzestrzeni  $\nu = 0.25$ .

Zagadnienie interakcji kinematycznej w układzie bryła–półprzestrzeń rozwiązywano metodą elementów brzegowych [11], ustalając ostateczną dyskretyzację na podstawie testów numerycznych: na tworzącej  $L_k^P$  powierzchni kontaktu  $\Gamma_k^P$  zastosowano elementy o długości  $l_e = \lambda_s/6$ , gdzie  $\lambda_s = (1/\omega)2\pi\sqrt{G/\rho}$  oznacza długość fali poprzecznej w półprzestrzeni, natomiast na tworzącej  $L_0^P$  powierzchni swobodnej  $\Gamma_0^P$  zastosowano elementy o długości  $l_e = \lambda_s/4$ , przy czym efektywna część brzegu  $L_0^P$  podlegająca dyskretyzacji zależy od wielkości zagłębienia bryły w półprzestrzeni. Miejsca zerowe nieliniowego równania charakterystycznego wyznaczano numerycznie [7]. Wartości współczynników częstości drgań własnych  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  oraz współczynnika tłumienia  $\delta^d$  obliczono stosując dyskretne wartości współczynnika zagłębienia bryły w podłożu  $H/r_0 \in \{0, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0\}$  oraz dyskretne wartości współczynnika masy  $b_0$  ogólnie od 1 do 10 co  $\Delta b_0 = 0.2$ , zmniejszając przyrosty  $\Delta b_0$  w strefie dużej wrażliwości  $a_0^d$ . Wyniki analizy parametrycznej przedstawiono na rys. 2-6.

### 4. Wnioski

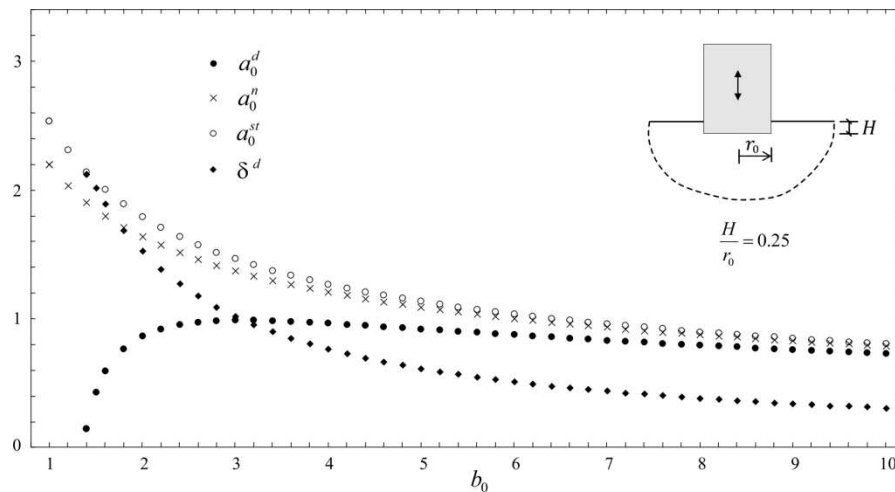
Współczynnik częstości pionowych drgań własnych bryły zagłębionej w jednorodnej inercyjnej półprzestrzeni sprężystej jest kontrolowany przez współczynnik masy oraz współczynniki sztywności i tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni. Strefy wrażliwości współczynnika częstości drgań własnych na zmianę współczynnika masy są zróżnicowane, z największą wrażliwością w strefie granicznej wartości współczynnika masy, rozdzielającej ruch oscylacyjny od nieoscylacyjnego. Ponadto graniczna wartość współczynnika masy rośnie wraz ze wzrostem współczynnika zagłębienia. Istotny wpływ tłumienia radiacyjnego półprzestrzeni i wielkości zagłębienia bryły w podłożu na jej pionowe drgania własne jest widoczny na tle wyznaczonych częstości drgań własnych bez tłumienia radiacyjnego podłoża inercyjnego. Zbiór częstości drgań własnych bryły na podłożu nieinercyjnym o sztywności statycznej jest dobrym układem

odniesienia do odpowiedzi na pytanie, kiedy uwzględnienie dynamicznej interakcji w analizowanym zagadnieniu jest konieczne.



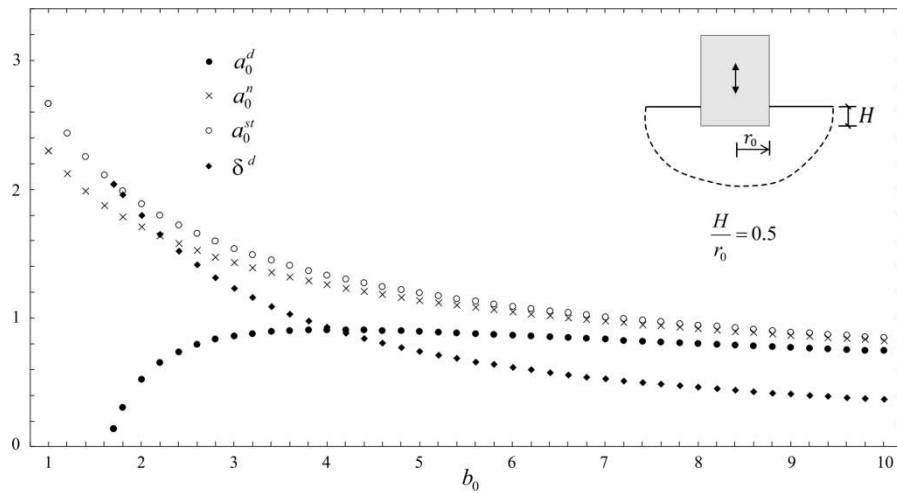
Rys. 2. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych  $a_0^d$ ,  $a_0^n$ ,  $a_0^{st}$  i współczynnika tłumienia  $\delta^d$  od współczynnika masy  $b_0$ : sztywna bryła na powierzchni półprzestrzeni

Fig. 2. Variation of dimensionless eigenfrequencies  $a_0^d$ ,  $a_0^n$ ,  $a_0^{st}$  and damping ratio  $\delta^d$  with the mass ratio  $b_0$ : rigid body on half-space



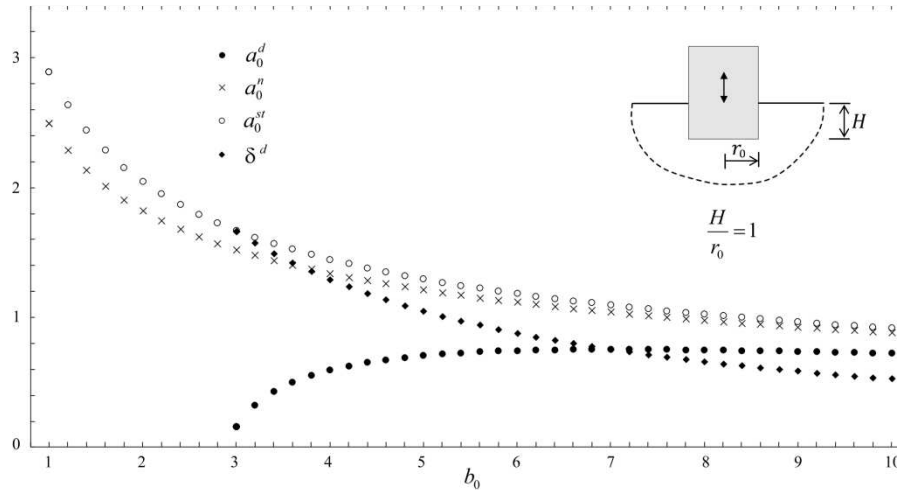
Rys. 3. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych  $a_0^d$ ,  $a_0^n$ ,  $a_0^{st}$  i współczynnika tłumienia  $\delta^d$  od współczynnika masy  $b_0$ : zagłębienie bryły  $H/r_0 = 0.25$

Fig. 3. Variation of dimensionless eigenfrequencies  $a_0^d$ ,  $a_0^n$ ,  $a_0^{st}$  and damping ratio  $\delta^d$  with the mass ratio  $b_0$ : the embedment ratio  $H/r_0 = 0.25$



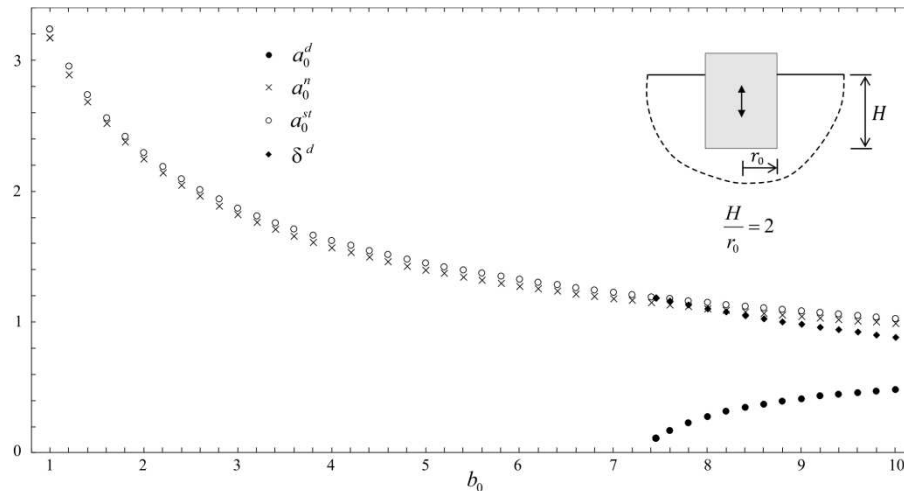
Rys. 4. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  i współczynnika tłumienia  $\delta^d$  od współczynnika masy  $b_0$ : zagłębienie bryły  $H/r_0 = 0.5$

Fig. 4. Variation of dimensionless eigenfrequencies  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  and damping ratio  $\delta^d$  with the mass ratio  $b_0$ : the embedment ratio  $H/r_0 = 0.5$



Rys. 5. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  i współczynnika tłumienia  $\delta^d$  od współczynnika masy  $b_0$ : zagłębienie bryły  $H/r_0 = 1$

Fig. 5. Variation of dimensionless eigenfrequencies  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  and damping ratio  $\delta^d$  with the mass ratio  $b_0$ : the embedment ratio  $H/r_0 = 1$



Rys. 6. Zależność bezwymiarowych częstości drgań własnych  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  i współczynnika tłumienia  $\delta^d$  od współczynnika masy  $b_0$ : zagłębienie bryły  $H/r_0 = 2$

Fig. 6. Variation of dimensionless eigenfrequencies  $a_0^d, a_0^n, a_0^{st}$  and damping ratio  $\delta^d$  with the mass ratio  $b_0$ : the embedment ratio:  $H/r_0 = 2$

## Literatura

- [1] Langer J.: Dynamika budowli, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
- [2] Lipiński J.: Fundamenty pod maszyny, Arkady, Warszawa 1985.
- [3] Richart F.E., Woods R.D., Hall J.R.: Vibrations of soils and foundations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1970.
- [4] Gazetas G.: Analysis of machine foundation vibrations: state of the art, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 2, 1983, pp. 2-42.
- [5] Sienkiewicz Z.: Local modelling of backfill effects for rigid axisymmetric foundations under dynamic excitation, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 47, no. 4, 2009, pp. 923-942.
- [6] Sienkiewicz Z.: Free vibrations of rigid massive rectangular foundations embedded in a viscoelastic half-space, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 33, no. 1, 1995, pp. 115-138.
- [7] Sienkiewicz Z.: Eigenproperties of massive rigid body on elastic half-space, Journal of Geotechnical Engineering, vol. 122, no. 6, 1996, pp. 488-491.
- [8] Achenbach J.D.: Wave propagation in elastic solids, North-Holland, Amsterdam 1973.
- [9] Eringen A.C., Suhubi E.S.: Elastodynamics, Academic Press, New York 1975
- [10] Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
- [11] Dominguez J.: Boundary elements in dynamics, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton and London 1993.

## VERTICAL EIGENVIBRATION OF AXISYMMETRIC RIGID BODY EMBEDDED IN AN INERTIAL ELASTIC HALF-SPACE

### Summary

An analysis of vertical eigenvibration of a massive axisymmetric rigid body embedded in a uniform elastic half-space is presented. The complex-value stiffness of the half-space with the constraints imposed by the rigid body has been obtained from the solution of a mixed axisymmetric boundary value problem of the dynamic elasticity by the boundary element method in the frequency domain. The real part of the complex-valued stiffness represents the stiffness and inertia of the medium while the imaginary part describes the damping due to energy dissipated by waves propagating away from the foundation (radiation damping). Stiffness and damping coefficients of the half-space are frequency dependent.

Eigenfrequency of the rigid body with the constraints imposed by the inertial elastic half-space is the root of nonlinear characteristic equation. The analysis of the eigenvibration has been realized using the dimensionless parameters: embedment ratio, mass ratio, frequency ratio and radiation damping ratio. Variation of dimensionless eigenfrequency and damping ratio with the mass and embedment ratios are presented. Dimensionless eigenfrequencies at neglected radiation damping and in the case of a massless elastic medium are also computed. The differences between the damped and undamped eigenfrequencies represent the effects of radiation damping and inertia of the half-space.

**Keywords:** eigenfrequencies, dynamic interaction, boundary element method, nonlinear characteristic equation

*Przesłano do redakcji: 17.02.2017 r*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Lucjan KRÓL<sup>1</sup>

## WYZNACZENIE ZALEŻNOŚCI MIĘDZY EFEKTYWNOŚCIĄ DZIAŁANIA A SPRAWNOŚCIĄ MECHANICZNĄ MECHANIZMU RÓŻNICOWEGO

Pojazdy samochodowe o napędzie na wszystkie koła ze stałym lub chwilowym podziałem momentu obrotowego charakteryzują się lepszą zdolnością do poruszania się w trudnym terenie czy też w różnorodnych warunkach drogowych z powodu podziału siły napędowej na przednią i tylną oś napędową. Polepszenie właściwości trakcyjnych pojazdów samochodowych od lat jest przedmiotem badań i rozważań w branży motoryzacyjnej, nie tylko z uwagi na większe możliwości samochodów, ale przede wszystkim z powodu zwiększenia bezpieczeństwa. Moment obrotowy przeniesiony przez mechanizm różnicowy na oś napędową, której koła znajdują się na nawierzchni o mniejszym współczynniku przyczepności, może być przyczyną utraty kontroli nad pojazdem. Szczególnie przy dużych prędkościach.

Przedmiotem pracy są badania wpływu sprawności centralnego mechanizmu różnicowego na dystrybucję momentu obrotowego poszczególnych osi napędowych. Badania przeprowadzone zostały na międzyosiowym mechanizmie różnicowym stosowanym w skrzynce rozdzielczej 6-cio biegowej manualnej skrzyni biegów.

Na podstawie dokonanej analizy wyników badań przedstawiono wpływ wielkości luzu pomiędzy czopem satelitów a średnicą otworów pod czopy satelitów w obudowie mechanizmu na wartość wyjściowego momentu obrotowego z mechanizmu różnicowego, a tym samym na jego sprawność oraz wykazano brak jednoznacznej, liniowej zależności pomiędzy sprawnością mechaniczną, a wartością wskaźnika dystrybucji momentu obrotowego.

**Słowa kluczowe:** Mechanizm różnicowy, moment obrotowy, dystrybucja momentu obrotowego, sprawność działania

### 1. Wstęp

Pojazdy samochodowe z napędem na wszystkie koła w porównaniu do pojazdów napędzanych na jedną oś charakteryzują się między innymi większym poziomem bezpieczeństwa oraz komfortem jazdy podczas różnorodnych warunków pogodowych oraz eksploatacyjnych, takich jak: śnieg, gołoledź czy nieutwardzone drogi. Rozdzielenie siły napędowej na wszystkie cztery koła w samo-

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Lucjan Król, Politechnika Opolska, Wydział Mechaniczny, ul. St. Mikołajczyka 5, 45-001 Opole, lucjan.krol@doktorant.po.edu.pl



chodach osobowych oraz pochodnych (vany, pojazdy terenowe, SUV) pozwoliło na zwiększenie, w stosunku do pojazdów z napędem na przednią (FWD) lub tylną (RWD) oś, właściwości trakcyjnych i eksploatacyjnych takich jak [1, 2]:

- większa zdolność rozpędzania, zwłaszcza na nawierzchniach o mniejszym współczynniku przyczepności,
- większa zdolność pokonywania wzniesień,
- większa przewidywalność zachowania pojazdu we wszystkich warunkach drogowych,
- większa elastyczność również przy niskiej prędkości obrotowej,
- mniejsza wrażliwość na działanie bocznego wiatru,
- neutralna charakterystyka auta w trakcie pokonywania zakrętów,
- korzystniejszy rozkład nacisków osi,
- przydatność do holowania przyczep o większej masie,
- równomierne zużycie opon.

Poprawa właściwości trakcyjnych pojazdów z napędem na wszystkie osie (AWD) jest możliwa głównie dzięki zwiększeniu siły napędowej, niestety związane jest to z bardziej skomplikowaną budową układu przeniesienia napędu. Mianowicie istnieje konieczność zastosowania dodatkowych zespołów w układzie przeniesienia napędu, najczęściej wyróżniających się innym sposobem sterowania lub konstrukcją oraz pozwalających na podział napędu w różnych proporcjach na poszczególne osie. Najczęściej spotykane dodatkowe zespoły układu AWD [1,3]:

- skrzynia rozdzielcza jako dodatkowa przekładnia zębata lub łańcuchowa do przekazania napędu na drugą oś napędową,
- międzyosiowy mechanizm,
- sprzęgło hydrokinetyczne,
- sprzęgło wiskotyczne (lepkościowe),
- sprzęgło Haldex,
- sprzęgło wielopłytkowe.

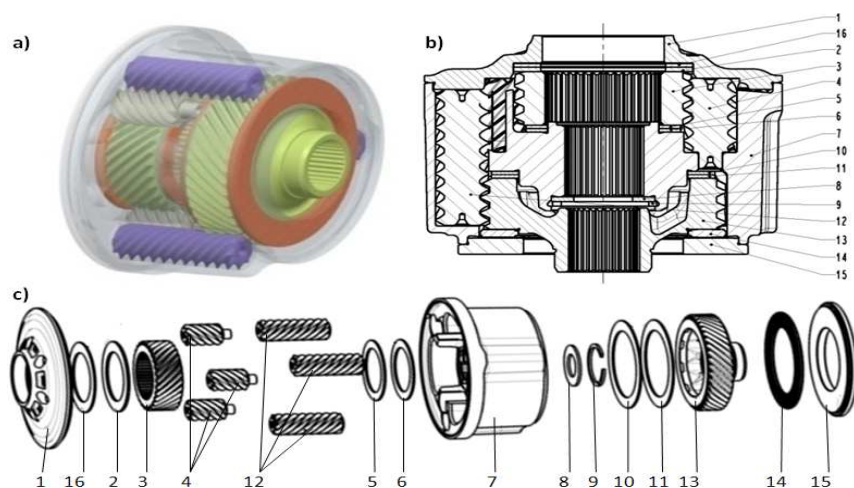
Niewątpliwie niezwykle istotnym elementem układu przeniesienia napędu na przednią i tylną oś jest międzyosiowy mechanizm różnicowy. Jego zadaniem jest zmniejszenie wartości naprężeń w układzie napędowym poprzez umożliwienie obracania się osi napędowych z różną prędkością obrotową podczas poruszania się pojazdu po torze krzywoliniowym bądź też z niejednakowymi prędkościami dynamicznymi przednich oraz tylnych kół.

Polepszenie właściwości trakcyjnych pojazdów samochodowych od lat jest przedmiotem badań i rozważań w branży motoryzacyjnej, nie tylko z uwagi na większe możliwości samochodów, ale przede wszystkim z powodu zwiększenia bezpieczeństwa. Moment obrotowy przeniesiony przez mechanizm różnicowy na oś napędową, której koła znajdują się na nawierzchni o mniejszym współczynniku przyczepności, może być przyczyną utraty kontroli nad pojazdem. Szczególnie przy dużych prędkościach, co może być katastrofalne w skutkach. Dlatego też

badania dotyczące sprawności oraz efektywności mechanizmów różnicowych są ważnym zagadnieniem, niejednokrotnie poruszonym w środowisku naukowym, m.in. w pracy [4], gdzie autorzy przedstawili przegląd zagadnień projektowania, rozwoju oraz testowania jednego z rodzajów mechanizmów różnicowych.

## 2. Przedmiot badań

Przedmiotem badań jest międzyosiowy mechanizm różnicowy (rys. 1.) stosowany w skrzynce rozdzielczej 6-cio biegowej manualnej skrzyni biegów, stosowanej między innymi w samochodach marki Audi. Nominalny podział momentu obrotowego przód:tył w badanym mechanizmie wynosi kolejno 40%:60% oraz charakteryzuje się współczynnikiem TDR od 2,9:1 do 3,5:1 dla tylnej osi oraz 1,55:1 do 1,9:1 dla przedniej.



Rys. 1. Testowany centralny mechanizm różnicowy, gdzie: 1-żeliwna pokrywa obudowy; 2,5,6,10,11, 14,16-tarcze cierne; 3-koło koronowe przedniej osi; 4-komplet satelitów prawych (RH); 12-komplet satelitów lewych (LH); 7-jarzmo satelitów (obudowa) z wielowypustem; 8-podkładka oporowa; 9-pierścień osadczy; 13-koło koronowe tylnej osi; 15-stalowa pokrywa obudowy

Fig. 1. Tested central differential, 1-case cap; 2,5,6,10,11,14,16-washers; 3-LH side gear; 4-RH pinion gears; 12-LH pinion gears; 7-case body; 8-center washer; 9-snap ring; 13-RH side gear; 15-steel cap

Cechą określającą efektywność działania badanego mechanizmu różnicowego jest współczynnik TDR (Torque Distribution Ratio), który definiuje stosunek momentu obrotowego przekazywanego na oś napędową o lepszej przyczepności w stosunku do drugiej osi dla różnicy prędkości  $\Delta n \neq 0$  [1, 7] tj.

$$TDR = \frac{M_2}{M_1} \quad (1)$$

gdzie:

dla  $M_2 > M_1$ ,  $M_1 \neq 0$ ,  $\Delta n \neq 0$ ,

$M_1$  i  $M_2$  – moment obrotowy poszczególnych kół napędowych,  
 $\Delta n$  – różnica prędkości obrotowej kół napędowych.

Wartość współczynnika TDR 3:1 oznacza przekazanie trzykrotnie większego momentu obrotowego na koło napędowe o lepszej przyczepności, w stosunku do koła napędowego będącego w poślizgu.

Jako efektywność działania mechanizmu rozumieć należy stosunek podziału momentu obrotowego w granicach tolerancji właściwych dla poszczególnego trybu pracy. Pomiar współczynnika TDR przeprowadzono na testerze sprawdzającym ogólną charakterystykę pracy mechanizmu różnicowego w czterech trybach pracy, które przedstawione zostały w tabeli 1. Poszczególne tryby pracy odpowiadają różnym sytuacjom drogowym takim jak rozpędzanie pojazdu lub hamowanie silnikiem w przypadku poślizgu jednej z osi napędowych.

Tabela 1. Równania wartości trybu pracy 1÷4 oraz konfiguracja pomiarowa, gdzie:  $M_P$  – moment obrotowy przedniej osi;  $M_T$  – moment obrotowy tylnej osi;  $n_P$  – prędkość obrotowa osi przedniej;  $n_T$  – prędkość obrotowa osi tylnej, na podstawie [7]

Table 1. Vehicle test mode equations 1÷4 and measuring configuration, where:  $M_P$  – front axle torque;  $M_T$  – rear axle torque;  $n_P$  – front axle rotating speed;  $n_T$  – rear axle rotating speed

TDR	TDR 1	TDR 2	TDR 3	TDR 4
Kondycja napędu	zwalnianie	napędzanie	zwalnianie	napędzanie
Kierunek działania blokady	przód	przód	tył	tył
Dystrybucja momentu obrotowego	$M_P > M_T$	$M_P > M_T$	$M_P < M_T$	$M_P < M_T$
Rozkład prędkości obrotowych osi	$n_P > n_T$	$n_P < n_T$	$n_P < n_T$	$n_P > n_T$
Równanie TDR	$\frac{M_P}{M_T}$	$\frac{M_P}{M_T}$	$\frac{M_T}{M_P}$	$\frac{M_T}{M_P}$

Kolejną istotną cechą mechanizmu różnicowego jest jego sprawność mechaniczna. Ujmuje ona straty mocy w mechanizmie wynikające z tarcia, głównie [6]:

- w zaszereżeniu ze względu na tarcie współpracujących zębów,
- tarcie współpracujących powierzchni kół zębatych z obudową mechanizmu i tarczami ciernymi,
- w oleju z powodu jego mieszania przy smarowaniu zanurzeniowym.

Sprawność mechaniczna przekładni zębatej określa się jako stosunek mocy uzyskanej na wyjściu z przekładni do mocy włożonej na wejściu do przekładni [6], tj.:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (2)$$

gdzie:

- $\eta$  – sprawność mechaniczna,
- $P_1$  – moc włożona na wejściu do przekładni,
- $P_2$  – moc uzyskana na wyjściu z przekładni.

W przypadku badanego mechanizmu różnicowego sprawność mechaniczną określono poprzez stosunek momentu obrotowego uzyskanego na wyjściu z mechanizmu do momentu obrotowego dostarczonego na wejściu do mechanizmu, tj.

$$\eta = \frac{M_1}{M_0} \quad (3)$$

gdzie:

- $M_1$  – moment obrotowy uzyskany na wyjściu z mechanizmu,
- $M_0$  – moment obrotowy dostarczony do mechanizmu.

Biorąc pod uwagę fakt iż centralny mechanizm różnicowy rozdziela moment obrotowy na przednią i tylną oś,

$$M_1 = M_P + M_T \quad (4)$$

to sprawność badanego mechanizmu różnicowego (równanie 3) można przedstawić w następujący sposób.

$$\eta = \frac{M_P + M_T}{M_0} \quad (5)$$

gdzie:

- $M_P$  – moment obrotowy uzyskany na przedniej osi,
- $M_T$  – moment obrotowy uzyskany na tylnej osi.

### 3. Metodyka oraz wyniki badań

Badania zostały przeprowadzone na próbkę liczącej 6 sztuk mechanizmów różnicowych wyselekcjonowanych z bieżącej produkcji. Określone kryteria selekcji zakładały odseparowanie dwóch grup mechanizmów po 3 sztuki. Pierwszą grupę stanowiły mechanizmy z wartościami współczynników TDR poniżej dolnej granicy specyfikacji (mechanizmy NOK). Grupa druga mechanizmów (mechanizmy OK) charakteryzowała się największymi wartościami współczynników TDR (tabela 2). Następnie wszystkie mechanizmy różnicowe zostały rozmontowane w celu analizy zużycia powierzchni roboczych oraz dokonania pomiarów cech geometrycznych części składowych w laboratorium metrologicznym.

Przeprowadzając analizę części składowych mechanizmu zaobserwowano zużycie powierzchni na czopach wszystkich satelitów RH w mechanizmach grupy pierwszej (mechanizmy NOK), czego nie zaobserwowano w pozostałych mechanizmach. Wyniki pomiarów wskazały błędy walcowości czopów. Odkształcenia plastyczne czopów w postaci stożka bezpośrednio przyczyniały się do zmniejszenia wartości luzu pomiędzy czopami satelitów RH, a średnicą pod czopy satelitów RH w obudowie mechanizmu [7].

Tabela 2. Grupa badanych mechanizmów wraz z wartościami współczynników TDR, gdzie: kolor szary – wartości poniżej dolnej granicy tolerancji; pogrubiona kursywa – wartości na granicy dolnej tolerancji, pozostałe wartości TDR – wartości w tolerancji

Table 2. Group of analyzed differentials with TDR values, where: grey - values below LSL; bold italic - LSL value; green - in tolerance level

Nr	TDR	wartość TDR sztuk NOK	Nr	TDR	wartość TDR sztuk OK
1	1	<b><i>1,45</i></b>	4	1	1,50
	2	1,49		2	1,60
	3	2,63		3	2,72
	4	2,75		4	3,03
2	1	1,42	5	1	1,47
	2	1,52		2	1,60
	3	2,63		3	2,70
	4	2,79		4	3,00
3	1	1,44	6	1	1,44
	2	1,53		2	1,60
	3	2,64		3	2,66
	4	2,81		4	3,00

Przedstawione wartości współczynnika TDR zostały zarejestrowane podczas testów funkcjonalnych przeprowadzonych na maszynie typu End Of Line Tester (EOL Tester). Tego typu maszyny w branży motoryzacyjnej najczęściej wykorzystywane są do 100 procentowej kontroli wyprodukowanych części, tutaj mechanizmów różnicowych. Testy funkcjonalne na zastosowanej maszynie mogą odbywać się przy maksymalnym poziomie momentu obrotowego do 650 Nm. Dodatkowo maszyna ma możliwość pomiaru luzu międzyzębowego oraz analizy Noise Vibration and Harshness (NVH).

Na pomiary wartości momentu obrotowego, a następnie wyniki wskaźnika TDR może mieć wpływ:

- Ciśnienie oraz przepływ oleju, który jest doprowadzany do mechanizmu różnicowego podczas testowania,
- Temperatura oleju,
- Zanieczyszczenie oleju drobkami fosforu pochodzącego z kół zębatych mechanizmu,
- Rodzaj oleju,

- Zanieczyszczenia wewnątrz mechanizmu,
- Temperatura mechanizmu.

Celem zredukowania wpływu wyżej wymienionych czynników maszyna testująca wyposażona jest w szereg czujników nieustannie monitorujących warunki fizyczne podczas testów funkcjonalnych. Dodatkowo opracowane instrukcje i procedury określają standardowe oraz systematyczne postępowanie przy przeglądach i inspekcjach maszyny testującej. Ograniczenie czynników wpływających na wyniki testów oraz właściwe zaprojektowanie procesu wytwórczego mechanizmów różnicowych pozwoliło na uzyskanie oraz ciągłe utrzymywanie rzeczywistego rozrzutu wyników pomiarowych poniżej 1%.

Dodatkowo do celów badawczych wykorzystano specjalnie wykonaną obudowę badanego mechanizmu, pozwalającej na weryfikację wpływu dowolnego komponentu przy zachowaniu minimalnej ilości zmiennych. Wielokrotny montaż oraz demontaż komponentów umożliwiło zastosowanie połączenia śrubowego pokrywek z korpusem. W celu wyeliminowania wpływu czynników zewnętrznych na wartości pomiarów współczynnika TDR lub ich losowego rozrzutu ustalono jednakowe warunki testu mechanizmu w wersji skręcanej, które były ściśle przestrzegane podczas kolejnych etapów.

Chcąc zweryfikować wpływ wielkości luzu pomiędzy czopami satelitów RH, a średnicą pod czopy satelitów RH w obudowie mechanizmu na sprawność mechaniczną oraz wskaźnik TDR, przygotowano zestaw pomierzonych wcześniej części składowych, oraz zmontowano je w skręcanej wersji obudowy. Po przeprowadzonych testach funkcjonalnych mechanizm był rozmontowywany w celu zwiększenia luzu, a następnie montowany z zachowaniem pełnej, wzajemnej orientacji części składowych w celu zminimalizowania zmiennych mogących zakłócić pomiary. Zwiększenie luzu odbywało się poprzez zmniejszenie średnicy czopa satelity RH metodą szlifowania. Uzyskane w ten sposób wartości momentu obrotowego oraz współczynnika TDR podano w tabeli 3.

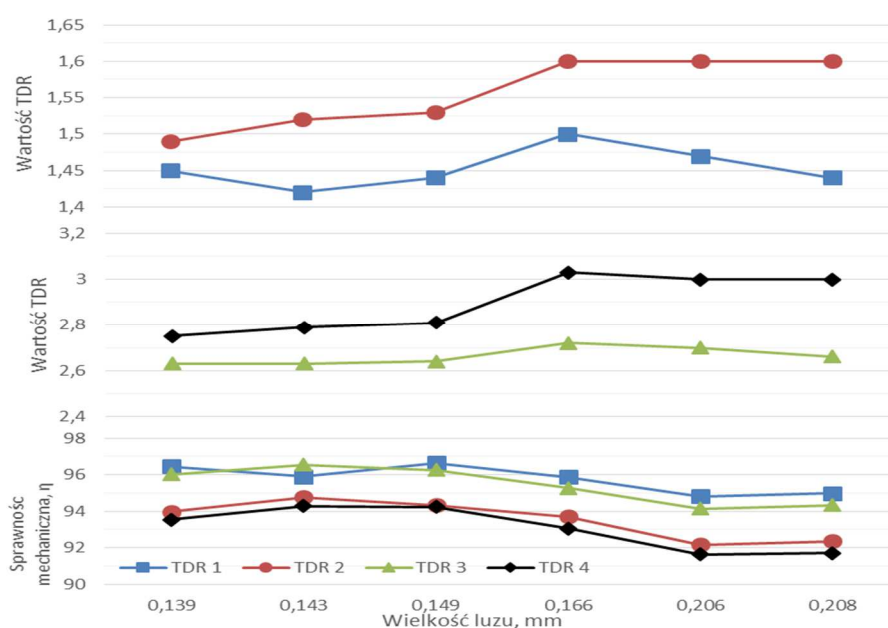
Tabela 3. Wartości momentu obrotowego oraz wskaźnika dystrybucji momentu obrotowego

Table 3. Torque and TDR factor values

T D R	Wielkość luzu, mm											
	0,143		0,173		0,203		0,213		0,243		0,363	
	TDR	M <sub>1</sub> Nm	TDR	M <sub>1</sub> Nm	TDR	M <sub>1</sub> Nm	TDR	M <sub>1</sub> Nm	TDR	M <sub>1</sub> Nm	TDR	M <sub>1</sub> Nm
<b>1</b>	1,45	497,5	1,46	498,2	1,49	496,3	1,51	473,5	1,50	494,5	1,51	478,1
<b>2</b>	1,60	475,9	1,61	476,7	1,63	475,2	1,63	459,6	1,63	480,8	1,63	454,5
<b>3</b>	2,82	494,1	2,84	494,3	2,86	492,5	2,87	469,9	2,86	490,3	2,85	474,6
<b>4</b>	2,95	473,1	3,01	473,8	3,04	472,2	3,08	455,9	3,07	477,8	3,09	450,9

#### 4. Analiza wyników i wnioski

Mechanizmy NOK charakteryzowały się wartościami luzu poniżej 0,150 mm, natomiast najmniejsza wartość luzu mechanizmów OK wynosiła 0,166 mm (rys. 2). Mechanizmy, które spośród badanej próbki miały najwyższą wartość luzu, kolejno 0,206 mm i 0,208 mm charakteryzowały się najmniejszą sprawnością mechaniczną w badanej próbce w każdym trybie pracy. Można wnioskować iż wielkość luzu ma wpływ na wartość wskaźnika dystrybucji momentu obrotowego oraz sprawność mechaniczną badanych mechanizmów różnicowych.

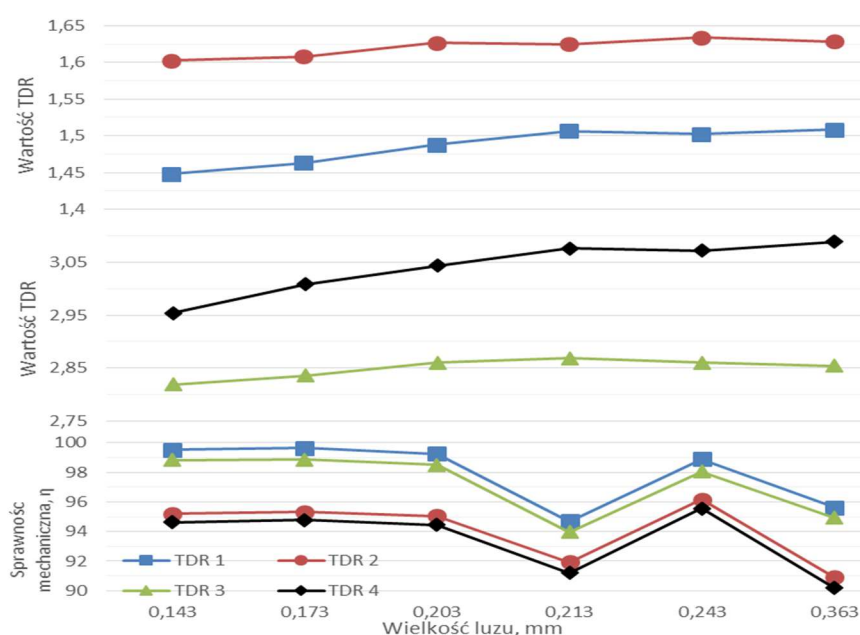


Rys. 2. Zależność między wskaźnikiem dystrybucji momentu obrotowego a sprawnością mechaniczną mechanizmu różnicowego w odniesieniu do wielkości luzu. Wartości dla mechanizmów z grupy OK i NOK

Fig. 2. Correlation between TDR factor and central differential mechanical efficiency in relation to the size of the clearance. Values for OK and NOK differentials

Na rysunku 3 przedstawiono wpływ zmiany wielkości luzu pomiędzy czopami satelitów RH, a średnicą pod czopy satelitów RH w obudowie mechanizmu na wartość wskaźnika dystrybucji momentu obrotowego oraz sprawność mechaniczną. Analizując wyniki testu można stwierdzić zwiększenie wartości współczynnika TDR wraz ze wzrostem wielkości luzu, co najbardziej jest widoczne dla trybu pracy mechanizmu TDR 1 oraz TDR 4. We wszystkich trybach pracy sprawność mechaniczna dla próbek o wielkości luzu 0,213 mm i 0,363 mm jest znacząco niższa od pozostałych, natomiast dla próbek o wielkości luzu 0,143 mm, 0,173 mm oraz 0,203 mm sprawność mechaniczna lokalnie, w obrębie każdego

z trybu pracy jest zbliżona względem siebie. Przy wielkości luzu 0,363 mm dla TDR 1 i TDR 3 sprawność mechanizmu jest większa w stosunku do próbki o wielkości luzu 0,213 mm, natomiast dla TDR 2 oraz TDR 4 sprawność mechanizmu jest większa dla wielkości luzu 0,213 mm. Przy wielkości luzu 0,243 mm dla TDR 2 oraz TDR 4 sprawność mechanizmu jest największa pomimo wartości współczynnika TDR zbliżonej do próbek o wielkości luzu 0,213 mm i 0,263 mm. Przy zmianie wielkości luzu od 0,203 mm do 0,363 mm wartość TDR 2 była równa 1,63, przy czym sprawność mechanizmu wahała się od 95% do 90,1%.



Rys. 3. Zależność między wskaźnikiem dystrybucji momentu obrotowego a sprawnością mechaniczną mechanizmu różnicowego w odniesieniu do wielkości luzu. Wartości dla mechanizmu w wersji skręcanej – test zmiany wartości luzu

Fig. 3. Correlation between TDR factor and central differential mechanical efficiency in relation to the size of the clearance. Values for Mode 3 bolted version of differential - changing the size of clearance was examined

Z przeprowadzonych badań oraz analizy otrzymanych wyników można sformułować następujące wnioski:

1. Wzrost wielkości luzu pomiędzy czopem satelitów RH a ich gniazdem w korpusie ma wpływ na wzrost wartości wszystkich trybów pracy współczynnika TDR;
2. Nie stwierdzono jednoznacznego, liniowego wpływu wielkości luzu pomiędzy czopami satelitów RH, a średnicą pod czopy satelitów RH w obudowie mechanizmu na poprawę sprawności mechanicznej badanego mechanizmu



różnicowego. Dopuszcza się możliwość występowania nieliniowej zależności pomiędzy wielkością luzu, a sprawnością mechaniczną, indywidualnie dla każdego z trybu pracy. Należy przeprowadzić kolejne testy w zakresie wielkości luzu od 0,213 mm do 0,363 mm.

3. Brak jednoznacznej, liniowej zależności pomiędzy sprawnością mechaniczną, a wartością wskaźnika dystrybucji momentu obrotowego.

## Literatura

- [1] Król L., Badania nad zwiększeniem efektywności działania centralnego mechanizmu różnicowego samochodu osobowego. Praca dyplomowa magisterska, Wydział Mechaniczny, Politechnika Wrocławska, Wrocław 2014, s. 85.
- [2] Gabryelewicz M., Podwozia i nadwozia pojazdów samochodowych 1 Podstawy teorii ruchu i eksploatacji oraz układ przeniesienia napędu. WKŁ, Warszawa, 2012.
- [3] Jackowski J., Łęgiewicz J., Wieczorek M., Pojazdy samochodowe. Samochody osobowe i pochodne. WKŁ, Warszawa, 2011.
- [4] Fox, M. and Grogg, J., "Development of Front-Wheel-Drive ELSD for Efficient Performance and Safety," SAE Technical Paper 2012-01-0305, 2012.
- [5] Wyniki badań, rysunki oraz zdjęcia American Axle and Manufacturing, rok 2012.
- [6] Dziama A., Michniewicz M., Niedźwiedzki A., Przekładnie zębate. PWN, Warszawa 1995.
- [7] Król L. Sposób poprawienia efektywności działania mechanizmu różnicowego QP1 w urządzeniu transportowym, Logistyka 4/2015 s.9272-9277, ISSN 1231-5478.

## DETERMINATION OF THE RELATION BETWEEN PERFORMANCE EFFICIENCY AND MECHANICAL EFFICIENCY OF THE DIFFERENTIAL

### Summary

All-wheel-drive vehicles with a constant or momentary torque distribution have a better ability to drive in difficult ground or in a variety of road conditions due to distribute torque on the front and rear drive axles. Improving the traction properties of motor vehicles has been a subject of research and consideration in the automotive industry for years, not only because of the greater possibilities of vehicles, but primarily because of increased safety. The torque distributed by the differential to the drive axle, whose wheels are on a surface with a lower adhesion, can cause loss of control of the vehicle. Especially at high speeds.

The subject of the research work is the mechanical efficiency effect of the center differential to distribute torque of each axis drive. The research were conducted on an center differential used in a six-speed manual gear box. Based on the analysis of the test results shows the influence of the clearance size between the RH pinions pilots and their pocket in case body to the out-put torque from the differential and thus its mechanical efficiency. Test result analysis shows also the lack of clear, linear correlation between the mechanical efficiency and the value of the torque distribution ratio.

**Keywords:** differential, torque, torque distribution, mechanical efficiency

*Przesłano do redakcji: 24.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Stanisław WOLNY<sup>1</sup>  
Sławomir BADURA<sup>2</sup>

## WERYFIKACJA STANU NAPRĘŻENIA W ELEMENTACH NOŚNYCH ZMODERNIZOWANEGO KOŁA PĘDNEGO GÓRNICZEGO URZĄDZENIA WYCIĄGOWEGO

Urządzenia wyciągowe w kopalniach są budowane i stosowane od wielu lat. Są one jednak tematem ciągłych badań, których celem jest poznanie czynników umożliwiających poprawę ich właściwości eksploatacyjnych. Koło pędne maszyny wyciągowej stanowi skomplikowany element konstrukcji w skład którego wchodzi m.in. płyty, powłoki, tarcze, przepony, elementy żeber promieniowych i obwodowych rozmieszczonych w zależności od rodzaju konstrukcji.

Celem podjętej – powtórnej – analizy wytrzymałościowej koła pędne urządzenia wyciągowego, było uzyskanie pełnej informacji o stanie naprężeń jaki powstaje w zmodernizowanych jego elementach składowych, stosownie do sugestii zawartych w opracowaniu [7]. Celem tych sugestii było globalne obniżenie stanu naprężenia oraz eliminacja obszarów o znacznej koncentracji naprężeń. Wyniki przeprowadzonych analiz – numerycznych i eksperymentalnych w zakresie stanu naprężenia, pozwoliły na określenie trwałości zmęczeniowej konstrukcji koła pędne.

**Słowa kluczowe:** górnicze urządzenie wyciągowe, koła pędne, naprężenia, pomiary tensometryczne

### 1. Wprowadzenie

W polskich kopalniach węgla kamiennego oraz rud około 80% konstrukcji kół pędnych zostało zaprojektowanych i wykonanych w latach 70 i 80 ubiegłego stulecia. Część z nich znajduje się nadal w zadowalającym stanie technicznym, inne głównie za przyczyną pojawiania się licznych pęknięć, przeważnie o charakterze zmęczeniowym [4] są wyłączone z eksploatacji. Przeprowadzone wielokrotnie naprawy, nie likwidują przyczyn powstawania uszkodzeń, są jednak wykonywane w celu przywrócenia bieżącej sprawności eksploatacyjnej uszkodzonej konstrukcji.

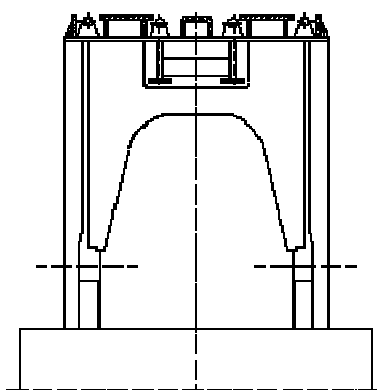
<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: AGH-University of Science and Technology Faculty of Mechanical Engineering and Robotics Al. Mickiewicza 30, 30-059, Kraków, Poland, stwolny@agh.edu.pl

<sup>2</sup> AGH-University of Science and Technology Faculty of Mechanical Engineering and Robotics Al. Mickiewicza 30, 30-059, Kraków, Poland sbadura@agh.edu.pl

Problem ten zainspirował autorów do postawienia pytania, czy na etapie projektowania kół pędnych można zapobiec powstawaniu uszkodzeń zmęczeniowych tych kół po określonym okresie ich pracy.

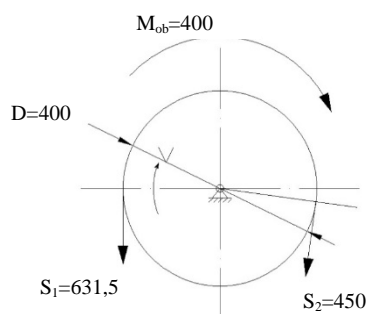
Aby odpowiedzieć na to pytanie, podjęli próbę określenia przyczyn powstawania uszkodzeń kół pędnych. W tym celu wykonano analizę wytrzymałościową elementów konstrukcyjnych koła pędnego z wykorzystaniem numerycznych modeli aktualnie eksploatowanych kół pędnych, oraz obciążeń będących wynikiem analizy dynamicznej, zweryfikowanej na obiekcie rzeczywistym [3], której wyniki zawarto w opracowaniu [4,7]. Analiza tych wyników pozwala na sformułowanie następujących wniosków [4,7]:

- rozkład naprężeń w konstrukcji typowego dla polskich wyciągów koła pędnego dowodzi, że ze względu na trwałość zmęczeniową koła pędnego, konstrukcja ma istotne wady. Skutkiem tych wad jest znaczna koncentracja naprężeń, głównie w obszarach złączy spawanych.
- za główną przyczynę koncentracji naprężeń uznano występujące w tych konstrukcjach kół żebra promieniowe, a szczególnie obszary ich połączeń z elementami konstrukcji (rys. 1).



Rys. 1. Schemat konstrukcyjny koła pędnego 4-linowego

Fig. 1. Schematic diagram of the Koepe pulley four ropes



Rys. 2. Obciążenie koła pędnego dla przypadku podnoszenia pełnego naczynia

Fig. 2. Loads a Koepe pulley for the case of start lifting the full conveyance

Mając powyższe na uwadze, dokonano zmian w konstrukcji koła pędnego stosownie do sugestii zawartych w opracowaniu [7]. Zmiany te miały na celu globalne obniżenie stanu naprężenia. Rekonstrukcja polegała na usunięciu żeber promieniowych, oraz na nieznacznej zmianie grubości tarcz bocznych (powiększono grubość tarcz z 25 mm do 30 mm, mając na uwadze poprawę ich stateczności). Po wprowadzeniu tych zmian do modelu obliczeniowego analizowanego w opracowaniu [7], przeprowadzono analizę numeryczną naprężeń i przemieszczeń w elementach konstrukcyjnych zmodernizowanego koła pędnego. Rzeczy-

wiste wartości obciążeń elementów konstrukcyjnych koła pędnego, zostały wyznaczone po przeprowadzeniu analizy dynamicznej pracy urządzenia wyciągowego w warunkach normalnej eksploatacji jak i w stanach awaryjnych [2,3]. Główne parametry urządzenia wyciągowego dla którego przeprowadzono analizę wytrzymałościową elementów koła pędnego zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Główne parametry urządzenia wyciągowego dla którego przeprowadzono analizę wytrzymałościową

Table 1. Operational parameters of the hoisting installation used in the experiment

Typ maszyny	4L-4000/2900
Napęd, silnik prądu stałego	2900 [kW]
Obroty znamionowe silnika	77 [obr/min.]
Prędkość maksymalna skipu	$v = 16$ [m/s]
Masa kompletnego, pustego naczynia z zawieszeniem	$m_{ku} = 16500$ [kg]
Masa użyteczna	$\mu = 17000$ [kg]

Było to oczywiście to samo urządzenia które poddano analizie dynamicznej w pracach [4,7].

W odniesieniu do konstrukcji koła pędnego, wyniki tych analiz przedstawiono w rozdziale drugim niniejszego artykułu. Ponadto w rozdziale III przedstawiono wyniki analizy stanu naprężenia w wybranych obszarach elementów konstrukcyjnych koła pędnego po przeprowadzonej rekonstrukcji. Natomiast w rozdziale IV przedstawiono wyniki analiz numerycznych stanu naprężenia skonfrontowane z wynikami pomiarów przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym. Ponadto w rozdziale V przeprowadzono ocenę trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych koła pędnego jako konstrukcji spawanej.

## 2. Obciążenia koła pędnego urządzenia wyciągowego w warunkach normalnej eksploatacji

Analizę wytrzymałościową elementów koła pędnego wykonano dla dwóch skrajnych przypadków obciążenia[4]:

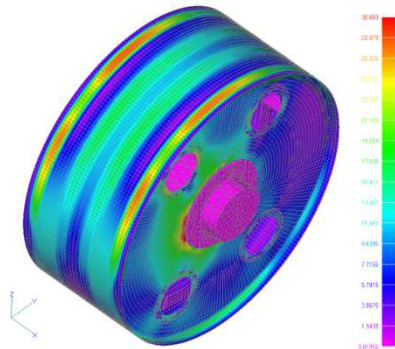
- rozpoczęcie podnoszenia pełnego naczynia z podszybia z przyśpieszeniem  $a_1$  (maksymalne obciążenie koła pędnego),
- rozpoczęcie hamowania pełnego naczynia dojeżdżającego do nadszybia z opóźnieniem  $a_2$  (minimalne obciążenie koła pędnego).

Ponieważ w opracowaniu analizowano stan naprężenia w elementach konstrukcji koła pędnego, po przeprowadzonej rekonstrukcji (geometryczne) stąd jego obciążenia nie ulegają zmianie w stosunku do przypadku analizowanego w pracy [7].

Obciążenie koła pędnego (w warunkach podnoszenia naczynia) przedstawiono na rysunku 2. Wyniki tych analiz zostały zweryfikowane eksperymentem na czynnym urządzeniu wyciągowym, o cytowanych już parametrach ruchowych.

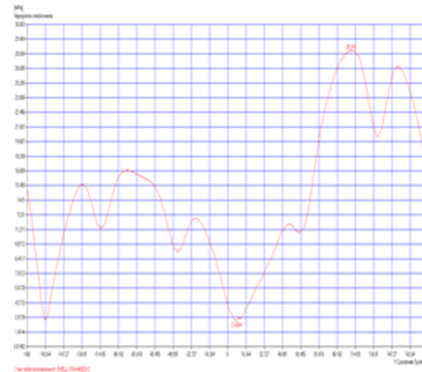
### 3. Wyniki analizy wytrzymałościowej uzyskane dla koła pędnego po zmianach konstrukcyjnych.

Uzyskane wyniki analizy wytrzymałościowej w zakresie naprężeń i przemieszczeń pokazano na rysunkach 3÷6.



Rys. 3. Rozkład naprężeń zredukowanych na kole pędnym po przeprowadzonej rekonstrukcji

Fig 3. Reduced stress distribution  $\sigma_z$  (Huber-von Mises) on the mantle's surface after conducted reconstruction



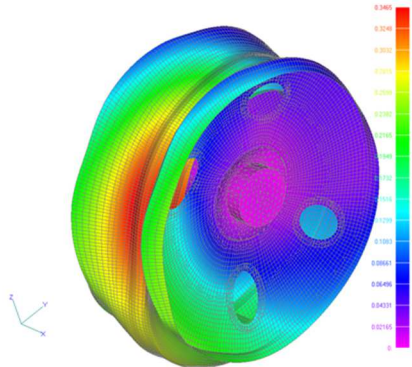
Rys. 4. Wykres naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  na obwodzie poszycia koła (płaszcza) w miejscu jego styku z tarczą boczną (po przeprowadzonej rekonstrukcji)

Fig. 4. Graph of changes reduced stress  $\sigma_z$  surface on the circumference mantle at the point of contact with the disc side (after conducted reconstruction)

Rozkład naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  w poszyciu płaszcza koła pędnego przeprowadzonej po rekonstrukcji pokazano na rys. 3. Daje się zauważyć istotny spadek maksymalnych wartości naprężenia zredukowanego (o około 25%) w analizowanych elementach konstrukcyjnych w stosunku do konstrukcji przed modernizacją [7] do poziomu około 30 MPa. Natomiast na rysunku 4 przedstawiono wykres zmiany naprężenia zredukowanego  $\sigma_z$  na obwodzie poszycia koła (płaszcza) w miejscu jego styku z tarczą boczną (obszar najbardziej wyciężony).

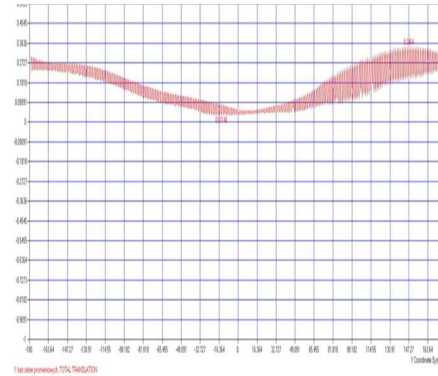
Również w tych obszarach daje się zauważyć obniżenie naprężeń w stosunku do konstrukcji przez modernizacją o około 25%. Ponadto na rysunkach 5 i 6 przedstawiono mapy przemieszczeń poszycia koła pędnego (płaszcza) po przeprowadzonych zmianach. Porównanie wartości przemieszczeń z mapami przemieszczeń tych samych obszarów konstrukcji przed rekonstrukcją [7] nie wykazuje istotnych zmian.

Są niestety i niekorzystne efekty przeprowadzonej rekonstrukcji (usunięcie żeber promieniowych), wzrosły lokalnie odkształcenia i naprężenia w tarczach bocznych koła pędnego (rys. 2 i rys. 4) co może niekorzystnie wpływać na stateczność tego elementu konstrukcji koła pędnego. Żebra obwodowe wewnętrzne nie powodują miejsc powstawania miejsc koncentracji naprężeń.



Rys. 5. Przeskalowane mapy przemieszczeń konstrukcji poszycia koła pędnego (płaszczka) oraz tarcz bocznych po przeprowadzonej rekonstrukcji

Fig. 5. Scaled maps of displacement of the structure mantle's surface a Koepe pulley and disc side after conducted reconstruction



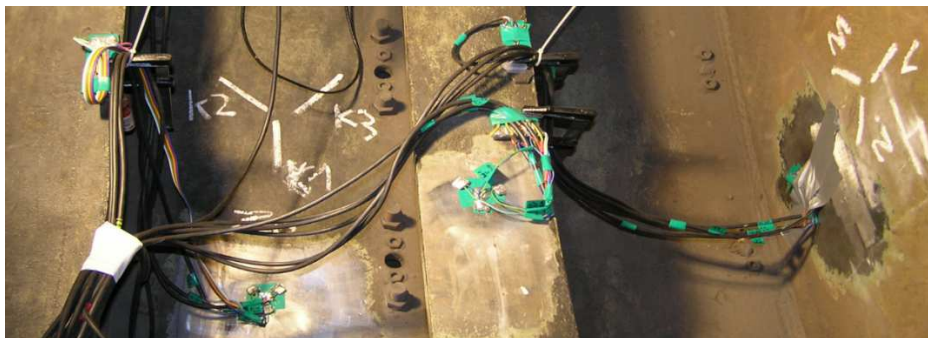
Rys. 6. Wykres zmiany przemieszczeń na obwodzie poszycia koła pędnego (płaszczka) po wykonanej rekonstrukcji

Fig. 6. Change displacement on the circumference of the Koepe pulley (mantle) after conducted reconstruction

## 4. Wyniki analiz numerycznych stanu naprężenia w świetle przeprowadzonych pomiarów na obiekcie rzeczywistym

### 4.1. Aparatura pomiarowa

Do pomiarów wykorzystano wzmacniacz pomiarowy HBM MGCplus. Mostek zasilany był z akumulatorów żelowych 12V-12Ah a całość podłączono do laptopa, który rejestrował przebieg pomiarów. Do przeprowadzenia pomiarów zostały wykorzystane dwa rodzaje rozet tensometrycznych TFxy-4/120 i TFr-8/120. Zdjęcie obrazujące rozmieszczenie czujników tensometrycznych wewnątrz konstrukcji koła pędnego pokazano na rysunku 7.

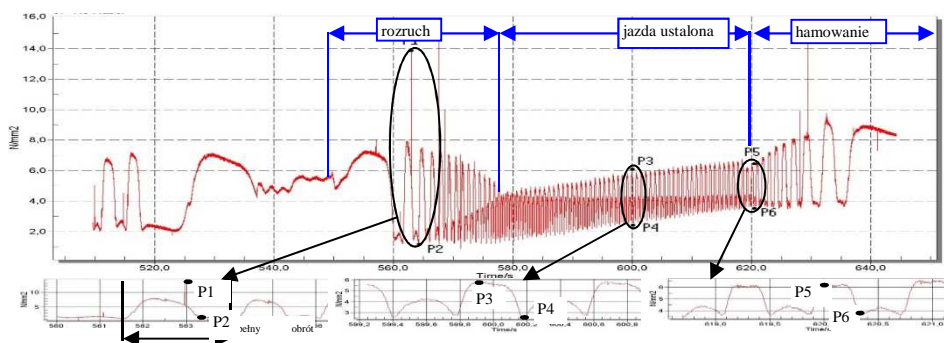


Rys. 7. Rozmieszczenie czujników tensometrycznych wewnątrz koła pędnego po przeprowadzonej rekonstrukcji

Fig. 7. Positions of strain gauges inside the Koepe pulley (photo)

## 4.2. Wyniki przeprowadzonych pomiarów

Przykładowo na rys. 8 przedstawiono wybrane przebiegi naprężeń zredukowanych obliczonych na podstawie przebiegów odkształceń zarejestrowanych przez rozetę nr 3 podczas jednego pełnego cyklu pracy urządzenia wyciągowego (zjazd i wyjazd skipu) z ustaloną prędkością jazdy  $V_0=12$  m/s.

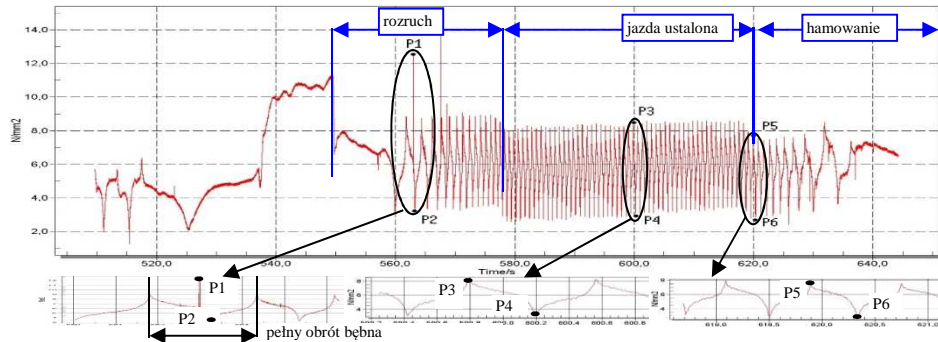


Rys. 8. Wykres naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  dla wyjazdu pełnego naczynia. Rozeta tensometryczna R3

Fig. 8. Reduced stress  $\sigma_z$  registered during the ride up of a fully loaded conveyance from the bottom station (strain rosette R3)

Ponadto na rysunku 9 pokazano wykresy naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  dla normalnego cyklu pracy urządzenia wyciągowego wyliczonego na podstawie przebiegów odkształceń zarejestrowanych przez rozetę nr 4. Ograniczono się do przedstawienia zamiany naprężeń w tych punktach ponieważ rozety nr 3 i nr 4 naklejone zostały na tarczę, której geometria uległa zmianie w analizowanej wersji konstrukcji koła pędnego. Numeryczna analiza naprężeń w tym elemencie, wykazała nieznaczny wzrost naprężeń w stosunku do oryginalnej konstrukcji koła pędnego [4,7].

W tabeli 2 zestawiono wartości amplitudy naprężeń zredukowanych uzyskanych z analizy MES i eksperymentu na obiekcie rzeczywistym dla przypadku podnoszenia pełnego naczynia z podszybia z przyśpieszeniem  $a_1$  dla wybranych punktów elementów konstrukcyjnych koła pędnego (rys. 8). Kompletne wyniki analizy numerycznej MES dla tego etapu pracy urządzenia zawarto w opracowaniu [4].



Rys. 9. Wykres naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  dla wyjazdu pełnego naczynia. Rozeta tensometryczna R4

Fig. 9. Reduced stress  $\sigma_z$  registered during the ride up of a fully loaded conveyance from the bottom station (strain rosette R4)

Tabela 2. Wartości amplitudy naprężeń zredukowanych dla przypadku rozruchu

Table 2. Reduced stress amplitudes during the start-up of the conveyance

Oznaczenie tensometru	$\Delta\sigma_z$ [MPa]	
	MES	Eksperyment
R1	17	19
R3	10	11.5
R4	11	10.5
Pr1	10,5	8.9

W tabeli 3 zestawiono wartości amplitudy naprężeń zredukowanych uzyskanych z analizy numerycznej MES i eksperymentu, na obiekcie rzeczywistym dla przypadku rozpoczęcia hamowania pełnego naczynia dojeżdżającego do nadszybia, dla tych samych punktów elementów konstrukcji koła pędnego. Kompletne wyniki analizy numerycznej MES dla tego etapu pracy urządzenia zawarto w opracowaniu [4].

Tabela 3. Wartości naprężeń zredukowanych dla przypadku hamowania

Table 3. Reduced stress amplitude for the case of braking

Oznaczenie tensometru	$\Delta\sigma_z$ [MPa]	
	MES	Eksperyment
R1	13.5	14.0
R3	1.8	2.1
R4	3.7	4.3
Pr1	4.0	4.4



## 5. Ocena trwałości zmęczeniowej

### 5.1. Oszacowanie liczby cykli

Na podstawie analizy wyładunków w wybranych szybach polskich kopalń dla sześciu dni roboczych określono przeciętne liczby cykli obciążeń czterech szybów oznaczając je umownie cyframi rzymskimi I, II, III, IV zakładając 50% cykli roboczych w sobotę oraz zero cykli w niedzielę. Obliczone liczby cykli roboczych dla 10 i 15 lat zestawiono w tablicy 4. W obliczeniach nie uwzględniono przerw remontowych, zatem rzeczywiste liczby cykli obciążeń mogą być nieco mniejsze.

Tablica 4. Liczba cykli roboczych oszacowane dla wybranych szybów

Table 4. The number of operating cycles for the selected shafts

Oznaczenie szybów	Liczby cykli roboczych	
	10 lat	15 lat
I	$0,58 \cdot 10^6$	$0,87 \cdot 10^6$
II	$0,66 \cdot 10^6$	$0,99 \cdot 10^6$
III	$0,68 \cdot 10^6$	$1,02 \cdot 10^6$
IV	$0,58 \cdot 10^6$	$0,86 \cdot 10^6$

Na podstawie wyników zestawionych w tablicy 4 do dalszych obliczeń, jako liczbę cykli rocznych po 15 latach pracy przyjęto  $N = 1 \cdot 10^6$  cykli.

Norma Eurokod 3 [6] zaleca wytrzymałość zmęczeniową  $\Delta\sigma_R$  i  $\Delta\tau_R$  określać w zależności od przewidywanej liczby cykli naprężeń  $N$  i kategorii zmęczeniowej elementu konstrukcji lub połączenia  $(\Delta\sigma_c, \Delta\tau_c)$  według wzoru:

$$\Delta\sigma_R = 0,735\Delta\sigma_c \left( \frac{5 \cdot 10^6}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \Delta\sigma_L \quad (3)$$

gdzie:  $m = 3$  dla  $N \leq 5 \cdot 10^6$ ;  $m = 5$  dla  $N > 5 \cdot 10^6$

$\Delta\sigma_c$  - kategoria zmęczeniowa ( wytrzymałość zmęczeniowa normatywna),

$\Delta\sigma_L$  - wytrzymałość zmęczeniowa trwała (Eurokod 3).

Nośność konstrukcji wg Eurokod 3 ze względu na zmęczenie należy sprawdzić wg wzoru:

$$\Delta\sigma_c \leq \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_{fat}} \quad (4)$$

gdzie:  $\gamma_{fat}$  - częściowy współczynnik bezpieczeństwa przy zmęczeniu materiału;  
 $\gamma_{fat} = 1 \div 1,2$ . Wartość współczynnika zależy od warunków eksploatacji, kontroli i konserwacji. Dla przeciętnych warunków można przyjmować  $\gamma_{fat} = 1$ , a dla skrajnych  $\gamma_{fat} = 1,2$ .

## 5.2. Określenie trwałości zmęczeniowej

Koło pędne jest konstrukcją spawaną, a zatem najbardziej niekorzystna kategoria zmęczeniowa

$$\Delta\sigma_c = 45[MPa].$$

Zatem wytrzymałość zmęczeniowa wg zależności (3)

$$\Delta\sigma_R = 0,735 \cdot 45 \cdot \left( \frac{5 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{5}} = 45,4[MPa]$$

Nośność konstrukcji wg Eurokod 3 ze względu na zmęczenie należy sprawdzić ze wzoru (4). Dla przeciętnych warunków kontroli i konserwacji można przyjąć  $\gamma_{fat} = 1$ , stąd

$$\Delta\sigma_c \leq \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_{fat}} = \frac{45,4}{1} = 45,4MPa.$$

## 6. Wnioski

Rozkład naprężeń w konstrukcji typowego dla polskich wyciągów koła pędnego [7] dowodzi, że ze względu na trwałość zmęczeniową koła pędnego, konstrukcja ma istotne wady. Skutkiem tych wad jest znaczna koncentracja naprężeń, głównie w obszarach złączy spawanych. Za główną przyczynę tych koncentracji naprężeń uznano występujące w tych konstrukcjach żebra promieniowe. Wyniki analiz numerycznych i eksperymentalnych w zakresie stanu naprężenia potwierdzają że ich eliminacja likwiduje miejsca koncentracji naprężeń ale nie może być dokonana bez stosownej analizy naprężeń w innych elementach koła ponieważ może na przykład doprowadzić do utraty stateczności całej konstrukcji.

Wyprowadzone – jako wynik analizy dynamicznej – zależności w postaci analitycznej i geometrycznej interpretacji wzory na obciążenie konstrukcji koła pędnego [4,7] oraz ocena stanu naprężenia w jego elementach konstrukcyjnych mogą być podstawą do prognozowania okresu ich bezpiecznej eksploatacji.

## Literatura

- [1] Dziennik ustaw nr 99 . Poz. 1003. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 30 kwietnia 2004 r. „W sprawie dopuszczenia wyrobów do stosowania w zakładach górniczych”.
- [2] Dynamic loading of the pulley block in a hoisting installation in normal operating conditions Stanisław WOLNY // Archives of Mining Sciences = Archiwum Górnictwa ; ISSN 0860-7001. – 2009 vol. 54 iss. 2 s. 261-284. – Bibliogr. s. 28.
- [3] Operating loads of the shaft steelwork-conveyance system due to random irregularities of the guiding strings Stanisław WOLNY, Filip MATACHOWSKI // Archives of Mining Sciences = Archiwum Górnictwa ; ISSN 0860-7001. — 2010 vol. 55 no. 3 s. 589-603. – Bibliogr. s. Abstr.
- [4] Badura S., „Description of criterion of design of koepe pulleys of winding gears”. AGH Kraków 2008.
- [5] Hoffmann, K.: „An Introduction to Measurements using Strain Gages” Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH (1987)
- [6] Eurokod 3.
- [7] Wolny S., Badura S. Stress analysis in structural components of the Koepe pulley in hoisting installations Engineering Transactions = Rozprawy Inżynierskie ; ISSN 0867-888X. – Tytuł poprz.: Rozprawy Inżynierskie. – 2012 vol. 60 iss. 2, s. 155-170. – Bibliogr. s. 170.

## VERIFICATION OF THE STATE OF STRESS IN THE ELEMENTS SUPPORTING MODERNIZED KOEPE PULLEY IN HOISTING INSTALLATIONS

### Summary

Hoisting installations in mines have been constructed and operated for many years, yet they still merit a rigorous research to identify all factors that would enable us to improve their performance parameters. A Koepe pulley in a winding system is a complex structural component, made of plates, shells, discs, membranes, radial or circumferential fin elements varying in their actual layout, depending on the design. The strength analysis of a Koepe pulley in a hoisting system is carried out to get a better insight into the state of stress experienced by modernized pulley components, according to the suggestions made in the study [7]. The purpose of these suggestions was global reduction of stress and elimination of areas of significant stress concentration.

The results of the analyzes numerical and experimental the state of stress allowed to determine the fatigue life for a Koepe pulley.

**Keywords:** mine hoist, Koepe pulley, stress, strain gauge measurements

*Przesłano do redakcji: 15.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Stanisław WOLNY<sup>1</sup>  
Sławomir BADURA<sup>2</sup>

## WYTRZYMAŁOŚĆ CIĘGIEN NOŚNYCH GÓRNICZEGO NACZYNIA WYDOBYWCZEGO

Analiza okresowych badań skipów i klatek eksploatowanych w szybach jednej z kopalń wykazała że większość zarejestrowanych uszkodzeń elementów nośnych naczyń wydobywczych to pęknięcia o charakterze zmęczeniowym.

Celem wyeliminowania przyczyn powstawania uszkodzeń oraz zwiększenia trwałości naczyń wydobywczych, niezbędnym będzie prawdopodobnie wykonanie rekonstrukcji tych fragmentów naczyń, w których uszkodzenia te występują. Aby rekonstrukcja przyniosła oczekiwane rezultaty niezbędne jest poznanie przyczyn będących źródłem powstających pęknięć. Dlatego postanowiono przeprowadzić pomiary, których wyniki umożliwiłyby wyznaczenia wartości obciążeń ciągien, a w dalszej kolejności ocenę ich wytrzymałości i trwałości.

Wykonana analiza trwałości zmęczeniowej ciągien naczyń wydobywczego, wskazuje na możliwość rozwoju pęknięć zmęczeniowych w najbardziej wytężonych obszarach konstrukcji, w krótkiej perspektywie czasowej.

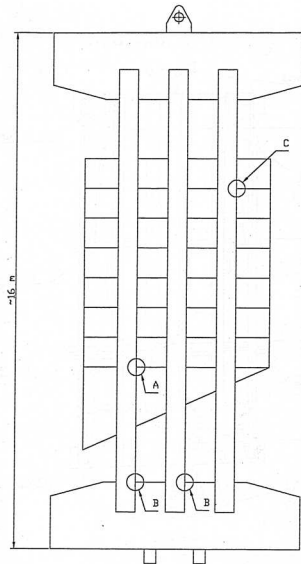
**Słowa kluczowe:** skipy górnicze, naprężenia ciągien, tesnometria, trwałość zmęczeniowa

### 1. Wprowadzenie

Analiza okresowych badań skipów i klatek eksploatowanych w szybach jednej z kopalń wykazała że większość zarejestrowanych uszkodzeń elementów nośnych naczyń wydobywczych, to pęknięcia o charakterze zmęczeniowym [1]. Przykładowo na rys. 1 pokazano miejsca występowania pęknięć dla skipów o udźwigu  $Q=17\text{Mg}$ . W przypadku skipu o udźwigu 17 Mg, pęknięcia występują najczęściej w rejonie otworu wysypowego (punkt A na schemacie konstrukcji skipu (rys. 1)). Były to pęknięcia ciągien lub spoin. Na cztery badane konstrukcje skipów o udźwigu  $Q=17\text{Mg}$  w punkcie A zaobserwowano 12 pęknięć. Generalnie, dla pozostałych konstrukcji naczyń wydobywczych w tym klatek, pęknięcia rozwijają się głównie w ciągach nośnych lub spoinach, w obszarach łączenia

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: AGH-University of Science and Technology Faculty of Mechanical Engineering and Robotics Al. Mickiewicza 30, 30-059, Kraków, Poland, stwolny@agh.edu.pl

<sup>2</sup> AGH-University of Science and Technology Faculty of Mechanical Engineering and Robotics Al. Mickiewicza 30, 30-059, Kraków, Poland sbadura@agh.edu.pl



Rys. 1. Miejsce występowania pęknięć dla skipów o udźwigu 17 Mg

Fig. 1. Place cracks for conveyances with a capacity of 17 Mg

ciążeń z konstrukcją naczyń. Pęknięcia te, o charakterze zmęczeniowym ciągów oraz spoin lub nitów łączących je z pozostałymi elementami konstrukcji, są najczęściej występującymi tego typu uszkodzeniami naczyń wydobywczych.

Celem wyeliminowania przyczyn powstawania uszkodzeń oraz zwiększenia trwałości naczyń, konieczne będzie prawdopodobnie wykonanie rekonstrukcji tych fragmentów naczyń wyciągowych, w których uszkodzenia te występują. Aby rekonstrukcja przyniosła oczekiwane rezultaty niezbędne jest poznanie przyczyn, będących źródłem powstających pęknięć

Należałoby sądzić, że poprawnie zaprojektowany skip lub klatka nie powinny ulegać uszkodzeniu o charakterze zmęczeniowym, biorąc pod uwagę wartości współczynników bezpieczeństwa ( $n=7$ ) przyjmowanych do oceny ich wytrzymałości. Trzeba jednak wyjaśnić, że przyjmowane modele obliczeniowe elementów nośnych naczyń wydobywczych są bardzo uproszczone i nie w pełni oddają powstający w nich stan naprężeń wywołany przenoszonymi obciążeniami [2],[3]. Ponadto powszechną praktyką przy projektowaniu elementów nośnych konstrukcji naczyń wydobywczych jest wymiarowanie ich z warunku bezpieczeństwa, przy uwzględnieniu maksymalnego obciążenia statycznego [4].

W tym stanie rzeczy, niezbędnym stało się wykonanie stosownych pomiarów, które dałyby wiedzę odnośnie obciążeń ciągów i w stanie naprężeń jaki jest w nich wywołany w pełnym cyklu eksploatacyjnym urządzenia wydobywczego. Dlatego postanowiono przeprowadzić pomiary, których wyniki umożliwiłyby wyznaczenie wartości obciążeń ciągów, a dalszej kolejności ocenę ich wytrzymałości i trwałości.

## 2. Pomiary tensometryczne na obiekcie rzeczywistym

Mając na uwadze osiągnięcie zasygnalizowanych we wstępie celów, wyznaczenia obciążeń cięgien i wygenerowanych w nich naprężeniach w pełnym cyklu eksploatacyjnym, przeprowadzono tensometryczne pomiary odkształceń w jednej z polskich kopalń [1].

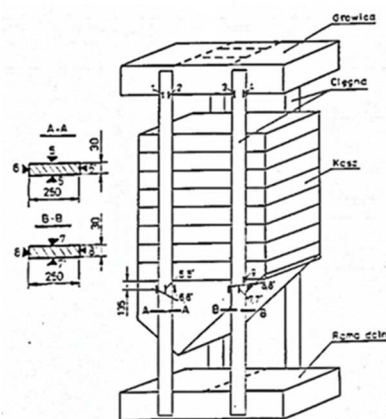
Pomiary tensometryczne przeprowadzono w najbardziej wyciężonych przekrojach poprzecznych cięgien, szczególnie w obszarach w których powstają pęknięcia zmęczeniowe [1].

W tym celu skompletowano aparaturę pomiarową przedstawioną na rysunku 2, w skład której wchodziły mostki tensometryczne i komputery pomiarowe, umożliwiające rejestrację i obróbkę wyników pomiarów.



Rys. 2. Aparatura wykorzystana podczas pomiarów tensometrycznych

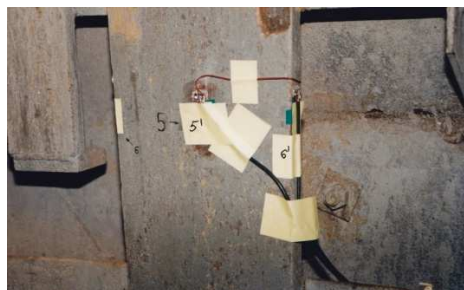
Fig. 2. The equipment used during the strain gauge measurements



Rys. 3. Rozmieszczenie punktów pomiarowych na konstrukcji naczynia wydobywczego

Fig. 3. Placement of measurement points on the steel construction of conveyances

Schemat rozmieszczenia punktów pomiarowych na konstrukcji naczynia wydobywczego pokazano na rysunku 3. Czujniki pomiarowe o numerach 1,2,3,4 zostały naklejone na ciągna u nasady głowicy, pozostałe czujniki naklejono poniżej pierwszej ramy kosza – rysunek 3. Przykładowo na rysunku nr 4 pokazano rozmieszczenie czujników 5,5' i 6,6' naklejonych poniżej pierwszej ramy kosza skipu [1]. Czujniki 5 i 5' oraz 6 i 6'; 7 i 7'; 8 i 8' leżące odpowiednio naprzeciw leżących powierzchniach cięgna połączone w układzie półmostka do odpowiednich kanałów pomiarowych. Pozwoliło to na pomiar tylko tej części naprężenia która jest wywołana momentem zginającym w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny naklejenia czujników.



Rys. 4. Czujniki 5,5' i 6,6' naklejone powyżej pierwszej ramy kosza skipu po stronie lewej

Fig. 4. The sensors 5,5' and 6,6' glued above the first frame on the left side of conveyances



Rys. 5. Rozmieszczenie czujników na 3 i 4 u nasady głowicy na cięgnie

Fig. 5. Placement of sensors 3 and 4 at the base of the head in the conveyances on rods bearing elements

Natomiast na rysunku nr 5 pokazano rozmieszczenie czujników na 3 i 4 u nasady głowicy na cięgnie.

Po wyzerowaniu aparatury pomiarowej, uruchomiono maszynę wyciągową i rozpoczęto pomiar (przejazd), który obejmował pełny cykl pracy maszyny wyciągowej. W czasie pomiarów, jazda skipów odbywała się z prędkością  $V_0=20$  m/s, a wszystkie manewry odbywały się w taki sposób, jak w czasie normalnej pracy urządzenia wyciągowego. W trakcie przejazdów włączono dodatkowo – znajdującą się na standardowym wyposażeniu wyciągu - aparaturę do pomiaru sił w linach.

Wyniki pomiarów, po ich odpowiednim opracowaniu przedstawiono w formie przebiegów zmian wartości naprężeń rejestrowanych w czasie, zamieszczono w monografii [1]. W referacie ograniczono się do zacytowania wyników pomiarów, dotyczących stanu naprężenia w przekroju poprzeczny cięgien, łączących głowicę z koszem skipu.

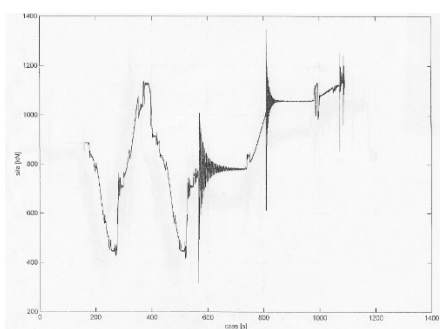
### 3. Omówienie wyników pomiarów

W celu lepszego zobrazowania wyników pomiarów – szczególnie w odniesieniu do naprężeń w cięgnach – wybrano odpowiednie fragmenty przebiegów naprężeń [1], i przedstawiono je w rozszerzonej skali czasowej. Rejestracja wyników w formie komputerowych zbiorów cyfrowych umożliwiła ich analizę. Taką analizę przeprowadzono posługując się programem MATLAB, a wyniki jej w formie graficznej przedstawiono na rysunkach 6÷9.

Z porównania przebiegów zmiany wartości sił w linach nośnych (rysunek 6) z przebiegiem zmiany wartości naprężenia w niektórych punktach pomiarowych (np. w punkcie 3 – rys. 7.) widać podobieństwo tych przebiegów. Wykresy naprężeń wyglądają tak, jakby na wykres obrazujący przebieg zmiany sił w linach nośnych, nałożono zakłócenia. Zakłócenia te, wywołane są między innymi, siłami wzajemnego oddziaływania naczynia i zbrojenia, które są związane

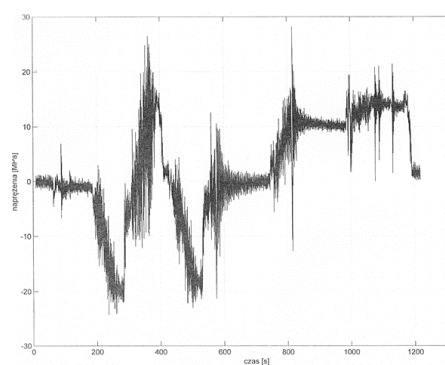
z efektami prowadzenia oraz z załadunkiem lub rozładunkiem skipu. Punkt zerowy naprężeń na tych wykresach, odpowiada w rzeczywistości wartościom naprężeń w punktach pomiarowych, wywołanych odpowiednio ciężarem konstrukcji oraz ciężarem urobku. Jak już wspomniano odpowiednie podłączenie czujników pomiarowych 6, 7, i 8 w układ półmostka, eliminuje w torze pomiarowym naprężenia wywołane rozciąganiem cięgna. Oznacza to, że w tych punktach pomiarowych rejestrowana jest tylko ta część naprężenia którą wywołuje moment gnący. Chodziło w tym przypadku o oszacowanie wartości naprężeń pochodzących od momentu gnącego – wywołanego siłami wzajemnego oddziaływania naczynia i zbrojenia i odniesienie ich, do wartości naprężeń wywołanych osiowym rozciąganiem cięgna.

W opracowaniu [7] przedstawiono zamiany wartości naprężeń w punkcie 1.



Rys. 6. Przebiegi sił w zawieszeniu – cały przejazd [1]

Fig. 6. Diagram of forces in the mine conveyance attachments - the entire journey [1]



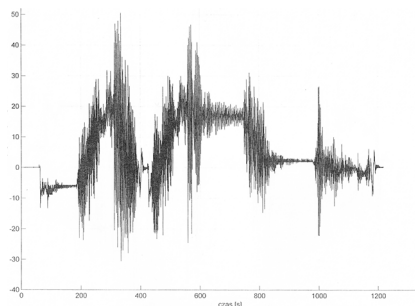
Rys. 7. Przebieg naprężeń w p.3

Fig. 7. Diagram of stress in point 3

Na rysunku 8 przedstawiono przebieg zmiany tych naprężeń w cięgnie, zarejestrowany przez czujnik 7 podczas zjazdu pustego naczynia do podszybia natomiast na rysunku 9 przebieg zmiany naprężenia, zarejestrowany przez ten sam czujnik, podczas wyjazdu pełnego naczynia, odpowiednio zwiększając, dla lepszej czytelności, skalę czasową (porównaj z rysunkiem nr 6). W opracowaniu [5] przedstawiono przebieg zmiany wartości naprężeń w cięgnie zarejestrowany przez czujnik 8.

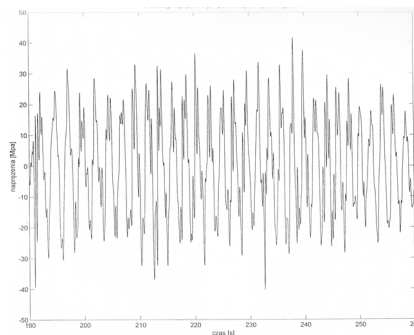
W oparciu o wykonane pomiary [1] w tablicy 1 zebrano i przedstawiono wartości ekstremalnych przedziałów zmienności naprężeń wywołanych chwilowymi zmianami wartości obciążenia cięgna – siłami wzajemnego oddziaływania naczynia i zbrojenia szybu - oraz wartości ekstremalnych przedziałów zmienności naprężeń z uwzględnieniem współczynnika niejednorodności widma naprężeń.





Rys. 8. Przebieg naprężeń w cięgnie w punkcie 7

Fig. 8. Diagram of stress in point 7 in rod



Rys. 9. Przebieg naprężeń w cięgnie w punkcie 7 po usunięciu trendu

Fig. 9. Diagram of stress in point 7 in rod after removing the trend

Tablica 1. Przebieg zmienności naprężeń w pełnym cyklu pracy urządzenia wyciągowego (źródło: opracowanie własne na podstawie [1])

Table 1. The variation of stress in the full cycle hoist. (Source: own study based on [1])

Punkt pomiarowy, Nr	Max przedział zmienności naprężeń	
	$\Delta\sigma$	$\alpha_K \Delta\sigma$
1	75	70
2	50	47
3	35	32,5
4	25	24
6	40	35
7	75	71
8	45	40

Porównując przebieg zmiany siły w linach nośnych (rys. 6) z przebiegami jednocześnie mierzonych wartości naprężeń ([1], przykładowo rys. 7, 8) wyliczono wartości współczynników korelacji. Wyliczone wartości współczynników korelacji zestawiono w tablicy 2. Szczególnie wysoka jest korelacja między siłą w linach a naprężeniami w punktach 1,2,3,4. W punktach leżących w pobliżu spoin łączących ciągnio z głowicą korelacja ta jest bardzo duża i jej współczynnik zawiera się w granicach  $0,89 \div 0,95$ . Znacznie mniejsza jest korelacja pomiędzy siłą w linach i naprężeniami w punktach pomiarowych 6,7,8. Na przykład dla punktu pomiarowego 7 współczynnik korelacji wynosi 0.58. Można szacować, że około 60% wartości naprężeń w tym punkcie ma związek z wartością siły w linach, pozostałe 40% jest powiązana z siłami prowadzenia naczynia. Natomiast w odniesieniu do naprężeń w punkcie pomiarowym 6, wartość współczynnika korelacji wynosi 0.32. Świadczy to o tym, że o wartości tego naprężenia w prawie 70% decyduje oddziaływanie sił prowadzenia naczynia.

Tablica 2. Wartości współczynników korelacji pomiędzy wartością siły w linie nośnej a wartością naprężeń w punktach pomiarowych (źródło: opracowanie własne na podstawie [1])

Table 2. The values of correlation coefficients between the force in ropes and the value of stress at the measuring points (Source: own study based on [1])

	Fzaw.	P1	P2	P3	P4	P6	P7	P8
Fzaw.	1,0000	0,9458	0,9339	0,9400	0,8921	0,3221	0,5779	0,2376
P1	0,9458	1,0000	0,9541	0,9517	0,9256	0,3463	0,6329	0,3216
P2	0,9339	0,9541	1,0000	0,9743	0,9065	0,3451	0,5333	0,2199
P3	0,9400	0,9517	0,9743	1,0000	0,9071	0,3833	0,4871	0,1967
P4	0,8928	0,9256	0,9065	0,9071	1,0000	0,3387	0,5512	0,2542
P6	0,3221	0,3463	0,3451	0,3833	0,3387	1,0000	0,0319	0,7224
P7	0,5779	0,6329	0,5333	0,4871	0,5512	0,0319	1,0000	0,3785
P8	0,2376	0,3216	0,2199	0,1967	0,2542	0,7224	0,3785	1,0000

Ponieważ obserwowane uszkodzenia cięgien wykazują charakter zmęczeniowy [1], opracowano wyniki pomiarów w taki sposób, aby możliwe stało się ich wykorzystanie do oceny trwałości zmęczeniowej konstrukcji naczynia wydobywczego [1].

Między innymi w tablicy 3 zestawiono wartości współczynników wypełnienia widma  $\alpha_k$  przebiegów naprężeń w punktach pomiarowych dla pełnego cyklu pracy wyciągu.

Tablica 3. Wartości współczynników wypełnienia widma  $\alpha_k$  przebiegów naprężeń w punktach pomiarowych dla pełnego cyklu pracy wyciągu (źródło: opracowanie własne na podstawie [1])

Table 3. The values of coefficients fill spectral waveforms stress at the measuring points for the full cycle. (Source: own study based on [1])

	P1	P2	P3	P4	P6	P7	P8	Wartość średnia
$\alpha_k$ dla $m = 3$	0,7489	0,7606	0,7459	0,8008	0,6857	0,7737	0,7184	0,7477
$\alpha_k$ dla $m = 5$	0,9312	0,9398	0,9289	0,9694	0,8832	0,9496	0,9082	0,93
liczba cykli naprężeń na jeden przejazd	636	637	626	608	596	467	564	591

#### 4. Ocena trwałości zmęczeniowej cięgien konstrukcji skipu dla normalnych warunków eksploatacyjnych

Na podstawie analizy liczby wyładunków naczyń wyciągowych w wybranych szybach [1][6], określono przeciętne liczby cykli obciążeń konstrukcji naczynia wydobywczego z czterech szybów z jednej z polskich kopalń, zakładając 50% cykli roboczych w sobotę oraz zero cykli w niedzielę i święta. Obliczone liczby cykli roboczych dla 10 i 15 lat pracy urządzenia wydobywczego zestawiono w tablicy 4. W obliczeniach nie uwzględniono okresowych prac remontowych, zatem rzeczywiste liczby cykli obciążeń mogą być nieco mniejsze.

Tablica 4. Liczba cykli roboczych oszacowane dla wybranych szybów (źródło: opracowanie własne na podstawie [4])

Table 4. The number of cycles estimated for the selected shafts (Source: own study based on [4])

Oznaczenie szybów	Liczby cykli roboczych	
	10 lat	15 lat
I	$0,58 \cdot 10^6$	$0,87 \cdot 10^6$
II	$0,66 \cdot 10^6$	$0,99 \cdot 10^6$
III	$0,68 \cdot 10^6$	$1,02 \cdot 10^6$
IV	$0,58 \cdot 10^6$	$0,86 \cdot 10^6$

Na podstawie wyników zestawionych w tablicy 4 do dalszych obliczeń, jako liczbę cykli rocznych dla 15 lat pracy konstrukcji naczynia wydobywczego przyjęto  $N=1 \cdot 10^6$ .

Eurokod 3 standard [5] zaleca wytrzymałość zmęczeniową  $\Delta\sigma_R$  i  $\Delta\tau_R$  ustalić w zależności od przewidywanej liczby cykli naprężeń  $N$  i kategorii zmęczeniowej elementu konstrukcji lub połączenia  $(\Delta\sigma_c, \Delta\tau_c)$  według wzoru:

$$\Delta\sigma_R = 0,735 \Delta\sigma_c \left( \frac{5 \cdot 10^6}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \Delta\sigma_L \quad (1)$$

gdzie:  $m = 3$  dla  $N \leq 5 \cdot 10^6$ ;  $m = 5$  dla  $N > 5 \cdot 10^6$

$\Delta\sigma_c$  - kategoria zmęczeniowa (wytrzymałość zmęczeniowa normatywna),

$\Delta\sigma_L$  - wytrzymałość zmęczeniowa trwała

Nośność konstrukcji wg [5] ze względu na zmęczenie należy sprawdzić wg wzoru

$$\Delta\sigma_C \leq \frac{\Delta\sigma_R}{\gamma_{fat}} \quad (2)$$

gdzie:  $\gamma_{fat}$  - częściowy współczynnik bezpieczeństwa przy zmęczeniu materiału, przyjmowany jako  $\gamma_{fat} = 1 \div 1,2$ . Wartość współczynnika zależy od warunków eksploatacji, kontroli i konserwacji. Dla przeciętnych warunków norma [5] zaleca przyjmować  $\gamma_{fat} = 1$ , a dla skrajnych  $\gamma_{fat} = 1,2$ . Ciężna konstrukcji naczynia połączone są z głowicą, koszem skipu oraz ramą dolną spoinami pachwinowymi (ściananie) w kierunku długości spoin, zatem wg [5]  $\Delta\sigma_c = 80 MPa$  Stąd wytrzymałość zmęczeniowa ciężna naczynia wydobywczego wg zależności (1) wynosi:

$$\Delta\sigma_R = 0,735 \cdot 80 \cdot \left( \frac{5 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{3}} = 100 [MPa]$$

Nośność konstrukcji wg [5] ze względu na zmęczenie należy sprawdzić wg wzoru (2). Dla przeciętnych warunków kontroli i konserwacji można przyjąć  $\gamma_{fat}=1$ ,

$$\text{Stąd } \Delta\sigma_e \leq \frac{\Delta\sigma_c}{\gamma_{fat}} = \frac{100}{1} \cong 100 \text{ MPa}$$

Konfrontując uzyskaną wartość  $\Delta\sigma_e$  z maksymalnymi zmiennościami naprężeń wyznaczonymi dla analizowanych punktów pomiarowych  $\Delta\sigma$  (tablica 1) stwierdzono że naczynie wydobywcze można bezpiecznie eksploatować przez, 15 lat, ponieważ  $\Delta\sigma < \Delta\sigma_e$ .

Powyższe obliczenia wykonano, definiując cykl jako zmianę obciążenia związaną z załadunkiem i wyładunkiem naczynia. W rzeczywistości między załadunkiem a wyładunkiem naczynia, występuje cały blok zmiany naprężenia (porównaj rys. 6, 7, 8). Numeryczna analiza wykazała, że pomiędzy w/w punktami naprężenia zmieniały się około  $6 \cdot 10^2$  cykli (tablica 3).

W takim przypadku, jako liczbę cykli dla 15 lat pracy konstrukcji naczynia, należy przyjąć

$$N \cong 6 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^8.$$

Natomiast w przypadku niejednorodnego widma naprężeń, można przyjmować równoważny zakres zmienności naprężeń, określony wzorem [5]:

$$\Delta\sigma_e = \alpha_k \cdot \max\Delta\sigma \quad (3)$$

gdzie:

$\alpha_k$  – współczynnik niejednorodności (wypełnienia) widma (tab. 3).

$$\text{Teraz } \Delta\sigma_R = 0,735 \cdot \Delta\sigma_c \cdot \left( \frac{5 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^8} \right)^{\frac{1}{5}} \cong 0,735 \cdot 80 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{120}} = 23,5 [\text{MPa}].$$

Porównując uzyskaną wartość  $\Delta\sigma_R$  z wartością  $\alpha_k \cdot \max\Delta\sigma$  (tablica 1) zauważamy że, bezpieczna eksploatacja przez okres 15 lat naczynia wydobywczego (na którym przeprowadzono eksperyment) jest bardzo wątpliwa. Tak wykonana analiza potwierdza fakt, pojawienia się pęknięć zmęczeniowych nawet po kilku latach eksploatacji skipu [1].

## 5. Podsumowanie

Analiza wyników pomiarów tensometrycznych wskazuje, że liczba rzeczywistych cykli obciążeń jest wielokrotnie większa niż cykli liczonych od załadunku do rozładunku [4]. Jeden cykl zmiany obciążenia związany z załadunkiem i wyładunkiem poprawniej będzie nazwać blokiem obciążenia.

Wykonana analiza trwałości zmęczeniowej cięgna naczynia wydobywczego, wskazuje na możliwość rozwoju pęknięć zmęczeniowych w najbardziej wyczerpanych obszarach konstrukcji, w krótkiej perspektywie czasowej. Tezę tę potwierdzają obserwacje naczyń wyciągowych eksploatowanych zarówno w górnictwie miedziowym i węglowym [1].

W świetle powyższego konieczne wydaje się wykonanie obszerniejszej analizy wytrzymałościowo-zmęczeniowej w aspekcie modernizacji naczynia wyciągowego, której celem byłoby podwyższenie jego trwałości zmęczeniowej. Przeprowadzenie takiej analizy stanowić może podstawę do opracowania kryterium oceny bezpiecznego okresu eksploatacji rozważanych urządzeń.

### Literatura

- [1] Wolny S., Wybrane problemy wytrzymałościowe w eksploatacji górniczych urządzeń wyciągowych. Monografia. Problemy Inżynierii Mechanicznej i Robotyki. AGH. Kraków, 2003 r.
- [2] Kay K., 2010 Brake Control Strategy After-Stop Conveyance Oscillation and Haul. International Conference on Hoisting nad Haulage. Las Vegas, Nevada, United States.
- [3] Thomas G.R. M.E. Greenway Shaft Steel and Conveyance Dynamics. Conferens of Hoisting of Men, Materials and Minerals. Toronto 1988.
- [4] Dziennik ustaw nr 99. Poz. 1003. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 30 kwietnia 2004r., „W sprawie dopuszczenia wyrobów do stosowania w zakładach górniczych”.
- [5] Eurokod 3.
- [6] Badura S., „Description of criterion of design of koepe pulleys of winding gears”. AGH Kraków 2008.
- [7] Wytrzymałości ciągien nośnych górniczego naczynia wyciągowego w świetle obliczeń zmęczeniowych – Problem of strength of in hoisting strings of skip conveyances in the light of fatigue calculations / Stanisław WOLNY, Sławomir BADURA // W: Transport szybowy: monografia : praca zbiorowa / Instytut Techniki Górniczej KOMAG Gliwice : Instytut Techniki Górniczej KOMAG, 2015. – 1 dysk optyczny. – e-ISBN10: 978-83-60708-89-7.

## THE STRENGTH OF RODS BEARING ELEMENTS IN CONVEYANCES

### Summary

Analysis of periodic tests conveyances and cage operated shafts in one of the mines revealed that most of the failures recorded in load-bearing elements in conveyances, is fatigue cracks. In order to eliminate the causes formation of damage and increased durability in conveyances, necessary will probably perform the reconstruction of the fragments conveyances in which the damage they are. To reconstruction brought the expected results, it is necessary to know the reasons being the source of emerging cracks. Therefore it was decided to carry out measurements the results of which allow you to determine the values of loads and a further assessment of their strength and durability.

The analysis of fatigue life rods-bearing elements in conveyances it indicates the possibility of the development of fatigue cracks in the most intensive areas of the construction, in the short term.

**Keywords:** conveyances, tension rods, strain gauge, fatigue life

*Przesłano do redakcji: 15.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Janusz LEWANDOWSKI<sup>1</sup>  
Dariusz ROZUMEK<sup>2</sup>

## OCENA STOPNIA ZUŻYCIA ZESPOŁU WENTYLATORA NA PODSTAWIE POMIARU I ANALIZY DRGAŃ ŁOŻYSK

W pracy omówione zostały wybrane metody pomiarów drgań maszyn wirujących (silników, wirników wentylatorów, przekładni mechanicznych, itp.) zastosowanych do oceny stanu maszyn pracujących w warunkach przemysłowych. Przedstawiono zastosowaną aparaturę badawczą pozwalającą na zebranie danych do analizy. Na przykładzie pomiarów drgań łożysk wentylatora promieniowego typu WPK-3,9 pracującego w stacjach wentylatorów głównych w przemyśle górniczym przedstawiono analizę drgań, dzięki której określono stan techniczny wirujących części wentylatora.

**Słowa kluczowe:** diagnostyka maszyn, drgania, łożyska, wirnik, wentylatory, przekładnie mechaniczne

### 1. Wprowadzenie

Drgania układów fizycznych są zjawiskiem powszechnie występującym w przyrodzie. Oddziaływanie drgań może być pozytywne (młoty udarowe, utrząsarki, zagęszczarki, itp.) oraz negatywne (drgania maszyn wirnikowych, wentylatory, przekładnie sprężarki, itp.) [1, 2]. Negatywny wpływ drgań maszyn wirujących pracujących w przemyśle często prowadzi do występowania stanów awaryjnych, uszkodzeń części maszyn skutkujących postojami, przedwczesnymi remontami. Z ekonomicznego punktu widzenia dąży się do tego aby eksploatacja maszyn odbywała się w sposób bezawaryjny. Świadomy użytkownik zdaje sobie sprawę, że elementy maszyn z czasem ulegają naturalnemu zużyciu. Z tego powodu prowadzone są okresowe kontrole, przeglądy, badania i pomiary pracujących elementów maszyn w różnych zakresach.

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Janusz Lewandowski, Politechnika Opolska, Katedra Mechaniki i PKM, ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole; Ośrodek Pomiarów i Automatyki Przemysłu Węglowego S.A., ul. Hagera 14A, 41-800 Zabrze, tel. 604585204; jansuz210@wp.pl

<sup>2</sup> Dariusz Rozumek, Politechnika Opolska, Katedra Mechaniki i PKM, ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole; tel. 774498410; d.rozumek@po.opole.pl

Celem pracy jest przedstawienie wyników okresowo prowadzonych pomiarów drgań łożysk wentylatora typu WPK-3,9 wraz z jego oceną stanu technicznego.

## 2. Opis procedury badawczej

### 2.1. Aparatura do pomiarów drgań

Przedstawione badania drgań maszyn prowadzono z wykorzystaniem dwóch rodzajów urządzeń pozwalających na zebranie niezbędnych do oceny danych. Pierwsze zastosowano przenośne urządzenie (Vibrotip firmy Pruftechnik pokazany na rys. 1) umożliwiające prowadzenie pomiarów ogólnego poziomu drgań. Pomiary tego typu prowadzone są okresowo lub w sposób ciągły. Polegają one na szerokopasmowym pomiarze drgań łożysk (w zakresie 4 - 10000 Hz) i śledzeniu trendów zmian poziomu drgań w dłuższym okresie czasu (np. miesiąc, rok).

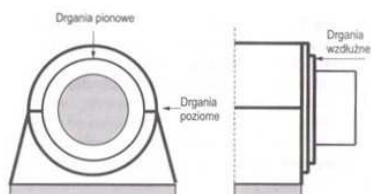


Rys. 1. Ręczne urządzenie pomiarowe do drgań Vibrotip firmy Pruftechnik [3]

Fig. 1. Manually measuring device to vibrate Vibrotip company Pruftechnik [3]

Wielkościami mierzonymi są prędkości drgań. Dla jednego węzła pomiarowego otrzymuje się trzy wartości liczbowe wynikające z kierunków dokonywania pomiaru (rys. 2), mianowicie:

- H (horizontal "x") – czujnik pomiarowy ustawiony w kierunku poziomym,
- V (vertical "y") – czujnik pomiarowy ustawiony w kierunku pionowym,
- A (axial "z") – czujnik pomiarowy ustawiony w osi.



Rys. 2. Kierunki pomiaru drgań w węzłach łożyskowych [4]

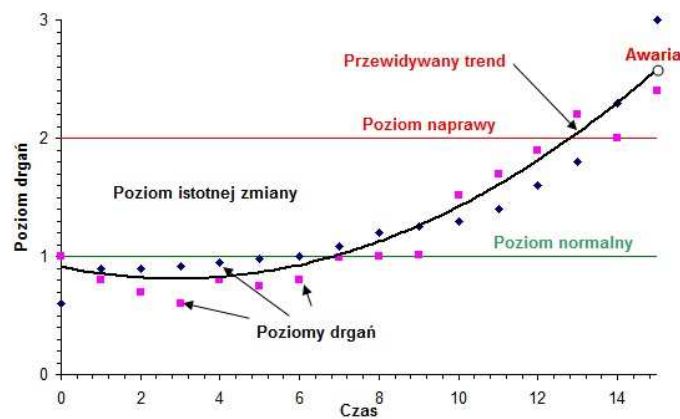
Fig. 2. Directions vibration measurement in bearing nodes [4]

Miarą wielkości drgań pozwalającą na obiektywną ocenę jest wartość skuteczna prędkości drgań  $v_{RMS}$  (root mean square). Wartość ta zdefiniowana jest następująco [5]

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (1)$$

gdzie:  $v(t)$  – prędkość drgań zależna od czasu,  
 $v_{RMS}$  – odpowiednia wartość średniokwadratowa prędkości,  
 $T$  – przedział czasu uwzględniany w analizie.

Z otrzymanych wyników drgań buduje się wykres, który pozwala dokonać oceny stanu technicznego wirującego urządzenia oraz zgodnie z zaleceniami producenta wybrać optymalny moment na przeprowadzenie remontu (rys. 3).



Rys. 3. Wykres z wynikami szerokopasmowego pomiaru drgań  
 Fig. 3. Chart results broadband vibration measurement

Inne, bardziej skomplikowane urządzenia pomiarowe pozwalają na wykonywanie badań w szerokim zakresie, między innymi: pomiarze przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń, analizy częstotliwościowej, itp. Na rynku dostępnych jest wiele urządzeń tzw. analizatorów drgań. Poza nimi często wykorzystywane są wszelkiego rodzaju przystawki lub karty pomiarowe (np. National Instruments), dzięki którym możliwe jest budowanie systemów pomiarowych dostosowanych do aktualnych potrzeb badawczych. Rejestrowane drgania poddaje się obróbce korzystając z oprogramowania matematycznego (np. Matlab). Wynikami prowadzenia tego rodzaju badań i obliczeń są wykresy drgań w trzech płaszczyznach (H, V, A) oraz ich widma częstotliwościowe. Mając te dane i uwzględniając budowę danego urządzenia (a zatem znając częstotliwości cha-

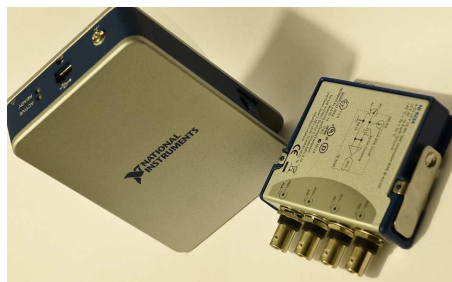


rakterystyczne poszczególnych elementów) możliwa jest ocena stopnia zużycia pracujących elementów. W niniejszej pracy, jako kolejne urządzenie pomiarowe zastosowano czterokanałową kartę pomiarową National Instruments NI9234 wraz z trzema przetwornikami przyspieszeń IMI601A01. Kompletny zestaw połączono z komputerem z zainstalowanym oprogramowaniem LabView (rys. 4 i 5).



Rys. 4. Czujnik drgań IMI601A01

Fig. 4. Vibration sensors IMI601A0



Rys. 5. Karta pomiarowa NI9234

Fig. 5. Measuring card NI9234

## 2.2. Badany obiekt

Badaniu poddano wentylator promieniowy typu WPK 3,9 pracujący w stacji wentylatorów głównych zakładu górniczego. Na rys. 6 pokazano badany wentylator wraz z napędem bez widocznego wirnika. W tabeli 1 zestawiono podstawowe parametry techniczne.



Rys. 6. Wentylator promieniowy typu WPK 3,9

Fig. 6. Radial ventilator type WPK 3.9

Tabela 1. Dane techniczne wentylatora typu WPK 3,9

Table 1. Technical data ventilator type WPK 3.9

Średnia wirnika, mm	Prędkość obrotowa, obr/min	Wydajność, m <sup>3</sup> s	Śpiętrzenie całkowite, Pa	Spraw- ność	Moc, kW	Masa bez silnika, kg
3900	500	250	4400	0,86	1279	25770

Pomiary wykonano w węzłach łożyskowych, w trzech płaszczyznach mocując czujniki drgań za pośrednictwem magnesów stałych.

### 2.3. Metodyka badań

W przypadku szerokopasmowych drgań (Vibrotip) pomiar polegał na przykładaniu czujnika, z podkładką magnetyczną, w określonych miejscach na obudowach łożysk i rejestracji wartości drgań. Z otrzymanych danych sporządzono wykresy trendów zmian poziomu drgań. W przypadku pomiarów drgań z zastosowaniem karty pomiarowej z trzema czujnikami drgań zarejestrowany sygnał poddawany jest obróbce. W pierwszej kolejności z sygnału wybierany był jego fragment o długości trwającej dokładnie jedną sekundę. Znając częstotliwość rejestracji sygnału, która wynosiła 25,6 kHz znana była również liczba próbek brana do analizy tj. 25600 próbek oraz odstęp czasu pomiędzy kolejnymi próbkami tj.  $3,90625 \cdot 10^{-5}$  s. Wyznaczone dane pomiarowe pozwoliły na przeprowadzenie analizy częstotliwościowej za pomocą szybkiej transformaty Fouriera (FFT). Obliczenia wykonano w programie Matlab. W uzyskanych wynikach widma częstotliwości poszukiwano prążków o częstotliwościach charakterystycznych dla danych uszkodzeń maszyny. W opisywanym przypadku poszukiwano częstotliwości związanych z [4, 5]:

- niewyważeniem wału (ekscentrycznością wału),

$$f = 1 \cdot f_{obr}$$

- z luzem mechanicznym,

$$f = \frac{1}{3} \cdot f_{obr}, \quad f = \frac{1}{2} \cdot f_{obr}, \quad f = 2 \cdot f_{obr}$$

- wywołane ruchem łopat wentylatora.

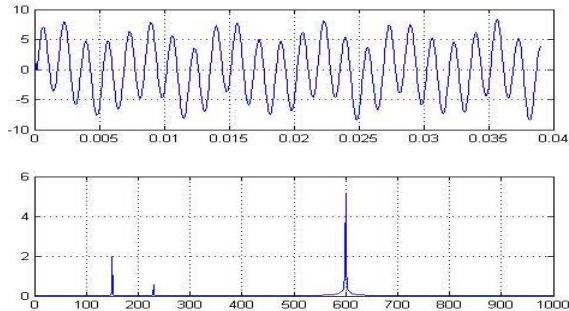
$$f = l_w \cdot f_{obr}$$

Dodatkowo z uwagi na fakt, że wirnik zamocowany jest na końcu wału poza łożyskowaniem (wirnik przewieszony) zwracano uwagę na drgania spowodowane ugięciem wału objawiające się drganiami promieniowymi współfazowymi oraz drganiami osiowymi przeciwfazowymi.

Przed rozpoczęciem analizy zarejestrowanych drgań wykonano sprawdzenie poprawności obliczeń poprzez podstawienie wygenerowanych danych ze znanego przebiegu ruchu. tj.:

$$y(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 150 \cdot t) + 6 \cdot \sin(2\pi \cdot 600 \cdot t) + 0,6 \cdot \sin(2\pi \cdot 230 \cdot t)$$

Wynik przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Wyniki pomiarów wynik analizy znanego ruchu

Fig. 7. The results of the measurement result of the analysis of the well-known motion

Ruch ten złożony był z trzech ruchów o częstotliwościach 150, 600, 230 Hz oraz wartościach amplitud 2, 6, 0,7 m. Częstotliwość próbkowania była taka sama jak w pomiarze drgań wentylatora. Otrzymane wyniki potwierdziły prawidłowo przyjęte założenia obliczeń.

### 3. Wyniki badań i ich analiza

Wyniki pomiarów szerokopasmowej prędkości drgań dla łożyska 34 i 5 pokazano na rys. 8. Pomiarzy wykonane zostały w okresie od czerwca 2014 do lutego 2017 r. w dwumiesięcznych odstępach czasu.

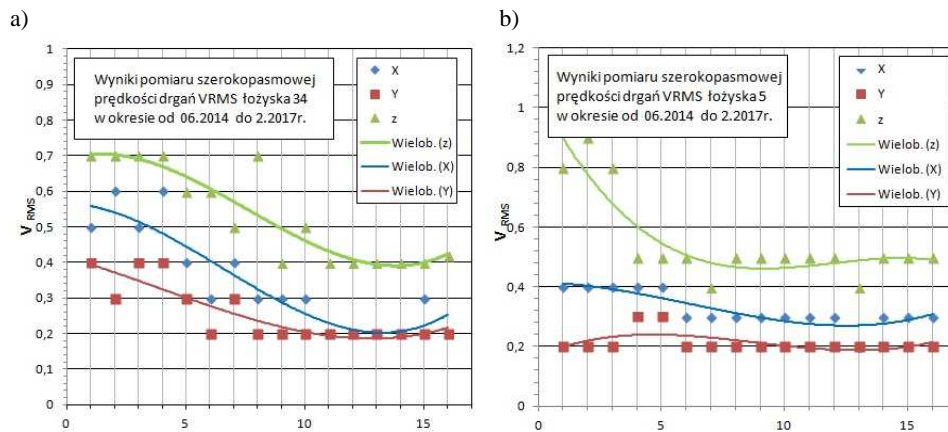
Rys. 8. Wyniki pomiarów prędkości drgań łożysk ( $v_{RMS}$  mm/s): a) 34, b) 5

Fig. 8. The speed measurements of vibration bearings ( $v_{RMS}$  mm/s): a) 34, b) 5

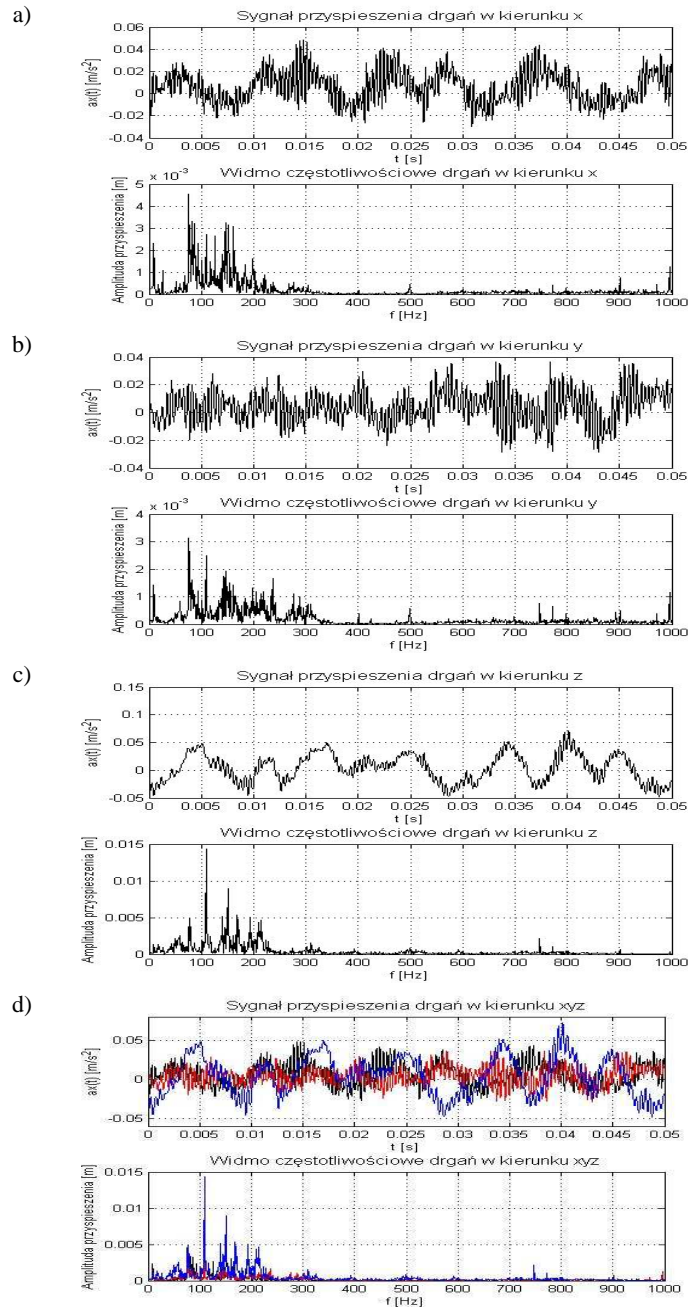
Oceny dokonano według kryteriów dla określonych grup maszyn opisanych w załączniku B w normie [6]. Tabela 2 przedstawia graniczne strefy intensywności drgań przyjęte do oceny. Z danych przedstawionych na rys. 8 wynika, że aktualne wartości drgań łożyska 34 w kierunku x wynoszą 0,2 mm/s, w kierunku y 0,2 mm/s, a w kierunku z 0,42 mm/s.

Tabela 2. Graniczne strefy intensywności drgań przyjęte do oceny

Table 2. Border zone vibration intensity accepted for evaluation

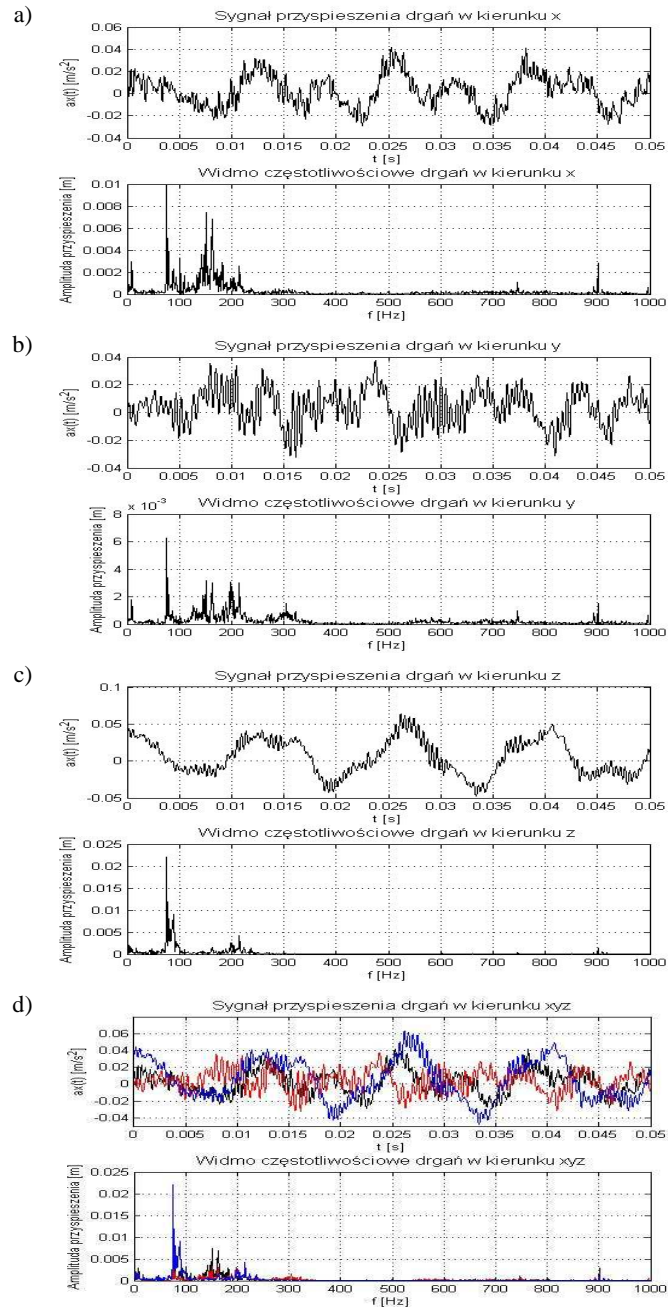
Ocena	Średniokwadratowa wartość prędkości drgań, mm/s	Klasa III
Dobry	1,8	A
Nadający się	4,5	B
Dopuszczalny	11,2	C
Niedopuszczalny	45	D

Drgania łożyska 5 w kierunku x wynoszą 0,3 mm/s, w kierunku y 0,2 mm/s, a w kierunku z 0,5 mm/s. Wartości drgań nie są duże i na podstawie przyjętych kryteriów (stref granicznych) stan techniczny w badanym zakresie ocenia się jako dobry. Wyniki pomiarów drgań łożysk 34 i 5, z zastosowaniem karty pomiarowej NI9234, przedstawiono na rys. 9 i 10. W wynikach widm częstotliwościowych można zaobserwować występowanie spodziewanych charakterystycznych prążków częstotliwości takich jak: 9 Hz dotyczących niewyważenia wirnika widoczne głównie na wykresach w kierunkach x i y oraz 90 Hz wywołane ruchem łopat wentylatora widoczne na wszystkich wykresach. Porównując wyniki z rys. 9 i 10 można zauważyć największe wartości amplitud przyspieszeń występujące w kierunku z, a najniższe w kierunku y dla zakresu 0 do 110 Hz. Natomiast dla zakresu 110 do 220 Hz na rys. 9 obserwuje się podobną tendencję jak opisano wyżej, a na rys. 10 największe wartości amplitud przyspieszeń występują w kierunku x. Analizując dalsze częstotliwości obserwuje się nieznaczne fluktuacje. Większe wartości drgań w kierunku z są prawdopodobnie związane z przewieszoną konstrukcją wentylatora (wirnik na końcu wału poza łożyskowaniem). Biorąc pod uwagę wyniki pomiarów drgań z metody szerokopasmowej oraz analizy widm częstotliwościowych można stwierdzić, że badane urządzenie generuje drgania o spodziewanych częstotliwościach ale wartości tych drgań nie są wysokie.



Rys. 9. Wyniki pomiarów drgań łożyska 34 ( $m/s^2$ ): a) kierunek x, b) kierunek y, c) kierunek z, d) zestawienie dla kierunków xyz

Fig. 9. The results of measurements of vibration of the bearing 34 ( $m/s^2$ ): a) x direction, b) y direction, c) z direction, d) summary for directions of the xyz



Rys. 10. Wyniki pomiarów drgań łożyska 5 ( $m/s^2$ ): a) kierunek x, b) kierunek y, c) kierunek z, d) zestawienie dla kierunków xyz

Fig. 10. The results of measurements of vibration of the bearing 5 ( $m/s^2$ ): a) x direction, b) y direction, c) z direction, d) summary for directions of the xyz

## 4. Wnioski

W pracy przedstawiono:

- Szerokopasmowy pomiar prędkości drgań, który pozwala ocenić zużycie wentylatora oraz zaplanować wykonanie remontu w dogodnym czasie.
- Pomiar widma częstotliwości, który daje więcej informacji w porównaniu z pomiarem szerokopasmowym drgań. Umożliwia określenie powodu wzrostu wartości drgań na podstawie charakterystycznych częstotliwości pracujących i ulegających zużyciu elementów urządzenia.
- Zastosowanie kart pomiarowych oraz oprogramowania (LabView, Matlab) umożliwiających dostosowanie systemu pomiarowego do specyficznych warunków pracy różnych urządzeń jak i wymagań zleceniodawcy.
- Zmierzone wartości drgań wentylatora i zaprezentowane wyniki, które nie są wartościami wysokimi mogącymi wywołać stany awaryjne. Wentylator ten należy do grupy ważnych urządzeń (zapewniający powietrze w wyrobiskach górniczych), z tego też powodu nie dopuszcza się do uszkodzenia wirnika.

## Literatura

- [1] Kucharski T.: Drgania mechaniczne Rozwiązywanie zagadnień z Mathcad-em, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2004.
- [2] Lewandowski J., Jakubowski J., Rozumek D.: Wpływ drgań naczyń wyciągowych na przebieg hamowania bezpieczeństwa maszyny wyciągowej, Przeg. Górniczy 6, 2016.
- [3] <http://www.pruftechnik.com.pl>, dostęp styczeń 2017.
- [4] Dwojak J., Rzepiela M.: Diagnostyka drganiowa stanu maszyn i urządzeń, Biuro Gamma, Warszawa, 2004.
- [5] Cempel Cz.: Wibroakustyka stosowana, PWN, Warszawa, 1989.
- [6] PN-ISO 10816-1, Drgania mechaniczne, Ocena drgań maszyn na podstawie pomiarów na częściach niewirujących, Wytuczne ogólne, PKN, 1998.

## ASSESSMENT OF THE DEGREE OF FAN CONSUMPTION BASED MEASUREMENT AND ANALYSIS OF BEARING VIBRATIONS

### Summary

The work presents selected methods of vibration measurement of rotating machines (motors, fan rotors, mechanical gears, etc.) used to evaluate the condition of machines operating in industrial conditions. Presented research apparatus used to record data for analysis. Based on measurements of the vibrations of radial fan bearings type WPK-3.9 operating in mining factory a vibration analysis was presented, which determined the technical condition of the fan.

**Keywords:** machine diagnostics, vibration, bearings, rotor, fans, gear

*Przestano do redakcji: 10.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Krzysztof KOZIOL<sup>1</sup>

## POMIARY IN-SITU JAKO SPOSÓB NA PROGNOZĘ OBCIĄŻENIA DYNAMICZNEGO BUDYNKÓW

Budując obiekty inżynierskie w strefie oddziaływań dynamicznych powinniśmy zabezpieczyć jego konstrukcję jak i ludzi w nim przebywających przed niepożądanymi wpływami drgań. Jednym z problemów w takich sytuacjach jest właściwy dobór obciążenia projektowanego budynku. W opracowaniu zaproponowano sposób doboru wymuszenia przy wykorzystaniu badań terenowych polegających na pomiarze wymuszenia na gruncie w miejscu lokalizacji przyszłego obiektu. Ze względu, na falowy charakter propagacji drgań na granicy ośrodków grunt - budynek mamy do czynienia z jej załamaniem się i odbiciem. Problem ten jest złożony, bowiem generowane przez „wymuszenie” drgania mają różnorodną strukturę amplitudowo-częstotliwościową. Tym nie mniej charakter rozkładu amplitudowo-częstotliwościowego niejednokrotnie jest cechą określającą rodzaj wymuszenia (tramwaju, pociągu metra, odstrzału –ilości i rodzaju ładunku,...). W opracowaniu przedstawiono przykład funkcji przejścia jaka należałoby zastosować na zmierzone drgania gruntu w celu określenia przyspieszenia fundamentów budynku. Funkcja ta opracowana została na podstawie analizy drgań spowodowanych przejazdem tramwajów dla obiektu o określonych charakterystykach dynamicznych. Dlatego projektowany budynek powinien mieć podobne do niego cechy dynamiczne.

**Słowa kluczowe:** wpływ na ludzi, wpływ na budynki, dynamika, pomiary drgań

### 1. Wprowadzenie

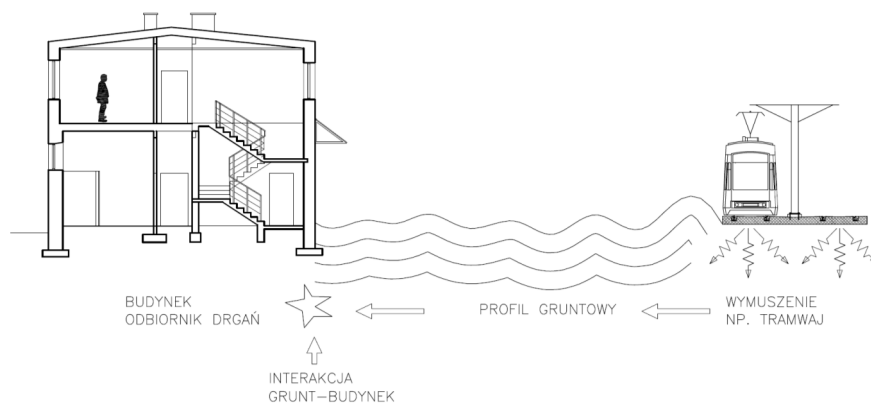
Każdy obiekt inżynierski narażony jest na różnorodne działania mające charakter „statyczny” lub dynamiczny. Obciążenia o charakterze statycznym w przeciwieństwie do działań dynamicznych są dość dobrze rozeznane, opisane i unormowane. Dla przypadku wymuszeń dynamicznych w szczególności tych dla których wymuszenie w sposób bezpośredni nie jest związane z obiektem należy rozpatrzyć drogę dojścia do niego obciążenia (rys. 1).

Poruszający się tramwaj poprzez układ warstw podtorza przekazuje energię na grunt z którego propaguje się ona w ośrodku gruntowym do osadzonego w nim budynku powodując ruch fundamentów a następnie całego obiektu.

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Politechnika Krakowska, 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, 12-628-23-91, koziol\_k@poczta.fm





Rys. 1. Droga propagacji drgań

Fig. 1. Way of vibrations propagation

Należy zauważyć, że ruch fundamentu i gruntu znajdującego się w jego bezpośrednim sąsiedztwie nie są takie same, a niejednokrotnie bardzo się od siebie różnią. Związane jest to zagadnieniem przejścia fali przez różne ośrodki.

W opracowaniu przedstawiam zależności pomiędzy przyśpieszeniem zarejestrowanym na gruncie i w sztywnym węźle konstrukcji na poziomie jej posadowienia rys. 2.



Rys. 2. Lokalizacja punktów pomiarowych przy budynku

Fig. 2. Location of measurement points to the building

Analizie poddano 4 budynki dwukondygnacyjne z lokalami usługowymi na parterze i mieszkalnymi na poddaszu. Obiekty te wykonane zostały w technologii tradycyjnej – ściany murowane, stropy żelbetowe, dach o konstrukcji dREW-

nianej. Budynki te zlokalizowane są w odległościach od 8 do 13 m od źródła drgań jakim jest tramwaj.

W celu uniknięcia interakcji pomiędzy falą odbitą od budynku a falą w gruncie spowodowaną wymuszeniem od tramwaju zdecydowano się na przesunięcie czujnika zlokalizowanego na gruncie w stosunku do budynku. Wielkość przesunięcia od obiektu (na rys.2 wymiar DB) czujników pomiarowych wynosi 6,0m. Wielkościami pomiarowymi w przypadku budynków jak i gruntu były przyspieszenia. Jednostką wykonująca pomiary było akredytowane Laboratorium Badania Odkształceń i Drgań Budowli Politechniki Krakowskiej. Badania wykonano zgodnie z następującą procedurą:

- kalibracja czujników,
- montaż czujników na budynku (rys.3,4),
- montaż toru pomiarowego na stanowisku,
- sprawdzenie toru pomiarowego,
- próbny pomiar w celu ustalenia nastaw aparatury,
- przeprowadzenie pomiaru – rejestracja przy pomocy analizatora LMS Scadas Mobile w wersji 16-kanałowej w punktach pomiarowych drgań wywołanych przez poszczególne zdarzenia (przejazdy tramwajów oraz różnych pojazdów samochodowych) wraz z odnotowaniem każdego zdarzenia w protokole pomiarowym,
- kalibracja sprawdzająca po zakończeniu pomiaru,
- demontaż toru pomiarowego (po zakończeniu rejestracji).

Pomiary drgań dokonano jednocześnie we wszystkich punktach pomiarowych przynależnych do wybranego budynku.

Montaż czujników w przypadku budynku (rys.3) dokonano za pomocą kostki przyklejonej w sposób sztywny do narożnika budynku gdzie zbiegają się dwie wzajemnie prostopadłe do siebie ściany - pozwoliło to na zniwelowanie wpływu odkształcenia elementu konstrukcji.

W przypadku czujników zlokalizowanych na gruncie zastosowano specjalną (rys.4) konstrukcję w postaci krzyża przymocowaną do gruntu za pomocą czterech kotew gruntowych (pręty fi 16 długości 25 cm). Jako czujników pomiarowych użyto akcelerometrów typu PCB 393B12 firmy PCB Piezotronics o czułości 10 V/g, zaś rejestracji dokonano przy pomocy analizatora LMS Scadas Mobile

Uzyskane w wyniku rejestracji 112 przebiegów czasowe przyspieszeń drgań gruntu i fundamentu budynku spowodowane przejazdem tramwajów poddano analizom numerycznym polegającym na analizie trójowej wartości maksymalnej amplitud w pasmach 1/3 oktaawowych i określenia ilościowej i jakościowej zmiany struktury sygnału po przejściu między fazami.



Rys. 3. Sposób mocowania czujników do konstrukcji

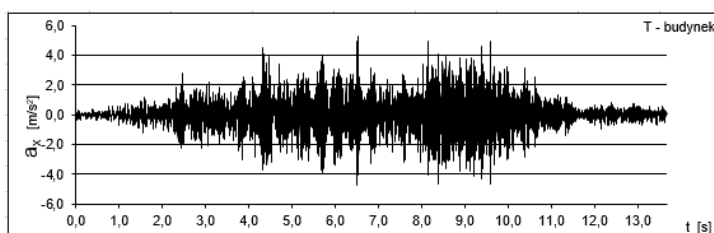
Fig. 3. The method of attaching sensors to the structure (cube)



Rys. 4. Sposób mocowania czujników na gruncie

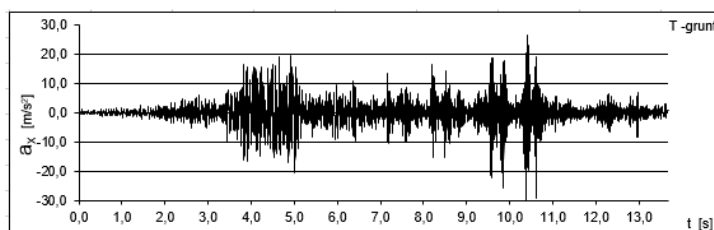
Fig. 4. The method of attaching sensors onto ground (cross)

Przykładowe zmiany amplitudy przemieszczeń gruntu i budynku w kierunku poziomym związanych z przejazdem tramwaju pokazano na rys. 5 i 6.



Rys. 5. Przyspieszenie poziome gruntu przy budynku przejazdu tramwaju E1-C3

Fig. 5. Horizontal ground acceleration at the building B2 for the tram E-C3 ride



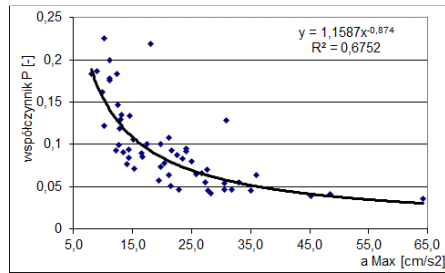
Rys. 6. Przyspieszenie poziome fundamentu budynku przejazdu tramwaju E1-C3

Fig. 6. Horizontal acceleration at the building for the tram E-C3 ride

## 2. Analiza wyników

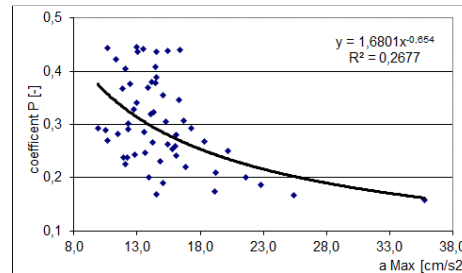
Analiza zależności pomiędzy wartościami szczytowymi przyspieszeń drgań gruntu a przyspieszeniami drgań fundamentu budynku uzależniono w opracowaniu od wielkości przyspieszenia gruntu obok budynku. W tym celu zdefinio-

wano bezwymiarowy współczynnik P jako stosunek przyspieszeń drgań budynku do przyspieszeń drgań gruntu. Wartość ta ma charakter nieliniowy (rys. 7, 8) przy czym współczynnik determinacji dopasowania krzywej ekwipotencjalnej jest zadawalający dla kierunku poziomego drgań ( $R^2=0,672$ ) i niezadawalający dla kierunku pionowego ( $R^2=0,2677$ ).



Rys. 7. Zmiana ekstremalnej amplitudy przyspieszeń dla kierunku poziomego

Fig. 7. Change of the maximum acceleration amplitude for the horizontal direction

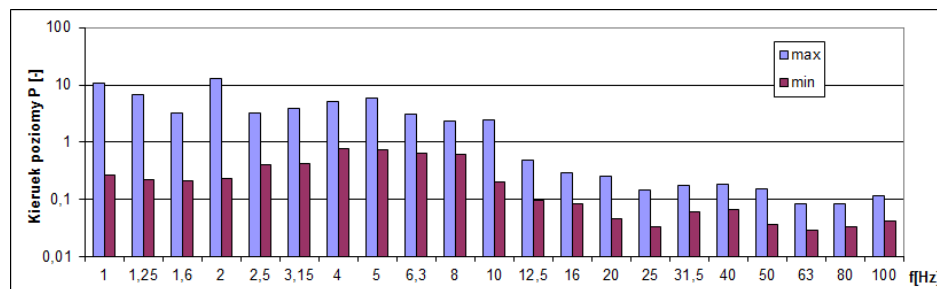


Rys. 8. Zmiana ekstremalnej amplitudy przyspieszeń dla pionowego

Fig. 8. Change of the maximum acceleration amplitude for the vertical direction

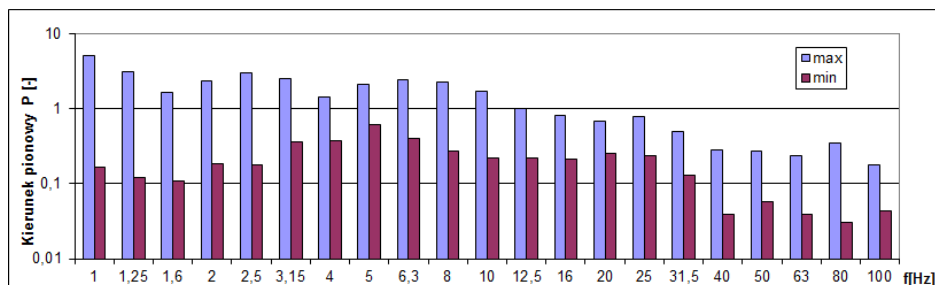
Należy też zwrócić jednak uwagę, że przy ustalaniu obciążenia budynku pomimo podobnego (dla każdego z analizowanych kierunków drgań) trendu zmian współczynnika P jest nieliniowy i maleje wraz ze wzrostem amplitudy przyspieszeń gruntu. Ze względu na niezadawalające dopasowanie współczynnika P w stosunku do ekstremalnych wartości amplitud przyspieszeń zdecydowano się na rozseparowanie odpowiedzi gruntu i budynku na pasma tercjowe 1/3 oktawowo w zakresie wartości maksymalnych amplitud w poszczególnych tercjach.

Wartość tego współczynnika oraz jego zmienności w poszczególnych pasmach tercjowych przedstawiono na rys. 9 i 10



Rys. 9. Zmiana współczynnika P dla kierunku poziomego w zależności od częstotliwości środkowej pasma

Fig. 9. Change of the P factor for the horizontal direction, depending on the center frequency band



Rys. 10. Zmiana współczynnika P dla kierunku pionowego w zależności od częstotliwości środkowej pasma

Fig. 10. Change of the P factor for the vertical direction, depending on the center frequency band

### 3. Wnioski

Okazuje się, że redukcji po przejściu przez granicę faz z gruntu na budynek nie zawsze podlegają wszystkie częstotliwości. Zarówno dla kierunku poziomego jak i pionowego w przypadku analizowanych budynków częstotliwości do 12,5Hz włącznie mogą ulec wzmocnieniu.

W tabelicy 1 pokazano współczynniki funkcji trendu zdefiniowanego parametru „P” (przyjętego w postaci potęgowej ( $y=\alpha \cdot a \text{Max}^\beta$ )) dla poszczególnych wartości środkowych filtrów 1/3 oktaawowych maksymalnych amplitud drgań sygnału w zależności od częstotliwości środkowej pasma tercji. Ostatni wiersz w tab. 1 dotyczy ekstremalnych amplitud jakie występowały w zarejestrowanym sygnale.

Tabela 1. Wartości współczynników funkcji trendu zmiany przejścia pomiędzy przyspieszeniami drgań gruntu i fundamentu budynku dla częstotliwości środkowych analiz 1/3 oktaawowych

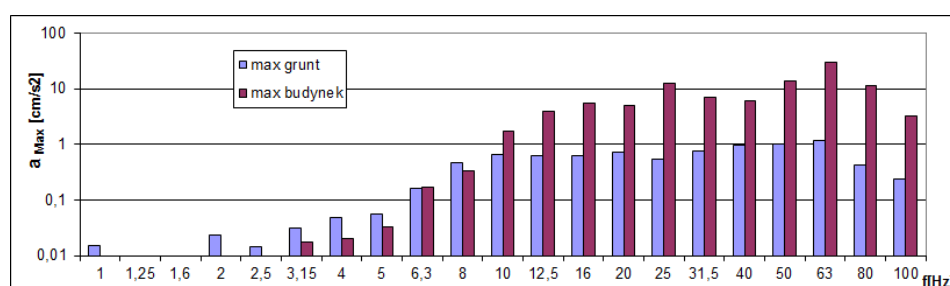
Table 1. Coefficients of the trend function for the transfer function between the ground and the foundation of the building accelerations vibration for the center frequency in the 1/3 octave analysis

f	kierunek wymuszenia			
	poziomy		pionowy	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
[Hz]	[cm/s <sup>2</sup> ]	[s <sup>2</sup> /cm]	[cm/s <sup>2</sup> ]	[s <sup>2</sup> /cm]
1	0,00	-0,91	0,13	-0,26
1,25	0,00	-1,14	0,05	-0,40
1,6	0,00	-1,14	0,09	-0,35
2	0,00	-0,96	0,14	-0,27
2,5	0,04	-0,57	0,23	-0,21
3,15	0,21	-0,34	0,25	-0,24
4	0,14	-0,50	0,24	-0,27
5	0,27	-0,40	0,47	-0,24
6,3	0,58	-0,22	0,70	-0,16
8	0,67	-0,13	0,60	-0,25
10	0,28	-0,35	0,40	-0,13

f	kierunek wymuszenia			
	poziomy		pionowy	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
[Hz]	[cm/s <sup>2</sup> ]	[s <sup>2</sup> /cm]	[cm/s <sup>2</sup> ]	[s <sup>2</sup> /cm]
12,5	0,20	-0,20	0,41	-0,10
16	0,27	-0,58	0,44	0,02
20	0,20	-0,40	0,57	-0,12
25	0,13	-0,34	0,59	-0,18
31,5	0,08	-0,03	0,34	-0,23
40	0,10	-0,17	0,14	-0,12
50	0,11	-0,37	0,17	-0,16
63	0,05	-0,12	0,12	-0,20
80	0,06	-0,07	0,13	-0,33
100	0,09	-0,32	0,10	-0,35
GLOB	1,16	-0,87	1,68	-0,65

W analizie obciążenia konstrukcji w celu właściwego dobrania obciążenia dynamicznego przekazywanego z gruntu na obiekt jest uwzględnienie charakteru zmian na granicy faz w dziedzinie częstotliwości. Dodatkowo zależność tę związać należy z amplitudą przyspieszenia.

Zróznicowanie w pasmach częstotliwościowych trendu funkcji przejścia wymuszenia pomiędzy gruntem i budynkiem prowadzi do sytuacji (rys. 11) w których ekstremalne przyspieszenia zarejestrowane na gruncie i fundamencie są przesunięte o względem siebie nawet o kilka oktaw.



Rys. 11. Analiza maksymalnych częstotliwości drgań dla sygnału z gruntu i z budynku dla poziomego kierunku poziomy

Fig. 11. Analysis of maximum vibration frequency of the signal from the ground and building for the horizontal direction

Obciążenie modelu projektowanego obiektu przyspieszeniem drgań gruntu zmierzonym w miejscu jego lokalizacji nie jest właściwym. Celowym jest wykonanie pomiarów drgań fundamentu budynku istniejącego (o zbliżonych cechach dynamicznych) i gruntu obok niego. Pozwoli to na znalezienie funkcji przejścia (w dziedzinie częstotliwości) pomiędzy gruntem a budynkiem. Funkcja ta może posłużyć do wyznaczenia obciążenia projektowanego budynku na podstawie pomiarów drgań gruntu w miejscu jego przyszłej lokalizacji. Jak wynika z przedstawionych analiz oszacowane wymuszenie charakteryzuje się dużym współczynnikiem niepewności.

## Literatura

- [1] PN-88/B-02171, Evaluation of vibrations influence on people in buildings, 1988.
- [2] BS 6472-1:2008, Guide to evaluation of human exposure to vibration in buildings, Part 1: Vibration sources other than blasting, 2008.
- [3] DIN 4150-2, Structural vibration, Part 2: Human exposure to vibration in buildings, 1999.
- [4] Stypuła K., Kozioł K., Prognozowanie wpływów dynamicznych na sąsiednie budynki na przykładzie tunelu kolejowego na lotnisko Okęcie w Warszawie. Projektowanie, budowa i utrzymanie infrastruktury w transporcie szynowym, INFRASZYN 2015.

- [5] ISO 2631-2, Guide to the evaluation of human exposure to whole body vibration. Part 2- Vibration in buildings, 2003, International Organization for Standardization.
- [6] Koziół K- The influence of vibration propagation from trams on building vibration caused by ground shaking, Proceedings of the Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing.
- [7] ISO 6897: Guidelines for the evaluation of the response of occupants of fixed structures, especially buildings and off-shore structures, to low frequency horizontal motion (0,063 to 1 Hz), 1984, International Organization for Standardization.

## **IN-SITU MEASUREMENTS AS A WAY TO FORECAST DYNAMIC LOAD ACTING ON BUILDINGS**

### **S u m m a r y**

Constructing civil structures located within the area of dynamic actions engineers should protect its structure as well as people staying inside from adverse vibration influences. One of the key problems in these situations is the proper selection of load acting on the designed building. Author proposes a selection method of extortion using field testing involving the measurement of vibrations on the ground at the site of the future facility. Due to wave nature of vibration propagation at the border between ground and structure we are dealing with collapse and reflection. The problem is complex because vibrations generated by „excitation” have various amplitude-frequency structure. Nevertheless the nature of the amplitude-frequency spectrum is often a feature defining type of excitation (tram, subway train, blasting explosive materials, etc.). The study shows an example of the transfer function, which should be impose on measured ground vibrations in order to determine the load on the foundations of the building. This function has been developed based on the analysis of vibration caused by passing trams acting on structure with specific dynamic characteristics. Therefore the designed building should be characterized by similar dynamic properties.

**Keywords:** impact on people, the impact on buildings, dynamics, time analysis

*Przesłano do redakcji: 28.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Danuta BRYJA<sup>1</sup>  
Adam POPIOŁEK<sup>2</sup>

## ANALIZA DRGAŃ WIESZARA CIĘGNOWEGO JAKO MODELU KOLEJOWEJ SIECI TRAKCYJNEJ OBCIĄŻONEJ RUCHEM PANTOGRAFÓW

Zwiększenie prędkości jazdy pociągów i rozwój kolei dużych prędkości spowodowały wyraźny wzrost zainteresowania problemami dynamiki kolejowych sieci trakcyjnych. W ostatnich latach pojawiło się w literaturze zagranicznej wiele nowych publikacji przedstawiających zaawansowane numerycznie metody symulacji drgań górnej sieci jezdnej i pantografów. W Polsce temat ten jest stosunkowo mało znany, stąd jednym z celów pracy jest przegląd literatury na temat metod modelowania sieci trakcyjnych. Celem zasadniczym jest przedstawienie oryginalnej metody symulacji drgań sprzężonego układu sieć trakcyjna – pantograf oraz zastosowanie metody do analizy drgań przykładowej sieci trakcyjnej. Metoda bazuje na modelu obliczeniowym przedstawionym przez autorów w odrębnej pracy, sformułowanym na podstawie teorii drgań wiotkiego ciężna z ciągłym rozkładem masy. Górna sieć jezdna jest traktowana jako wstępnie napięty, wieloprzęsłowy wieszar cięgowy złożony z liny nośnej o niepomijalnym zwisie w przęsłach i przewodu jezdnej podwieszony za pomocą wiotkich wieszaków nie przenoszących ściskania. Sieć trakcyjna jest obciążona dwoma pantografami poruszającymi się ze stałą prędkością. Pantografy są układami dynamicznymi o dwóch stopniach swobody. Równania ruchu wyprowadzone metodą Lagrange'a – Ritz'a zostały w tej pracy przekształcone poprzez wyodrębnienie nieliniowych sił, które kompensują wpływ wieszaków ściskanych. Opisano metodę rozwiązania nieliniowych równań ruchu i wyjaśniono sens fizyczny stowarzyszonych z nimi równań liniowych. Przedstawiono przykład symulacji drgań sieci złożonej z dziesięciu przęseł, świadczący o efektywności i możliwościach obliczeniowych prezentowanej metody oraz zbadano wpływ tłumienia w materiale liny nośnej i przewodu jezdnej na charakterystyki dynamiczne badanej sieci.

**Słowa kluczowe:** symulacja drgań, drgania liniowe, drgania nieliniowe, siła naciśku stykowego, drgania przewodu jezdnej, wpływ tłumienia

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Danuta Bryja, Politechnika Wroclawska, Katedra Mostów i Kolei, Wybrzeże St. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wroclaw; tel. 713202332; danuta.bryja@pwr.edu.pl

<sup>2</sup> Adam Popiołek, Politechnika Wroclawska, Katedra Mostów i Kolei, Wybrzeże St. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wroclaw; tel. 713204469; adam.popiolek@pwr.edu.pl



## 1. Wprowadzenie

Kolejowa sieć trakcyjna, a mówiąc ściślej, górna sieć jezdna stała się obiektem zainteresowań specjalistów z dziedziny dynamiki konstrukcji w związku ze wzrostem prędkości jazdy pociągów i pojawieniem się kolei dużych prędkości. Obecnie, silnym bodźcem rozwoju badań problemów dynamiki sieci jezdnych jest prawo wdrażające na obszarze Unii Europejskiej zasady interoperacyjności w zakresie rynku kolejowego [1]. Jednym z jego wymagań jest ocena tzw. charakterystyki dynamicznej górnej sieci jezdnej. Ocena ta odbywa się na podstawie analizy zmian siły nacisku stykowego (nacisku ślizgacza pantografu na przewód jezdny) oraz pionowych drgań przewodu jezdnego na wspornikach sieci. Dodatkowo analizuje się jakość odbioru prądu, którego miarą jest tzw. procent utraty kontaktu, utożsamiany z udziałem czasu, w którym siła nacisku stykowego jest ujemna – w całkowitym czasie przejazdu pantografu przez badany odcinek sieci.

Analizowane wielkości dynamiczne mogą być wyznaczone eksperymentalnie lub za pomocą symulacji numerycznych. Wobec dużych kosztów i nakładu pracy niezbędnych do wykonania badań eksperymentalnych, symulacje numeryczne są korzystniejsze w zastosowaniach inżynierskich, gdy zachodzi konieczność częstego wykonywania ocen parametrów sieci. W Polsce, podstawowym problemem w tym zakresie jest ograniczony dostęp do odpowiedniego oprogramowania. Z tego powodu, w ośrodku wrocławskim podjęto badania ukierunkowane na poszukiwania efektywnych modeli numerycznych i algorytmów obliczeniowych, które dawałyby wiarygodne wyniki przy akceptowalnym czasie wykonywania symulacji. W pierwszym etapie badań przeprowadzono obszernie studia literaturowe, a następnie, bazując na doświadczeniach innych autorów, zaproponowano w pracy [2] oryginalny model numeryczny górnej sieci jezdnej, traktowanej jako złożony wieszak ciągnowy obciążony przejazdem dwóch pantografów, przy czym każdy z nich jest modelowany układem o dwóch dynamicznych stopniach swobody. Zasadniczym celem niniejszej pracy jest:

- przedstawienie metody symulacji drgań sieci trakcyjnej, spowodowanych ruchem pantografów,
- zastosowanie metody do analizy drgań przykładowej sieci, w aspekcie oceny wpływu tłumienia materiałowego w linii nośnej i przewodzie jezdnym.

Treść merytoryczną pracy poprzedzono przeglądem literatury na temat metod modelowania i symulacji drgań kolejowych sieci trakcyjnych.

## 2. Przegląd metod modelowania i symulacji drgań układu pantograf – sieć trakcyjna

W literaturze światowej można znaleźć opisy wielu badań w zakresie dynamiki górnej sieci jezdnej, w tym sformułowania różnych modeli obliczeniowych układu pantograf – sieć trakcyjna. Obszerny przegląd badań prowadzonych w tym zakresie do 1997 roku przedstawili Poetsch i in. [3]. Stwierdzili oni

między innymi, że istotne znaczenie ma opis sposobu rozchodzenia się fali drgań w przewodzie jezdnym, zależny od przyjętej metody modelowania. Kluczową rolę odgrywa tu sztywność giętna przewodu jezdny, która jest uwzględniana w modelu prętowym, a nie występuje w modelu ciągnowym. Wpływa ona istotnie na wyniki analiz zjawisk wysokoczęstotliwościowych, nie ma natomiast dużego wpływu na drgania w zakresie niskich częstotliwości. W pracy [3] poświęcono wiele uwagi kwestii modelowania pantografów. Przedstawiono zarówno uproszczone modele dwuwymiarowe jak i bogatsze modele trójwymiarowe, w odniesieniu do rzeczywistych konstrukcji odbieraków prądowych.

Współcześnie stosowane są trzy grupy metod modelowania układu pantograf – sieć trakcyjna. Pierwsza z nich to modele uproszczone, przeznaczone do analizy drgań pantografów, pomijające wzajemne oddziaływania dynamiczne sieci trakcyjnej i pantografu. Przykładem tego podejścia jest praca Wu i Brennana [4], którzy zaproponowali model o jednym dynamicznym stopniu swobody, w którym element masowy odpowiada masie całego pantografu a sieć jezdna sprowadzona jest do więzi sprężystej o zmiennej sztywności. Sztywność więzi zmienia się w czasie symulując ruch pantografu wzdłuż sieci. Jest wyznaczana w sposób statyczny, z wykorzystaniem metody elementów skończonych do modelowania sieci jezdnej. W kolejnej pracy [5], Wu i Brennan rozbudowali model zastępując sztywność statyczną więzi sprężystej tzw. sztywnością dynamiczną, która wyznaczana jest na podstawie analizy drgań wieloprzęsłowej struny o ciągłym rozkładzie masy, stałym naciągu i podparciu punktowym za pomocą więzi sprężystych. Struna obciążona jest pojedynczą siłą ruchomą o stałej wartości. Park i in. [6] zastosowali model odbieraka o trzech stopniach swobody, zastępując sieć trakcyjną więzią sprężystą o zmiennej sztywności, podobnie jak w pracach Wu i Brennana. Sztywność więzi wyznaczyli metodą elementów skończonych, w węzłach siatki podziału przewodu jezdny na elementy, a następnie przybliżyli rozkład sztywności funkcją trygonometryczną. Za model sieci trakcyjnej przyjęli układ dwóch belek reprezentujących linę nośną i przewód jezdny, połączonych więziami sprężystymi zastępującymi wieszaki. W pracy [7] wprowadzono uproszczony model dynamiczny sieci trakcyjnej w postaci oscylatora lepko-sprężystego ze zmienną sztywnością oraz tłumieniem, które mają symulować parametry sieci zmieniające się wraz z ruchem pantografu. Pantograf jest modelowany układem o dwóch dynamicznych stopniach swobody.

Druga grupa modeli układu pantograf – sieć trakcyjna to zaawansowane numerycznie modele sieci trakcyjnej jako układu z ciągłym rozkładem masy oraz sprzężonego z nim pantografu w postaci układu dyskretnego. Tego typu model zastosowali m.in. Arnold i Simeon [8], przyjmując, że lina nośna sieci jezdnej jest ciągnem a przewód jezdny belką Eulera. Wieszaki potraktowali jako wiotkie elementy typu przewodowego, z uwzględnieniem nieliniowego zachowania polegającego na nieprzenoszeniu ściskania. Model pantografu przyjęto w postaci układu o dwóch stopniach swobody, w którym elementy masowe odpowiadają masom ślizgacza oraz ramy przegubowej. Częstkowe różniczkowe

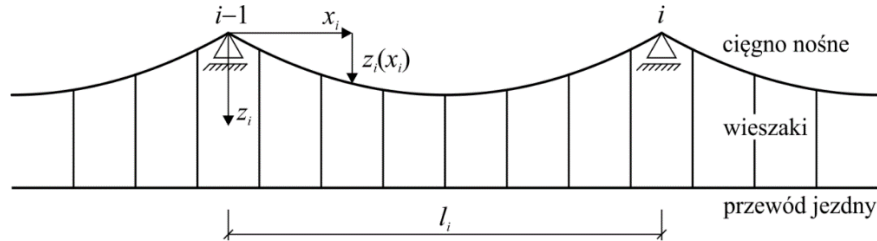
równania ruchu rozwiązywali numerycznie – metodą MOL (metodą linii) z dyskretyzacją przestrzenną różnicami skończonymi. Podobne podejście zastosował Cho [9] przyjmując model sieci trakcyjnej złożony z dwóch belek Eulera obciążonych stałymi siłami poziomymi, które symulują wstępny naciąg sieci. Wieszaki łączące przewód jezdny z liną nośną są modelowane więziami sprężysto-tłumiącymi. W każdym kroku symulacji sprawdzano wartości sił wewnętrznych w wieszakach, po czym zerowano składniki macierzy sztywności i tłumienia, odpowiadające wieszakom ściskanym.

Trzecia grupa metod modelowania układu sieć trakcyjna – pantograf wykorzystuje metodę symulacji równoległej. Polega ona na zastosowaniu oddzielnych programów obliczeniowych do symulacji drgań sieci jezdnej i pantografu oraz określonego schematu komunikacji pomiędzy nimi. Sieć jest modelowana metodą elementów skończonych, a pantograf jest modelem dyskretnym o wielu stopniach swobody. Program odpowiadający za symulację drgań pantografu przekazuje w każdym kroku obliczeniowym dane na temat pozycji oraz parametrów drgań ślizgacza do programu symulującego drgania sieci. W tej części oprogramowania wyznaczana jest siła nacisku stykowego, która następnie przekazywana jest zwrótnie do modelu pantografu. Metoda ta wykorzystana została m.in. przez Rauter'a i in. w pracy [10]. Pombo i Ambrósio [11] zastosowali ją do analizy wpływu wiatru i nierówności toru na dynamiczną siłę interakcji między pantografem a siecią. Drgania nadwozia pojazdu, wyznaczone za pomocą zaawansowanego modelu układu tor – pojazd, uwzględniono jako wymuszenie kinematyczne drgań pantografu. Do modelowania wszystkich elementów górnej sieci jezdnej (liny nośnej, przewodu jezdnego i wieszaków) zastosowano elementy prętowe typu Eulera. W każdym kroku symulacji drgań przeprowadzano korektę równań ruchu poprzez wprowadzenie sił kompensacyjnych powodujących wyłączenie wieszaków ściskanych. Artykuł Pombo i Ambrósio [11] jest jedną z wielu prac, w których badano wpływ obciążenia dwoma pantografami.

Metoda symulacji równoległej umożliwia szczegółowe modelowanie pantografów w zaawansowanym oprogramowaniu do analizy układów dyskretnych, co pozwala na analizy w kierunku optymalizacji konstrukcji odbieraków [12].

### **3. Metoda symulacji numerycznej drgań sieci trakcyjnej**

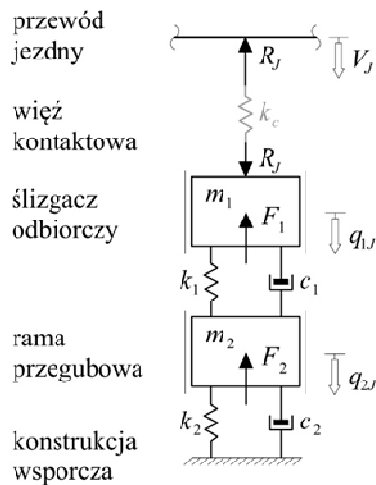
Przedstawiana w artykule metoda symulacji drgań sieci trakcyjnej bazuje na modelu obliczeniowym układu sieć trakcyjna – pantograf, sformułowanym w pracy [2]. Model ten odnosi się do górnej sieci jezdnej typu łańcuchowego, pokazanej schematycznie na rys.1. Sieć składa się z wieloprzęsłowej, wstępnie napiętej liny nośnej o niepomijalnym zwisie w przęsłach oraz wstępnie napiętego przewodu jezdnego, podwieszono do liny za pośrednictwem wieszaków typu przewodowego, czyli nie przenoszących ściskania. Lina nośna jest zakotwiona na końcach wieloprzęsłowego odcinka naprężania sieci, podobnie jak przewód jezdny.



Rys. 1. Schemat górnej sieci jezdnej kolejowej trakcji elektrycznej

Fig. 1. Scheme of a railway overhead wire system

Specyficzną i oryginalną cechą modelu obliczeniowego zaproponowanego w pracy [2] jest konsekwentne zastosowanie teorii drgań ciągłego ciągnia do modelowania górnej sieci jezdnej jako złożonego wieszara ciągnowego. Modelem fizycznym liny nośnej jest liniowo-sprężyste ciągnie wiotkie o ciągłym rozkładzie masy, oparte przesuwne na sztywnych podporach. Modelem przewodu jezdnego jest liniowo-sprężysta struna o masie rozłożonej w sposób ciągły, podwieszona do wieloprzęsłowego ciągnia za pomocą więzi sprężystych o jednakowych sztywnościach – niezerowych, jeśli więzi są rozciągane i zerowych przy ściskaniu. Sieć jezdna jest obciążona dwoma pantografami poruszającymi się ze stałą prędkością.



Rys. 2. Model dynamiczny pantografu

Fig. 2. Dynamic model of the pantograph

Na rys. 2 przedstawiono model dynamiczny pantografu przyjęty w postaci układu dyskretnego o dwóch stopniach swobody, który składa się z dwóch mas reprezentujących ślizgacz odbiorczy i ramę przegubową. Masy są połączone ze sobą i z konstrukcją wsporcą (pojazdem) układem więzi sprężystych i tłumiących. Dodatkowo wprowadzono tzw. sprężynę kontaktową między ślizgaczem odbiorczym i punktem styku nakładki stykowej z przewodem jezdny. Zmienna w czasie reakcja więzi kontaktowej  $R_J(t)$  jest równocześnie siłą nacisku stykowego ślizgacza, złożoną ze stałej siły statycznej i dynamicznego przyrostu spowodowanego drganiami sieci jezdnej i pantografu w trakcie jego przejazdu wzdłuż analizowanego odcinka sieci. Indeks  $J = I, II$  oznacza

tu numer pantografu. Pokazane na rys. 2 siły  $F_1$  i  $F_2$ , wynikające z działania urządzenia podnoszącego pantograf, tworzą łącznie statyczną siłę nacisku stykowego ślizgacza na przewód jezdny.

Równania ruchu przyjętego modelu układu sieć trakcyjna – pantografy zostały wyprowadzone w pracy [2] z zastosowaniem metody aproksymacyjnej Lagrange’a – Ritz’a. Przedstawiono je w następującej postaci blokowo-macierzowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_c(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_p(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_c(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_p(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{cc} + \hat{\mathbf{K}}_{cc}) & -\hat{\mathbf{K}}_{cp} & \mathbf{0} \\ -\hat{\mathbf{K}}_{pc} & (\mathbf{K}_{pp} + \hat{\mathbf{K}}_{pp} + \tilde{\mathbf{K}}_{pp}(t)) & -\tilde{\mathbf{K}}_{po}(t) \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}}_{op}(t) & \mathbf{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \mathbf{q}_p(t) \\ \mathbf{q}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_p(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1)$$

która sprowadza się do powszechnie znanego równania macierzowego

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2)$$

stanowiącego układ równań różniczkowych zwyczajnych II rzędu o zmiennych w czasie współczynnikach. Warto zauważyć, że dzięki zastosowaniu więzi kontaktowej współczynniki zależne od czasu są zgrupowane tylko w niektórych blokach macierzy sztywności, oznaczonych w równaniu (1) nadpisaną tyldą. Bloki oznaczone daszką zależą od sztywności więzi sprężystych (wieszaków) łączących linię nośną z przewodem jezdny. Wszystkie oznaczenia użyte w równaniu (1) a także definicje bloków macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności oraz wektora wzbudzenia można odtworzyć na podstawie pracy [2].

Zasadniczym elementem metody symulacji drgań jest rozwiązanie równania ruchu (2) o strukturze blokowej (1). Równanie to jest w istocie nieliniowe, ponieważ sztywności wieszaków zależą od stanu przemieszczenia wieszaka ciągnowego. Zależność ta nie ma postaci jawnej, bowiem sztywność każdego wieszaka  $k_w$  jest zdefiniowana warunkowo relacjami

$$k_w = \begin{cases} k & \text{gdy } w_{\text{liny}} \leq v_{\text{przewodu}} \\ 0 & \text{gdy } w_{\text{liny}} > v_{\text{przewodu}} \end{cases} \quad (3)$$

gdzie symbolami  $w_{\text{liny}}$  i  $v_{\text{przewodu}}$  oznaczono zależne od czasu pionowe przemieszczenie linii nośnej i przewodu jezdny w miejscu mocowania wieszaka.

Aby sformułować metodę rozwiązania nieliniowego równania ruchu (2), rozdzielono macierz sztywności  $\mathbf{K}(t)$  na cztery składniki według wzoru

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_{\text{const}} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{const}} - \hat{\mathbf{K}}_{\text{ws}}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_p) + \tilde{\mathbf{K}}(t) \quad (4)$$

gdzie, jak wynika ze struktury równania (1), stałe składniki macierzy sztywności

mają postać:  $\mathbf{K}_{\text{const}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{cc}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{pp}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{oo}} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{const}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{cc}} & -\hat{\mathbf{K}}_{\text{cp}} & \mathbf{0} \\ -\hat{\mathbf{K}}_{\text{pc}} & \hat{\mathbf{K}}_{\text{pp}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , a skład-

nik zależy od czasu:  $\tilde{\mathbf{K}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{pp}}(t) & -\tilde{\mathbf{K}}_{\text{po}}(t) \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{K}}_{\text{op}}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ . Stały składnik  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{const}}$

wynika z niezerowej sztywności wyjściowej  $k$  wszystkich wieszaków, natomiast składnik  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{ws}}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_p)$ , chociaż ma ogólną strukturę identyczną jak  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{const}}$ , to dotyczy wyłącznie wieszaków ściskanych – kompensuje (zeruje) ich wpływ w globalnej macierzy sztywności, co jest równoznaczne z przyjęciem, że sztywności wieszaków ściskanych są zerowe. Składnik kompensacyjny macierzy sztywności,  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{ws}}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_p)$ , jest zależny od współrzędnych uogólnionych określających stan przemieszczenia liny nośnej ( $\mathbf{q}_c$ ) i przewodu jezdnego ( $\mathbf{q}_p$ ), ponieważ są one wykorzystywane w każdej chwili  $t$  do identyfikacji wieszaków ściskanych.

Po podstawieniu relacji (4) i przeniesieniu składnika nieliniowego na prawą stronę, równanie (2) przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}_{\text{const}} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{const}} + \tilde{\mathbf{K}}(t)]\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) + \hat{\mathbf{K}}_{\text{ws}}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_p)\mathbf{q}(t) \quad (5)$$

Nieliniowy składnik równania (5) opisuje siły kompensujące wpływ wieszaków ściskanych, zależne od współrzędnych uogólnionych, co można zapisać wzorem

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{K}}_{\text{ws}}(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_p)\mathbf{q}(t) \quad (6)$$

Łatwo zauważyć, że pominięcie tych sił prowadzi do liniowego równania ruchu. Równanie liniowe opisuje sprzężone drgania pantografów i wieszara ciągnowego, w którym wieszaki są więziami liniowo-sprężystymi o stałej niezerowej sztywności  $k$ , przenoszącymi zarówno rozciąganie jak i ściskanie.

Rozwiązanie układu równań ruchu (5) uzyskuje się numerycznie. W pracy zastosowano bezwarunkowo stabilny wariant metody Newmarka, przy czym typowy schemat rekurencyjny metody uzupełniono w każdym kroku całkowania procedurą iteracyjną prowadzącą do wyznaczenia wektora sił nieliniowych  $\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{q})$  z zadaną dokładnością.

Na podstawie rozwiązania  $\mathbf{q}(t)$  obliczanego sukcesywnie w kolejnych punktach czasowych wynikających z przyjętego kroku całkowania  $h$ , wyznacza się przebiegi drgań w dowolnym punkcie liny nośnej i przewodu jezdnego oraz drgań pantografów a także przebiegi dynamicznych zmian siły nacisku stykowego. Odpowiednie formuły obliczeniowe można znaleźć w pracy [2].

#### 4. Symulacja drgań przykładowej sieci trakcyjnej

Aby zademonstrować możliwości obliczeniowe opisanej metody symulacyjnej, poddano analizie przykładową sieć jezdnią złożoną z dziesięciu przęseł, obciążoną ruchem jednego pantografu. Charakterystyki geometryczne i materiałowe elementów sieci trakcyjnej oraz parametry pantografu podano w tab. 1. Dane te przyjęto na podstawie specyfikacji tzw. modelu odniesienia, opisanego w załączniku A normy EN 50318: 2002 [13], która określa wymagania jakie powinna spełniać metoda symulacji oddziaływania dynamicznego pomiędzy pantografem a górną siecią jezdnią.

Na podstawie danych sieci obliczono podstawową częstość własną liny nośnej ( $\omega_c = 6,36$  rad/s) i przewodu jezdnego ( $\omega_p = 0,64$  rad/s), traktowanych niezależnie. Uwzględniono tłumienie w materiale liny nośnej i przewodu jezdnego, przyjmując, że  $\mathbf{C}_{cc} = \kappa_c \mathbf{K}_{cc}$  oraz  $\mathbf{C}_{pp} = \kappa_p \mathbf{K}_{pp}$  (por. równanie (1)), przy czym czasy retardacji obliczono według relacji:  $\kappa_c = 2\alpha_c / \omega_c$ ,  $\kappa_p = 2\alpha_p / \omega_p$ . Wartości liczb tłumienia  $\alpha_c$  i  $\alpha_p$  wariantowano w granicach od 0 do 5%.

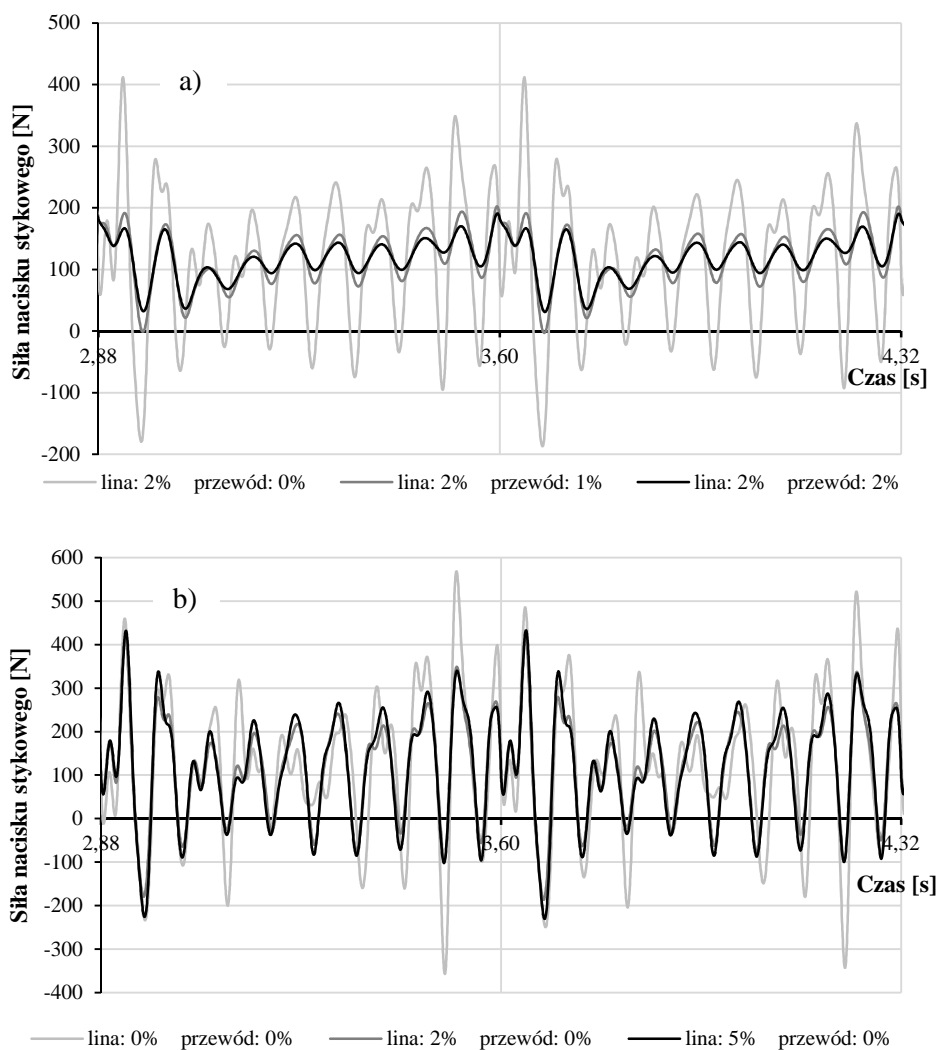
Tabela 1. Charakterystyki geometryczne i materiałowe elementów sieci trakcyjnej oraz parametry pantografów, na podstawie [13]

Table 1. Geometrical and material properties of the railway overhead wire system and pantograph parameters, based on [13]

Masa jednostkowa liny nośnej	1,07 kg/m	Prędkość pantografu	300 km/h
Naciąg liny nośnej	16 kN	Masa ślizgacza pantografu	7,2 kg
Sztywność osiowa liny nośnej	12 MN	Masa ramy pantografu	15,0 kg
Masa jednostkowa przewodu jezdnego	1,35 kg/m	Siła nacisku statycznego pantografu	120 N
Naciąg przewodu jezdnego	20 kN	Sztywność górnej sprężyny pantografu ( $k_1$ )	4 200 N/m
Sztywność wieszaka przy rozciąganiu	100 kN/m	Sztywność dolnej sprężyny pantografu ( $k_2$ )	50 N/m
Długość przęsła	60 m	Parametr górnego tłumika pantografu ( $c_1$ )	10 Ns/m
Liczba przęseł	10	Parametr dolnego tłumika pantografu ( $c_2$ )	90 Ns/m
Liczba wieszaków w przęsle	9	Sztywność sprężyny kontaktowej ( $k_c$ )	50 kN/m

Obliczenia, których wyniki pokazano w pracy, dotyczą głównie problemu liniowego, czyli analizowany jest wieszak ciągnowy z wieszakami przenoszącymi zarówno rozciąganie jak i ściskanie. Rozwiązania zagadnienia nieliniowego

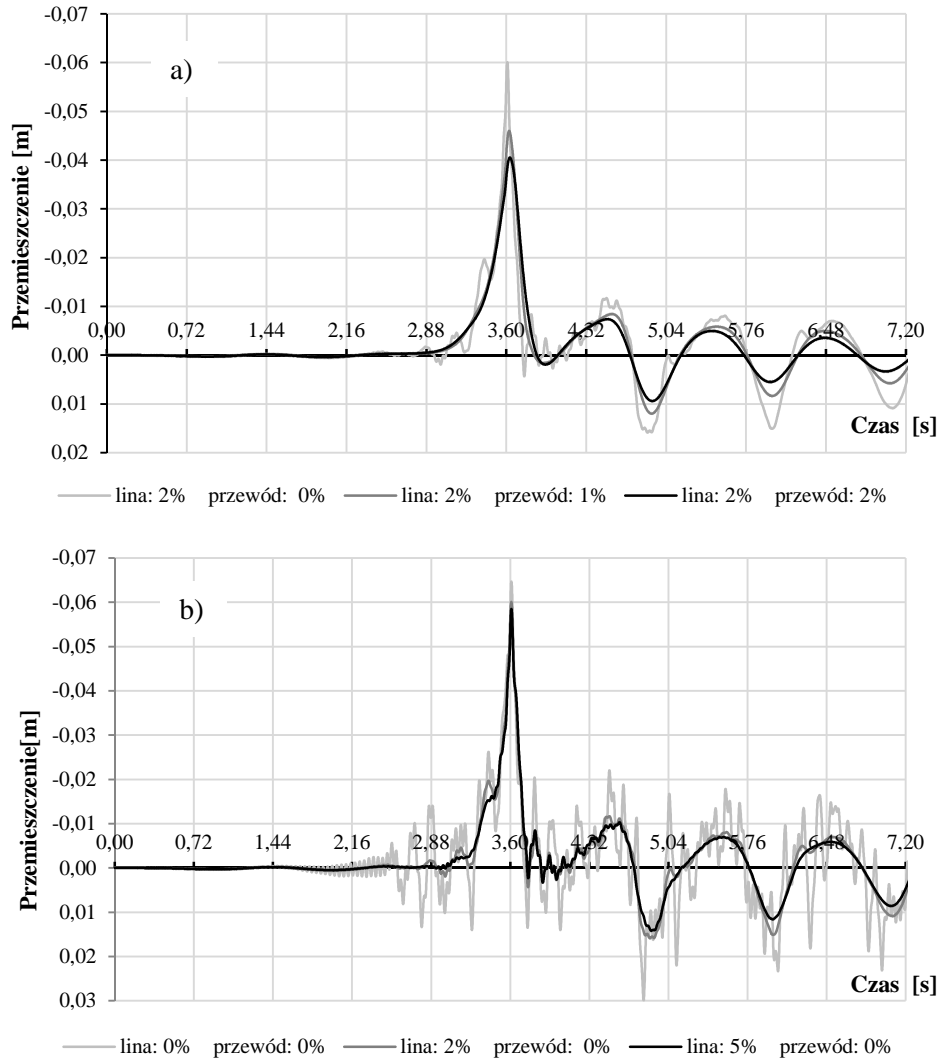
będą obszernie analizowane w odrębnej publikacji, natomiast w tej pracy będzie pokazany poglądowy przykład porównania rozwiązań nieliniowych z liniowymi.



Rys. 3. Zmiany siły nacisku stykowego w czasie przejazdu pantografu przez piąte i szóste przęsło, w zależności od liczby tłumienia: a) przewodu jezdny, przy stałej liczbie tłumienia liny nośnej, b) liny nośnej, przy pominięciu tłumienia w przewodzie jezdny

Fig. 3. In-time variation of the contact force when the pantograph moves along the fifth and sixth span, depending on damping coefficient to critical of: a) the contact wire (damping in carrying rope is constant), b) the carrying rope (damping in contact wire is neglected)





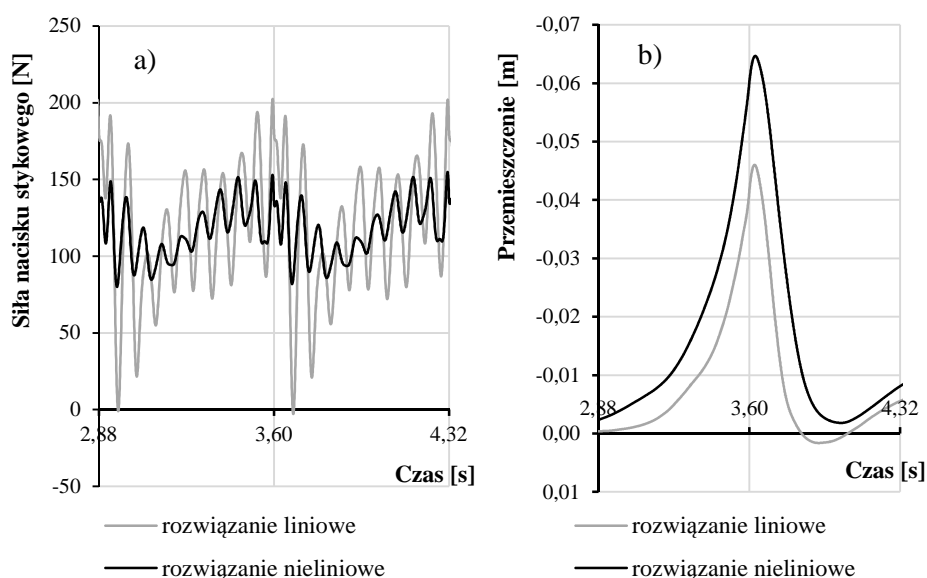
Rys. 4. Drgania przewodu jezdnego na środkowym wsporniku sieci (między przęsłem piątym i szóstym), w zależności od liczby tłumienia: a) przewodu jezdnego, przy stałej liczbie tłumienia liny nośnej, b) liny nośnej, przy pominięciu tłumienia w przewodzie jezdnym

Fig. 4. Vibrations of the contact wire at the central support of overhead wire system (between the fifth and sixth span), depending on damping coefficient to critical of: a) the contact wire (damping in carrying rope is constant), b) the carrying rope (damping in contact wire is neglected)

Przed przystąpieniem do właściwych obliczeń mających na celu analizę wpływu tłumienia w materiale liny nośnej i przewodu jezdnego, wykonano testy algorytmu obliczeniowego polegające na analizie zbieżności rozwiązań. Warian-

towano liczbę funkcji bazowych ( $n$ ) zastosowanych do aproksymacji przemieszczeń pionowych i poziomych liny nośnej i pionowych przemieszczeń przewodu jezdnego, w obrębie jednego przęsła (łącznie  $3n$ ). Całkowita liczba funkcji aproksymacyjnych (sinusowych) wynosi  $3n \times$  liczba przęseł. Jest to równocześnie liczba współrzędnych uogólnionych określających stan przemieszczenia sieci trakcyjnej. W obliczeniach wariantowano też długość kroku numerycznego całkowania równań ruchu, przyjmując kolejno: 0,001 s, 0,0001 s i 0,00001 s. Na podstawie tych testów przyjęto do obliczeń krok 0,001 s, przy liczbie funkcji bazowych  $n = 20$ .

Na rys. 3 przedstawiono fragmenty przebiegów zmian w czasie siły nacisku stykowego, odpowiadające przejazdowi pantografu przez przęsło piąte i szóste. Przebiegi na rys. 3a wygenerowano przy różnych poziomach tłumienia w materiale przewodu jezdnego, przy stałym tłumieniu w lince nośnej  $\alpha_c = 2\%$ . Natomiast na rys. 3b jest wariantowane tłumienie w lince nośnej przy pominięciu tłumienia w przewodzie jezdnym. Analogiczne rozwiązania, ale dotyczące drgań przewodu jezdnego na wsporniku sieci, pokazano na rys. 4, na którym ujemnie jest znakowane uniesienie przewodu. Przedstawione symulacje drgań przewodu obejmują całkowity czas przejazdu pantografu przez sieć jezdnią i odnoszą się do wspornika środkowego, znajdującego się między przęsłem piątym i szóstym.



Rys. 5. Zmiany siły nacisku stykowego (a) i uniesienia przewodu jezdnego na środkowym wsporniku sieci (b), w czasie przejazdu pantografu przez dwa środkowe przęsła, w zależności od sposobu modelowania wieszaków

Fig. 5. In-time variation of the contact force (a) and contact wire uplift at central support (b), when the pantograph moves along two central spans, depending on the method of modeling droppers

Na ostatnim rysunku (rys. 5) porównano przebiegi czasowe zmian siły nacisku stykowego w piątym i szóstym prześle oraz uniesienia przewodu jezdnego na środkowym wsporniku badanej sekcji sieci, wyznaczone w zagadnieniu liniowym i nieliniowym, tzn. gdy wieszaki są typu prętowego (przesyłają siły rozciągające i ściskające) i typu przewodowego (przesyłają tylko rozciąganie). Obliczenia dotyczą przypadku, gdy  $\alpha_c = 2\%$  i  $\alpha_p = 1\%$ .

## 5. Analiza wyników i podsumowanie

Analiza wykresów przedstawionych na rys. 3 i 4 prowadzi do kilku interesujących wniosków. Pierwszy z nich dotyczy wpływu tłumienia na siłę nacisku stykowego (siłę kontaktową). Widać, że tłumienie związane z materiałem liny nośnej, nawet rzędu 5%, ma mały wpływ na lokalne amplitudy oscylacji, chociaż powoduje wyraźne zmniejszenie pików największych (rys. 3b). Znacznie większy wpływ na siłę kontaktową ma tłumienie materiałowe w przewodzie jezdnym. Nawet niewielkie tłumienie, jednocentowe, powoduje zasadnicze zmniejszenie lokalnych amplitud (rys. 3a). Siła kontaktowa oscyluje, ale prawie nie przyjmuje wartości ujemnych, które skutkują utratą kontaktu między nakładką ślizgacza pantografu i przewodem jezdym (por. rys. 2) – a w konsekwencji pogorszeniem jakości odbioru prądu. Tłumienie materiałowe w przewodzie jezdym wpływa też korzystnie na drgania przewodu – powoduje znaczące zmniejszenie maksymalnego uniesienia przewodu na wsporniku sieci i wygasza oscylacje wysokoczęstotliwościowe (rys. 4), w odróżnieniu od tłumienia związanego z liną nośną. Stąd wynika ważny wniosek praktyczny: poziom tłumienia drgań sieci trakcyjnych słabo zależy od cech materiałowych liny nośnej.

Kolejny wniosek dotyczy wymaganego poziomu tłumienia. W publikacji [3] podano, że sieci trakcyjne charakteryzują się niskim tłumieniem – rzędu 1%. Na podstawie przedstawionych wyników badań można stwierdzić, że taki poziom tłumienia jest wystarczający, aby oddziaływania dynamiczne między pantografem i siecią jezdnią nie powodowały istotnego pogorszenia jakości odbioru prądu, pod warunkiem, że tłumienie to wynika głównie z cech materiałowych przewodu jezdego.

Instalowanie w sieciach trakcyjnych wieszaków typu przewodowego, wyłączających się przy ściskaniu, jest zabiegiem znacznie poprawiającym warunki odbioru prądu. To stwierdzenie wynika wprost z analizy wykresów pokazanych na rys. 5a. Przebieg zmian siły kontaktowej, wyznaczony jako rozwiązanie nieliniowe (tj. z uwzględnieniem faktu wyłączania się wieszaków), jest znacząco korzystniejszy od rozwiązania liniowego. Oscylacje są dużo mniejsze, zasadniczo maleją piki największe, pojawiające się po przejeździe pantografu przez wspornik sieci. Niestety, równocześnie rośnie znacząco maksymalne uniesienie przewodu na wsporniku sieci, co nie jest korzystne (rys. 5b). Przedstawione wyniki mają tylko wstępny charakter, ponieważ w obliczeniach ograniczono do jednej liczby iteracji sił kompensujących wpływ wieszaków ściskanych (por.

wzór (6)). Można się spodziewać, że zwiększenie liczby iteracji spowoduje zmniejszenie różnicy między rozwiązaniem liniowym i nieliniowym. Problem ten będzie przedmiotem dalszych badań.

Przedstawione wyniki analiz numerycznych świadczą o przydatności zaproponowanej metody symulacji do oceny drgań górnej sieci jezdnej, pantografów i siły kontaktowej. Uzyskane wyniki, dotyczące tzw. modelu odniesienia określonego normą europejską EN 50318: 2002 [13], mieszczą się w granicach określonych przepisami tej normy, co z kolei dowodzi poprawności metody. Metoda symulacji będzie nadal testowana w zakresie rozwiązań uwzględniających nieliniowe zachowanie wieszaków. Będzie też rozwijana w kierunku sugerowanym w pracy [11], poprzez wprowadzenie wymuszenia kinematycznego drgań pantografu spowodowanego drganiami pojazdu przejeżdżającego przez nierówność progową toru.

## Literatura

- [1] Dyrektywa 2008/57/WE Parlamentu Europejskiego i Rady w sprawie interoperacyjności systemu kolei we Wspólnocie.
- [2] Bryja D., Prokopowicz D.: Dyskretno-ciągły model obliczeniowy sprzężonego układu dynamicznego: pantograf - napowietrzna sieć trakcyjna, *Przegląd Komunikacyjny*, r. 71, nr 5, 2016, s. 44-51.
- [3] Poetsch G., Evans J., Meisinger R., Kortüm W., Baldauf W., Veitl A., Wallaschek J.: Pantograph/Catenary Dynamics and Control, *Vehicle System Dynamics*, no. 28, 1997, pp. 159-195.
- [4] Wu T. X., Brennan M. J.: Basic Analytical study of pantograph-catenary system dynamics, *Vehicle System Dynamics*, no. 30, 1998, pp. 443-456.
- [5] Wu T. X., Brennan M. J.: Dynamic stiffness of a railway overhead wire system and its effect on pantograph-catenary system dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, no. 219, 1999, pp. 483-502.
- [6] Park T. J., Han C. S., Jang J. H.: Dynamic sensitivity analysis for the pantograph of a high-speed rail vehicle, *Journal of Sound and Vibrations*, no. 266, 2003, pp. 235-260.
- [7] Lopez-Garcia O., Carnicero A., Marono J. L.: Influence of stiffness and contact modelling on catenary-pantograph system dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, no. 299, 2007, pp. 806-821.
- [8] Arnold M., Simeon B.: Pantograph and catenary dynamics: A benchmark problem and its numerical solution, *Applied Numerical Mathematics*, no. 34, 2000, pp. 345-362.
- [9] Cho Y. H.: Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper, *Journal of Sound and Vibration*, no. 315, 2008, pp. 433-454.
- [10] Rauter F. G., Pombo J., Ambrósio J., Chalansonnet J., Bobillot A., Pereira M. S.: Contact model for the pantograph-catenary interaction, *Journal of System Design and Dynamics*, vol. 1, no. 3, 2007, pp. 447-457.
- [11] Pombo J., Ambrósio J.: Environmental and track perturbations on multiple pantograph interaction with catenaries in high-speed trains, *Computers and Structures*, no. 124, 2013, pp. 88-101.

- [12] Massat J.-P., Laurent C., Bianchi J.-P., Balmès E.: Pantograph catenary dynamic optimization based on advanced multibody and finite element co-simulation tools, *Vehicle System Dynamics*, vol. 52, Supplement, 2014, pp. 338-354.
- [13] Norma EN 50318: 2002 „Zastosowania kolejowe - Systemy odbioru prądu - Walidacja symulacji oddziaływania dynamicznego pomiędzy pantografem a siecią jezdnią górną”.

## VIBRATION ANALYSIS OF SUSPENDED CABLE STRUCTURE AS A MODEL OF RAILWAY OVERHEAD WIRE SYSTEM SUBJECTED TO MOVING PANTOGRAPHS

### Summary

Increasing train speeds and rapid development of high speed railway systems give rise to growing interest in dynamics of railway overhead wire systems. In recent years, many new publications on advanced numerical methods for computer simulation of vibration of pantograph-catenary systems appeared in foreign literature. In Poland, this topic is relatively unknown, hence one of the objectives of this paper is to review the literature on methods for modeling overhead contact lines and pantographs. The main goal is to present an original method for simulation of pantograph and catenary coupled system vibration and the use of method in dynamic analysis of a sample system. The method is based on the computational model which have been presented in a separate article. This model is formulated on the basis of vibration theory of a continuous cable. Catenary is treated as initially tensioned, multi-span cable structure which consists of a carrying cable characterized by non-negligible static sag and a contact wire suspended by means of droppers. The slackening of droppers under compressive forces is taken into account. Catenary is subjected to a passage of two pantographs moving with constant speed, each idealized as two-degree-of-freedom dynamic system.

Equations of motion of the system, derived by the use of Lagrange equations and Ritz approximation of catenary displacements, are reexpressed in this paper to extract nonlinear forces which compensate the effects of compressed droppers. The method for solving nonlinear equations of motion is described. It is also explained what is a physical meaning of linear equations associated with these nonlinear. Exemplary simulations are presented for the catenary consisting of ten spans in order to demonstrate efficiency and computing capabilities of the simulation method. An influence of the material damping in carrying rope and this in contact wire, on the dynamic response of analyzed catenary is examined.

**Keywords:** vibration simulations, linear vibrations, nonlinear vibrations, contact force, contact wire vibrations, damping influence

*Przesłano do redakcji: 20.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Janusz SZMIDLA<sup>1</sup>  
Anna JURCZYŃSKA<sup>2</sup>

## ANALIZA DRGAŃ POPRZECZNYCH SMUKŁEJ KOLUMNY O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM PRZY OBCIĄŻENIU UOGÓLNIONYM Z SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA DODATNIEGO

W pracy zawarto wyniki rozważań teoretycznych oraz analizę numeryczną zagadnienia drgań swobodnych smukłego układu o zmiennym przekroju poprzecznym poddanego działaniu wybranego przypadku obciążenia swoistego. Analizowane obciążenie uogólnione z siłą skierowaną do bieguna dodatniego realizowane jest poprzez strukturę zbudowaną z głowic z zarysie kołowym: wywołującą i przejmującą obciążenie. W celu zamodelowania niepryzmatyczności kolumny, układ podzielono na  $n$  przyzmatycznych segmentów o równej długości i grubości oraz zmiennej szerokości opisanej za pomocą funkcji liniowej oraz wielomianu drugiego stopnia, przy zachowaniu warunku stałej objętości sumarycznej. W oparciu o model fizyczny układu zdefiniowano zależności określające energię mechaniczną struktury. Problem sformułowano na podstawie zasady Hamiltona (metoda drgań, kinetyczne kryterium utraty stateczności). Biorąc pod uwagę geometryczne warunki brzegowe oraz geometryczne warunki ciągłości wyznaczono różniczkowe równania ruchu poszczególnych segmentów kolumny oraz brakujące do opisu układu naturalne warunki brzegowe i naturalne warunki ciągłości. W oparciu o tak zdefiniowany model matematyczny opracowano autorskie algorytmy obliczeniowe umożliwiające badania numeryczne drgań poprzecznych układu. W ramach przeprowadzonych obliczeń określono zakres zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Dyskusji poddano wpływ zmiennych parametrów geometrycznych kolumny na wartość częstości drgań oraz typ układu, uwzględniając parametry określające kształt kolumny oraz geometrię struktury realizującej obciążenie.

**Słowa kluczowe:** układy smukłe, drgania swobodne, obciążenie swoiste, obciążenie krytyczne

---

<sup>1</sup> Janusz Szmidla, Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, ul. J. H. Dąbrowskiego 73, 42-201 Częstochowa; tel. +48 (34) 32-50-616; szmidla@imipkm.pcz.pl

<sup>2</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Anna Jurczyńska, Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, ul. J. H. Dąbrowskiego 73, 42-201 Częstochowa; tel. +48 (34) 32-50-683; a.jurczynska@imipkm.pcz.pl

## 1. Wprowadzenie

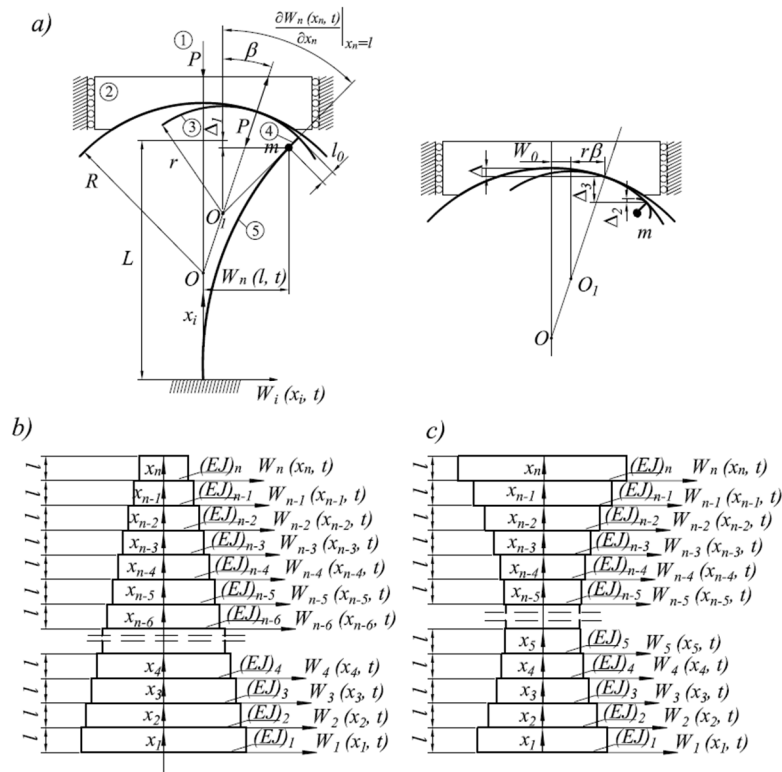
Układy niepryzmatyczne są powszechnie stosowane w budowie maszyn i konstrukcjach mechanicznych. Ze względu na coraz to większe wymagania stawiane konstruktorom, poszukuje się optymalnych kształtów struktur, które zapewniać mają wzrost przenoszonych obciążeń lub redukcję ciężaru układu.

W zakresie dynamiki układów niepryzmatycznych analizie poddano drgania harmoniczne belki Bernoullego - Eulera o skokowo zmiennej sztywności na zginanie z elementami dyskretnymi [1]. Badaniom poddano wpływ zmiany przekroju poprzecznego oraz usytuowania zmian przekroju wzdłuż osi układu na utratę stateczności dynamicznej układu. Rozwiązanie zagadnienia stateczności i drgań swobodnych niepryzmatycznej kolumny przy obciążeniu eulerowskim przedstawiono w pracy [2]. Analizie poddano różne przypadki zamocowania układu. Wyznaczono wartości obciążenia krytycznego i częstości drgań własnych w zależności od kształtu kolumny. Zagadnienia drgań poprzecznych belki o skokowo zmiennym przekroju dotyczy również praca [3]. Wyniki dotyczące drgań swobodnych sprężyste zamocowanej kolumny Timoshenki uzyskane przy użyciu metody transformaty przedstawiono w pracy [4]. Analizę drgań kolumny o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym z zamodelowaniem pęknięć w punktach zmiany przekroju układu (uskok) zaprezentowano w pracy [5]. Do sformułowania i rozwiązania zagadnienia wykorzystano własności funkcji Greena. W pracy [6] przedstawiono badania drgań poprzecznych niepryzmatycznej belki Timoshenki poddanej jednoczesnemu działaniu siły osiowej oraz stycznym obciążeniom ciągłym. Dokładne rozwiązanie otrzymanego układu równań rządzących uzyskano poprzez wyrażenie współczynników zredukowanego równania różniczkowego w postaci wielomianu a następnie zastosowanie metody Frobeniusa. Wyniki badań dotyczących stateczności kolumny Becka o zmiennej masie i sztywności z uwzględnieniem tłumienia otrzymane w oparciu o kompletną, nieliniową analizę dynamiczną przedstawiono w pracy [7]. Rozwiązanie nieliniowych różniczkowych równań ruchu o zmiennych współczynnikach opisujących dynamikę układu rozwiązano stosując metodę równań równoważnych (AEM) Katsikadelisa. Analiza drgań swobodnych wielosegmentowej belki Bernoullego – Eulera podpartej sprężyste na obu końcach była tematem pracy [8]. Wykazano, że zaproponowana metoda rozwiązania zagadnienia brzegowego – metoda rozkładu Adomiana - może być użyta do analizy drgań różnego typu belek niepryzmatycznych zbudowanych z dowolnej liczby członów.

Celem niniejszej pracy jest analiza numeryczna zagadnienia drgań swobodnych kolumny o zmiennym przekroju poprzecznym rozpatrywanej jako zbiór pryzmatycznych segmentów, realizującej obciążenie uogólnione z siłą skierowaną do bieguna dodatniego.

## 2. Model fizyczny układu

W pracy rozważa się przedstawiony na rys. 1 smukły układ o zmiennym przekroju poprzecznym. W celu zamodelowania niepryzmatyczności kolumny, strukturę rozpatruje się jako zbiór  $n$  przyzmatycznych segmentów o równej długości  $l$  oraz grubości  $h$ . Zmienną szerokość poszczególnych segmentów opisano funkcją liniową  $b(x) = 2a(Z) \cdot x + d$  oraz wielomianem drugiego stopnia  $b(x) = 2(a(p,q) \cdot [x-p]^2 + q)$ . W rozważaniach przyjęto warunek stałej sumarycznej objętości układu. Dodatkowo założono, że szerokość poszczególnych segmentów nie może być mniejsza od ich grubości ( $b(x) \geq h$ ).



Rys. 1. Model fizyczny układu: a) schemat ogólny kolumny poddanej działaniu obciążenia uogólnionego z siłą skierowaną do bieguna dodatniego oraz geometria struktury obciążającej. Podział układu przy aproksymacji kształtu b) funkcją liniową c) wielomianem drugiego stopnia

Fig. 1. Physical model of the system: a) scheme of the column subjected to the generalized load with a force directed towards the positive pole and the geometry of the loading structure. The division of the system into segments when the shape is approximated by b) linear function c) polynomial of degree 2



Obciążenie uogólnione z siłą skierowaną do bieguna dodatniego (przypadek obciążenia swoistego) realizowane jest poprzez strukturę zbudowaną z elementów o zarysie kołowym [9, 10]. Obciążenie zewnętrzne ① przekazywane jest z głowicy wymuszającej ② o promieniu  $R$  na głowicę przejmującą obciążenie ③ o promieniu  $r$  a następnie poprzez nieskończenie sztywny element o długości  $l_0$  na kolumnę. Kierunek działania siły przechodzi przez punkt  $O_l$  będący środkiem krzywizny głowicy przejmującej obciążenie oraz stały punkt  $O$  znajdujący się na nieodkształconej osi układu poniżej swobodnego końca (biegun dodatni). Uwzględnienie w modelu elementu ④ uzasadnione jest względami konstrukcyjnymi. Masa skupiona  $m$  uwzględnia całkowitą zredukowaną masę elementów składowych głowicy przejmującej obciążenie.

### 3. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego

Na podstawie zdefiniowanego w rozdziale 2. modelu fizycznego określono energię mechaniczną układu. Całkowita energia potencjalna  $V$  jest sumą energii sprężystości zginania poszczególnych członów kolumny  $V_1$  oraz energii wynikającej z obciążenia zewnętrznego  $V_2$ :

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (EJ)_i \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \right]^2 dx_i \quad (1)$$

$$V_2 = -P\Delta_1 - P\Delta_2 + P\Delta_3 + \frac{1}{2} P\beta [W_0 + r\beta] \quad (2)$$

przy czym:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^l \left[ \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right]^2 dx_i, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} l_0 \left[ \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=l} \right]^2 \quad (3-4)$$

$$\Delta_3 = \frac{r}{2} \left[ \left[ \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=l} \right]^2 - \beta^2 \right] \quad (5)$$

oraz:

$$\beta = \frac{W_n(l, t) - (r - l_0) \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=l}}{R - r} \quad (6)$$

$$W_0 = W_n(l, t) - (r - l_0) \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=l} \quad (7)$$

$$\varphi = \frac{(R - l_0) \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=l} - W_n(l, t)}{R - r} \quad (8)$$

Całkowita energia kinetyczna  $T$  jest sumą energii kinetycznych masy skupionej  $T_2$  oraz poszczególnych segmentów układu  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\rho A)_i \int_0^l \left[ \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} \right]^2 dx_i \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial W_n(l, t)}{\partial t} \right]^2 \quad (10)$$

Zagadnienie brzegowe drgań analizowanego układu smukłego sformułowano w oparciu o zasadę Hamiltona:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (11)$$

gdzie:  $t_1, t_2$  – współrzędne czasu,  $\delta$  – operator wariacji.

Po obliczeniu wariacji poszczególnych składowych energii mechanicznej i podstawieniu ich do równania (11), przy jednoczesnym uwzględnieniu geometrycznych warunków brzegowych oraz geometrycznych warunków ciągłości:

$$W_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial W_1(x_1, t)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (12-13)$$

$$W_j(l, t) = W_{j+1}(0, t) \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial W_j(x_j, t)}{\partial x_j} \right|_{x_j=l} = \left. \frac{\partial W_{j+1}(x_{j+1}, t)}{\partial x_{j+1}} \right|_{x_{j+1}=0}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (15)$$

otrzymano:

- różniczkowe równania ruchu w kierunku poprzecznym do osi układu

$$(EJ)_i \frac{\partial^4 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + P \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} + \rho A \frac{\partial^2 W_i(x_i, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

- naturalne warunki brzegowe na swobodnym końcu układu

$$(EJ)_n \left. \frac{\partial^2 W_n(x_n, t)}{\partial x_n^2} \right|_{x_n=l} + P \left[ \left. \rho \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \right|_{x_n=l} + \nu W_n(l, t) \right] = 0 \quad (17)$$

$$(EJ)_n \left. \frac{\partial^3 W_n(x_n, t)}{\partial x_n^3} \right|_{x_n=l} + P \left[ \left. \eta \frac{\partial W_n(x_n, t)}{\partial x_n} \right|_{x_n=l} + \gamma W_n(l, t) \right] +$$

$$- m \frac{\partial^2 W_n(l, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

gdzie parametry  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$  określają zależności pomiędzy promieniami główic wymuszającej  $R$  i przejmującej obciążenie  $r$  oraz długością  $l_0$  sztywnego elementu (rygła):

$$\rho = \frac{(r-l_0)(R-l_0)}{R-r}, \quad \nu = -\frac{r-l_0}{R-r}, \quad \eta = \frac{R-l_0}{R-r}, \quad \gamma = -\frac{1}{R-r} \quad (19-22)$$

- naturalne warunki ciągłości pomiędzy poszczególnymi segmentami kolumny

$$(EJ)_j \left. \frac{\partial^2 W_j(x_j, t)}{\partial x_j^2} \right|_{x_j=l} = (EJ)_{j+1} \left. \frac{\partial^2 W_{j+1}(x_{j+1}, t)}{\partial x_{j+1}^2} \right|_{x_{j+1}=0} \quad (23)$$

$$(EJ)_j \left. \frac{\partial^3 W_j(x_j, t)}{\partial x_j^3} \right|_{x_j=l} = (EJ)_{j+1} \left. \frac{\partial^3 W_{j+1}(x_{j+1}, t)}{\partial x_{j+1}^3} \right|_{x_{j+1}=0}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

Warunki ciągłości dotyczące równości: przemieszczeń poprzecznych (14), kątów ugięć (15), sił poprzecznych (23) oraz momentów gnących (24) pomiędzy poszczególnymi segmentami rozważanej w pracy kolumny zapisano dla punktów leżących na osi symetrii układu. Biorąc pod uwagę rzeczywisty kształt badanego układu smukłego, w tym nieznaczący gradient zmian wymiaru poprzecznego wzdłuż osi kolumny założono poprawność równań dynamiki na całej długości kolumny, w tym również w strefie brzegowej.

Takie zdefiniowanie naturalnych warunków brzegowych układu poddanego działaniu obciążenia uogólnionego z siłą skierowaną do bieguna dodatniego umożliwia poprzez odpowiedni dobór wartości wymienionych współczynników uzyskanie innych przypadków obciążenia konserwatywnego.

#### 4. Wyniki analizy numerycznej

Biorąc pod uwagę rozwiązanie różniczkowych równań ruchu (16) i geometryczne i naturalne warunki brzegowe (12-13, 17-18) oraz warunki ciągłości (14-15, 19-20) opracowano algorytmy do analizy numerycznej drgań poprzecznych rozpatrywanej kolumny. Wyniki obliczeń zaprezentowano w postaci bezwymiarowej, wprowadzając następujące parametry służące do opisu układu:

- parametry określające geometrię układu

$$Z^* = \frac{b_1 - b_n}{L} \cdot 100\%, \quad p^* = \frac{p}{L}, \quad q^* = \frac{q}{L}, \quad (25-27)$$

- parametry opisujące geometrię struktury realizującej obciążenie

$$R^* = \frac{R - l_0}{L}, \quad \Delta r = \frac{R - r}{L}, \quad (28-29)$$

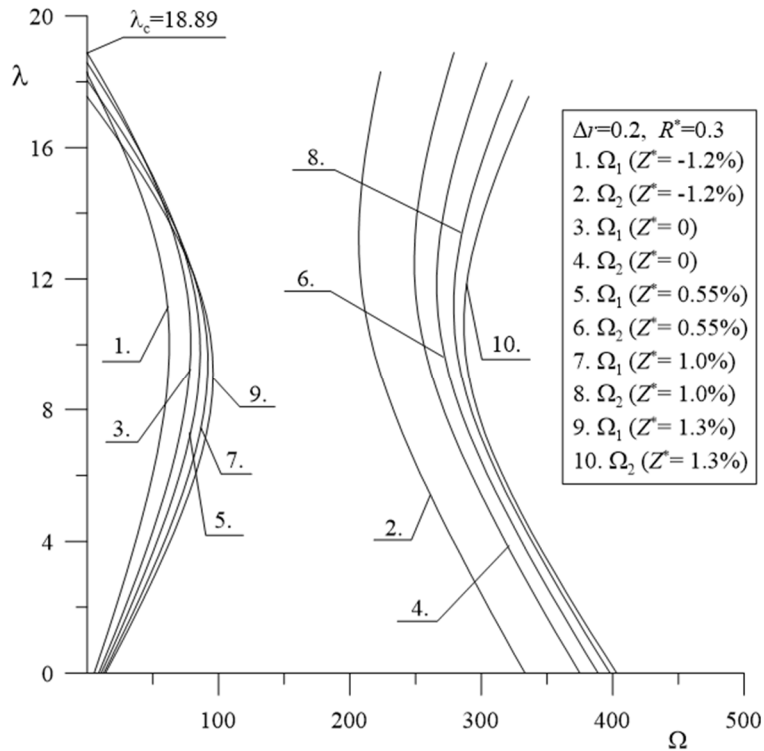
- parametry obciążenia zewnętrznego oraz obciążenia krytycznego

$$\lambda = \frac{PL^2}{(EJ)_{pr}}, \quad \lambda_c = \frac{P_c L^2}{(EJ)_{pr}} \quad (30-31)$$

- bezwymiarowy parametr drgań

$$\Omega = \frac{\omega^2 (\rho A)_{pr} L^4}{(EJ)_{pr}} \quad (32)$$

Wartości z indeksami „pr” we wzorach (30-32) odnoszą się do układu porównawczego – kolumny pryzmatycznej (o stałym przekroju poprzecznym) o takiej samej objętości, co kolumna niepryzmatyczna.

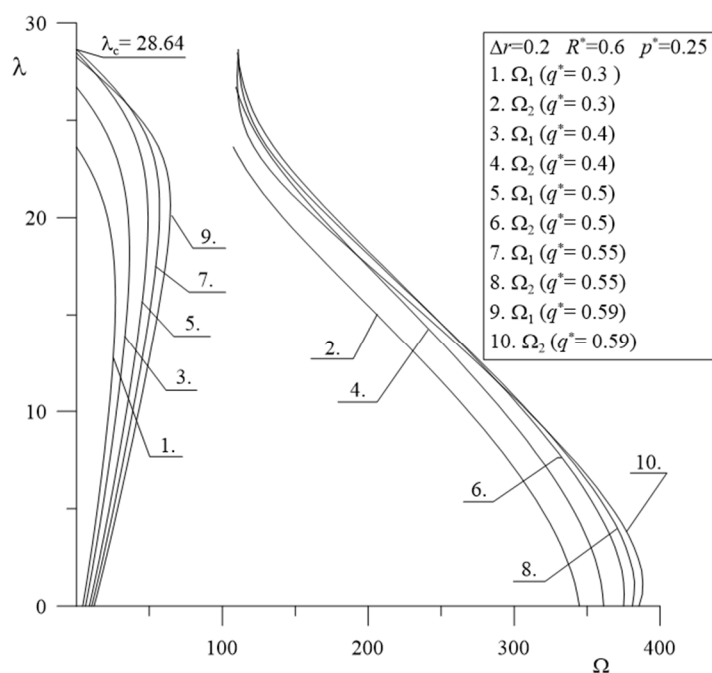


Rys. 2. Zmiana pierwszych dwóch częstości drgań kolumny niepryzmatycznej aproksymowanej funkcją liniową w funkcji obciążenia zewnętrznego przy wybranych wartościach parametrów struktury realizującej obciążenie oraz zbieżności układu  $Z^*$

Fig. 2. The change in the two first frequencies of the vibration of the nonprismatic column approximated by the linear function in relation to the external load for selected values of the parameters of the loading structure as well as the taper ratio  $Z^*$

Na rysunkach 2-3 przedstawiono zmianę dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu o zmiennym przekroju poprzecznym w funkcji obciążenia zewnętrznego. W początkowym zakresie obciążenia wraz ze wzrostem parametru  $Z^*$  (przy aproksymacji zarysu kolumny funkcją liniową) oraz parametru  $q^*$  (opisującego położenie współrzędnej wierzchołka paraboli) rośnie częstość drgań własnych. Przy dalszym wzroście obciążenia zewnętrznego wartość częstości może rosnać lub maleć, w zależności od wartości parametrów opisujących geometrię kolumny. Wartość obciążenia zewnętrznego, przy którym częstość drgań własnych równa jest zero odpowiada obciążeniu krytycznemu układu. Na wykresach zaznaczono również maksymalne wartości parametru obciążenia krytycznego. W przypadku aproksymacji kształtu funkcją liniową (rys. 2.) największe obciążenie krytyczne odnotowano przy zbieżności układu  $Z^*$  równej zero (układ przyzmatyczny). W przypadku opisu zarysu kolumny funkcją kwadratową,

przy zadanych parametrach głowic  $R^*$  i  $\Delta r$  oraz parametrze  $p^*$ , najkorzystniejszy ze względu na wartość obciążenia krytycznego jest kształt zdefiniowany przy  $q^*=0.55$ . Biorąc pod uwagę nachylenie krzywych w zależności od wartości obciążenia krytycznego, układ zalicza się do układów typu dywergencyjnego - pseudoflatterowego.

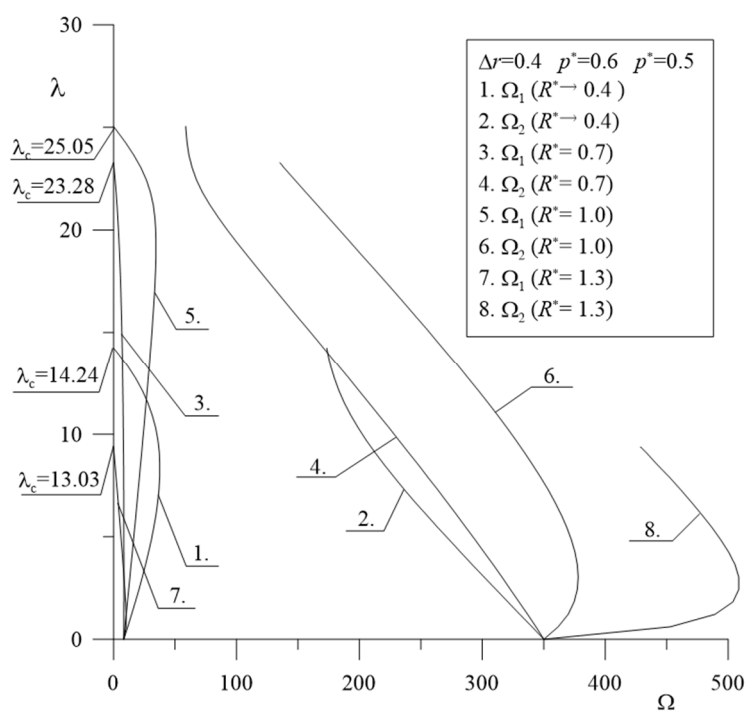


Rys. 3. Krzywe charakterystyczne układu o zarysie aproksymowanym funkcją paraboliczną przy zadanej geometrii struktury obciążającej oraz wybranych wartościach parametru  $q^*$

Fig. 3. Characteristic curves of the system of the shape approximated by the parabolic function at a given geometry of the loading structure and selected values of the parameter  $q^*$

Rysunek 4. przedstawia przebiegi dwóch pierwszych częstości drgań własnych analizowanego układu aproksymowanego wielomianem drugiego stopnia w funkcji parametru obciążenia zewnętrznego przy wybranych wartościach parametru promienia głowicy wywołującej obciążenie. Przy dowolnie określonym kształcie układu oraz geometrii struktury realizującej obciążenie zewnętrzne istnieje taka wartość parametru  $R^*$ , w przypadku której wartość obciążenia kry-

tycznego kolumny jest największa. Zależność ta potwierdza się również w przypadku układów o kształcie opisanym dowolną funkcją liniową.



Rys. 4. Krzywe na płaszczyźnie obciążenie zewnętrzne – częstość drgań własnych układu aproksymowanego wielomianem drugiego stopnia przy zadanej geometrii kolumny oraz zmiennych wartościach promienia głowicy wywołującej obciążenie

Fig. 4. Curves on the plane external load - frequency of the free vibration of the system of the shape approximated by the polynomial of degree 2 for known geometry of the column and variable values of the radius of the loading head

## 5. Wnioski

W pracy analizie drgań swobodnych poddano kolumnę niepryzmatyczną przy obciążeniu uogólnionym z siłą skierowaną do bieguna dodatniego. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych sformułowano następujące wnioski:

- biorąc pod uwagę, iż warunki ciągłości są zdefiniowane na osi symetrii rozważanej kolumny założono, że w otoczeniu tych punktów spełniona jest zasa-

da de Saint – Venanta. W pracy nie uwzględniono wpływu spiętrzenia naprężeń w warstwie brzegowej,

- aproksymacja kształtu układu wpływa na wartość częstości drgań, w zależności od parametrów opisujących zarys układu oraz wartości obciążenia zewnętrznego, zmiana kształtu kolumny może powodować wzrost bądź spadek wartości częstości drgań własnych,
- wartość obciążenia krytycznego odpowiadająca zerowej wartości podstawowej częstości drgań własnych układu zależy w głównej mierze od wartości parametrów opisujących jego kształt oraz parametrów geometrycznych struktury obciążającej. Otrzymane na podstawie kinetycznego kryterium utraty stateczności siły krytyczne znajdują odzwierciedlenie w wynikach analiz numerycznych rozpatrywanego układu przeprowadzonych w oparciu o statyczne kryterium utraty stateczności,
- rozważany w pracy układ można zaliczyć w zależności od wartości parametrów opisujących strukturę realizującą obciążenie do typu dywergencyjnego lub dywergencyjnego pseudoflaterowego,
- aproksymacja kształtu kolumny ograniczona jest warunkiem, według którego wartość szerokości  $b$  segmentów kolumny musi być większa bądź równa grubości  $h$  tego segmentu.

## Literatura

- [1] W. Sochacki: The dynamic stability of a stepped cantilever beam with attachments, *Journal of Vibroengineering*, Vol. 15 Issue 1, 2013, pp. 280-290.
- [2] J. Szmidla, M. Kluba: Stateczność i drgania swobodne niepryzmatycznego układu smukłego poddanego obciążeniu eulerowskiemu, *Modelowanie Inżynierskie*, 41, 2011, str. 385-394.
- [3] A. P. Seyranian, E. Lund, N. Olhoff, Multiple eigenvalues in structural optimization problems, *Struct. Optimization*, 8, 1994, pp. 207-227.
- [4] Demirdag O., Yesilce Y.: Solution of free vibration equation of elastically supported Timoshenko columns with a tip mass by differential transform method, *Journal of Advances in Engineering Software*, vol. 42 (10), 2011, pp. 860-867.
- [5] S. Kukla: Free vibrations and stability of stepped columns with cracks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319 (3-5), 2009, pp. 1301-1311.
- [6] E. Esmailzadeh, A. R. Ohadi: Vibration and stability analysis of non-uniform Timoshenko beam under axial and distributed tangential loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236 (3), 2000, pp. 443-456.
- [7] J. T. Katsikadelis, G. C. Tsiatas: Non-linear dynamic stability of damped Beck's column with variable cross-section, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42, 2007, pp. 164-171.
- [8] Q. Mao: Free Vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method, *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2011, pp. 756-764.



- [9] L. Tomski, J. Szmidla: Drgania swobodne i stateczność kolumn poddanych obciążeniu swoistemu - sztywne węzły konstrukcyjne układu wymuszającego i przejmującego obciążenie, rozdz. 3. [w] Drgania i stateczność układów smukłych. Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją Lecha Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo - Techniczna”, Warszawa 2004, str. 68-133.
- [10] S. Uzny: Free Vibrations of an Elastically Supported Geometrically Nonlinear Column Subjected to a Generalized Load with a Force Directed towards the Positive Pole, Journal of Engineering Mechanics, 2011, 137 (11).

### **FREE VIBRATION ANALYSIS OF THE SLENDER COLUMN OF VARIABLE CROSS - SECTION UNDER THE GENERALIZED LOAD WITH A FORCE DIRECTED TOWARDS THE POSITIVE POLE**

#### **S u m m a r y**

The results of the theoretical considerations and numerical analysis of the issue of the free vibration of the slender system of the variable cross-section under selected case of the specific load were included in this work. Analyzed generalized load with a force directed towards the positive pole is realized by the structure built of heads of the circular outlines: loading and receiving heads. In order to model the variable cross-section of the column, the system was divided into  $n$  prismatic segments of the equal length and thickness and the variable width described by the linear function and the polynomial of degree 2, fulfilling the condition of the constant total volume. On the basis of the physical model of the system, the mechanical energy of the structure was defined. The issue of the free vibration was formulated taking into account the Hamilton's principle (energetic method, kinetic criterion of the stability loss). Taking into consideration the geometric boundary conditions and the geometric continuity conditions, the differential equations of motion of particular segments of the column as well as the natural boundary condition and the natural continuity conditions were determined. On the basis of so-defined mathematical model, the computation algorithms enabling numerical examination of the transverse vibration of the column were developed. Within the scope of the carried-out calculations, the range of the changes in the frequency of the free vibration as a function of the external load was determined. An influence of the variable geometric parameters of the column on the value of the natural frequency and the type of the system was discussed, including the parameters describing the shape of the column as well as the geometry of the loading structure.

**Keywords:** slender systems, free vibrations, specific load, critical load

*Przesłano do redakcji: 15.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Barbara TOMCZYK<sup>1</sup>  
Anna LITAWSKA<sup>2</sup>

## A NEW TOLERANCE MODEL OF VIBRATIONS OF THIN MICROPERIODIC CYLINDRICAL SHELLS

The objects of consideration are thin linearly elastic Kirchhoff-Love-type circular cylindrical shells having a micro-periodic structure in circumferential direction (*uniperiodic shells*). At the same time the shells have constant structure in axial direction. The aim of this contribution is to formulate and discuss a new non-asymptotic averaged model for the analysis of selected dynamic problems for these shells. This, so-called, *general tolerance model* is derived by means of a certain extended version of the known tolerance modelling of micro-heterogeneous media. This version is based on a new notion of *weakly slowly-varying functions*. Contrary to the starting exact shell equations with highly oscillating, non-continuous and periodic coefficients, governing equations of the tolerance model have constant coefficients depending also on a period of inhomogeneity. Hence, the model makes it possible to investigate the effect of a cell size on the global shell dynamics (*the length-scale effect*). The differences between *the general tolerance model* proposed here and the corresponding *known standard tolerance model* derived by means of the more restrictive concept of *slowly-varying functions* are discussed.

**Keywords:** uniperiodic shells, mathematical modelling, weakly slowly-varying functions, dynamic problems, length-scale effect

### 1. Introduction

Thin linearly elastic Kirchhoff-Love-type cylindrical shells with a periodically micro-inhomogeneous structure in circumferential direction (*uniperiodic shells*) are analysed, cf. Fig. 1. At the same time, the shells have constant structure in axial direction.

The properties of such shells are described by highly oscillating and non-continuous periodic functions, so the exact equations of the shell theory are too

---

<sup>1</sup> Corresponding author / autor do korespondencji: Barbara Tomczyk, Lodz University of Technology, Department of Structural Mechanics, al. Politechniki 6, 90-924 Lodz, tel. 426313563; barbara.tomczyk@p.lodz.pl

<sup>2</sup> Anna Litawska, Lodz University of Technology, Department of Structural Mechanics, al. Politechniki 6, 90-924 Lodz, tel. 426313563; a.litawska@gmail.com

complicated to apply to investigations of engineering problems. To obtain averaged equations with constant coefficients, various approximate modelling procedures for shells of this kind have been proposed. Periodic cylindrical shells (plates) are usually described using *homogenized models* derived by means of *asymptotic methods*, cf. [1, 2]. Unfortunately, in the models of this kind *the effect of a cell size* (called *the length-scale effect*) on the overall shell behaviour is neglected.

In order to analyse the length-scale effect in dynamic or/and stability problems, the new averaged non-asymptotic models of thin cylindrical shells with a periodic micro-heterogeneity either along two directions tangent to the shell midsurface (*biperiodic structure*) or along one direction (*uniperiodic structure*) have been proposed and discussed by Tomczyk in a series of publications and summarized as well as extended in [3]. These, so-called, *tolerance models* have been obtained by applying *the non-asymptotic tolerance averaging technique*, cf. [4, 5]. This technique based on the concept of *tolerance relations* between points and real numbers related to the accuracy of the performed measurements and calculations. The tolerance relations are determined by *the tolerance parameters*. Some applications of this method to the modelling of mechanical and thermo-mechanical problems for various periodic structures are shown in many works. The extended list of papers and books on this topic can be found in [3, 4, 5]. Governing equations of the tolerance models have coefficients which are constant or slowly varying and depend on a cell size.

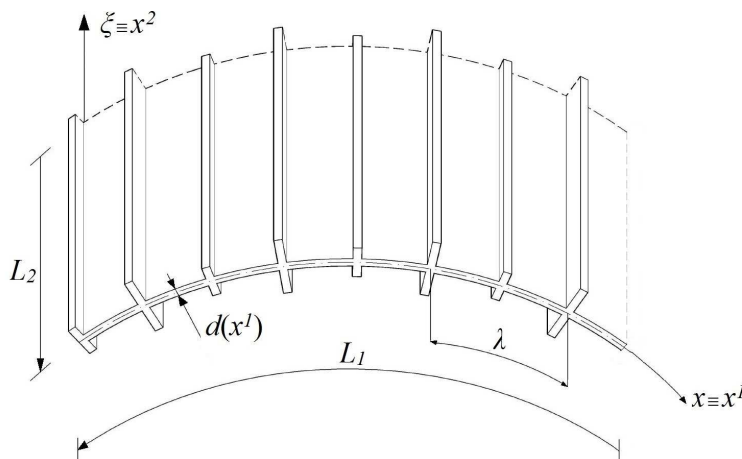


Fig. 1. Example of uniperiodic cylindrical shell

Rys. 1. Przykład walcowej powłoki uniperiodycznej

The aim of this contribution is to formulate and discuss a new mathematical non-asymptotic model for the analysis of selected dynamic problems for the uniperiodic shells under consideration. This model, called *the general tolerance*

*model*, will be derived applying a certain extended version of the known tolerance modelling technique. This version, proposed by Tomczyk & Woźniak in [6], is based on a new concept of *weakly slowly-varying functions* which is a certain extension of the well-known concept of *slowly-varying functions*, cf. [4, 5].

The differences between *the general model* proposed here and the corresponding *known standard model* presented in [3] and derived by means of the more restrictive notion of *slowly-varying functions* will be discussed.

Moreover, we will compare *the general tolerance model* formulated here with the *general combined asymptotic-tolerance model* presented by Tomczyk in [7]. This model is derived by applying *the combined modelling* which includes two techniques: *the consistent asymptotic modelling procedure* given by Woźniak in [5] and the extended *tolerance modelling technique* based on the concept of *weakly slowly-varying functions*, cf. [6]. These two techniques are combined together into a new *combined modelling procedure*.

## 2. Formulation of the modelling problem

We assume that  $x^1$  and  $x^2$  are coordinates parametrizing the shell midsurface  $M$  in circumferential and axial directions, respectively. We denote  $x \equiv x^1 \in \Omega \equiv (0, L_1)$  and  $\xi \equiv x^2 \in \Xi \equiv (0, L_2)$ , where  $L_1, L_2$  are length dimensions of  $M$ , cf. Fig. 1. Let  $O\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3$  stand for a Cartesian orthogonal coordinate system in the physical space  $R^3$  and denote  $\bar{\mathbf{x}} \equiv (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ . A cylindrical shell midsurface  $M$  is given by  $M \equiv \{\bar{\mathbf{x}} \in R^3 : \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2), (x^1, x^2) \in \Omega \times \Xi\}$ , where  $\bar{\mathbf{r}}(\cdot)$  is the smooth function such that  $\partial \bar{\mathbf{r}}/\partial x^1 \cdot \partial \bar{\mathbf{r}}/\partial x^2 = 0$ ,  $\partial \bar{\mathbf{r}}/\partial x^1 \cdot \partial \bar{\mathbf{r}}/\partial x^1 = 1$ ,  $\partial \bar{\mathbf{r}}/\partial x^2 \cdot \partial \bar{\mathbf{r}}/\partial x^2 = 1$ . It means that on  $M$  we have introduced *the orthonormal parametrization*.

Sub- and superscripts  $\alpha, \beta, \dots$  run over 1, 2 and are related to  $x^1, x^2$ , summation convention holds. Partial differentiation related to  $x^\alpha$  is represented by  $\partial_\alpha$ . Moreover, it is denoted  $\partial_{\alpha\dots\delta} \equiv \partial_\alpha \dots \partial_\delta$ . Let  $a^{\alpha\beta}$  stand for the midsurface first metric tensor. Under orthonormal parametrization  $a^{\alpha\beta}$  is the unit tensor. The time coordinate is denoted by  $t \in I \equiv [t_0, t_1]$ . Let  $d(x)$  and  $r$  stand for the shell thickness and the midsurface curvature radius, respectively.

*The basic cell*  $\Delta$  and an arbitrary cell  $\Delta(x)$  with the centre at point  $x \in \Omega_\Delta$  are defined by means of:  $\Delta \equiv [-\lambda/2, \lambda/2]$ ,  $\Delta(x) \equiv x + \Delta$ ,  $x \in \Omega_\Delta$ ,  $\Omega_\Delta \equiv \{x \in \Omega : \Delta(x) \subset \Omega_\Delta\}$ , where  $\lambda$  is a cell length dimension in  $x \equiv x^1$ -direction, cf. Fig. 1. *The microstructure length parameter*  $\lambda$  satisfies conditions:  $\lambda/d_{\max} \gg 1$ ,  $\lambda/r \ll 1$  and  $\lambda/L_1 \ll 1$ .

Setting  $z \equiv z^1 \in [-\lambda/2, \lambda/2]$ , we assume that the cell  $\Delta$  has a symmetry axis for  $z=0$ . It is also assumed that inside the cell the geometrical, elastic and inertial properties of the shell are described by even functions of argument  $z$ .

Denote by  $u_\alpha = u_\alpha(x, \xi, t)$ ,  $w = w(x, \xi, t)$ ,  $(x, \xi, t) \in \Omega \times \Xi \times I$ , the shell displacements in directions tangent and normal to  $M$ , respectively. Elastic properties of the shell are described by stiffness tensors  $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ ,  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ . Let  $\mu(x)$  stand for a shell mass density per midsurface unit area. Let  $f^\alpha(x, \xi, t)$ ,  $f(x, \xi, t)$  be external forces per midsurface unit area, respectively tangent and normal to  $M$ .

The considerations are based on the well-known Kirchhoff-Love theory of thin elastic shells, cf. [8]. It is assumed that the behaviour of the shell under consideration is described by the action functional determined by lagrangian  $L$  being a highly oscillating function with respect to  $x$  and having the well-known form

$$L = -\frac{1}{2}(D^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta u_\alpha \partial_\delta u_\gamma + \frac{2}{r}D^{\alpha\beta 11}w\partial_\beta u_\alpha + \frac{1}{r^2}D^{1111}ww + \\ + B^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\alpha\beta}w\partial_{\gamma\delta}w - \mu a^{\alpha\beta}\dot{u}_\alpha\dot{u}_\beta - \mu\dot{w}^2) + f^\alpha u_\alpha + fw. \quad (1)$$

Applying the principle of stationary action we obtain the following system of Euler-Lagrange equations

$$\partial_\beta \frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta u_\alpha)} - \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\alpha} = 0, \quad -\partial_{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\alpha\beta} w)} - \frac{\partial L}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} = 0. \quad (2)$$

Combining (2) with (1) we arrive finally at the explicit form of *the fundamental equations of the shell theory under consideration*

$$\partial_\beta (D^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\delta u_\gamma) + r^{-1}\partial_\beta (D^{\alpha\beta 11}w) - \mu a^{\alpha\beta}\ddot{u}_\beta + f^\alpha = 0, \\ r^{-1}D^{\alpha\beta 11}\partial_\beta u_\alpha + \partial_{\alpha\beta} (B^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}w) + r^{-2}D^{1111}w + \mu\ddot{w} - f = 0. \quad (3)$$

Equations (3) coincide with the well-known governing equations of Kirchhoff-Love theory of thin elastic cylindrical shells, cf. [8]. For periodic shells, coefficients  $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ ,  $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(x)$ ,  $\mu(x)$  of equations (3) are highly oscillating, non-continuous and periodic functions in  $x$ . Applying *the extended version of the known tolerance modelling technique* proposed in [6], we obtain the averaged form of Lagrange function (1). Then, using the principle of stationary action, we arrive at the tolerance model equations with constant coefficients depending also on a cell size. To make the analysis more clear, in the next section we shall outline the basic concepts and the main assumptions of *the tolerance modelling approach*, following the monographs [5] and [6].

### 3. Modelling concepts and assumptions

The fundamental concepts of the extended tolerance modelling procedure under consideration are those of *two tolerance relations between points and real numbers determined by tolerance parameters, weakly slowly-varying functions, tolerance-periodic functions, fluctuation shape functions and the averaging operation*. It has to be emphasized that in the classical approach we deal with not *weakly slowly-varying* but with more restrictive *slowly-varying functions*.

Below, some of the mentioned above concepts are recalled.

Let  $F(\cdot)$  be a function defined in  $\overline{\Omega} = [0, L_1]$ , which is continuous, bounded and differentiable in  $\overline{\Omega}$  together with their derivatives up to the  $R$ -th order. Nonnegative integer  $R$  is assumed to be specified in every problem under consideration. Note, that function  $F$  can also depend on  $\xi \in \overline{\Xi} = [0, L_2]$  and time coordinate  $t$  as parameters. Let  $\delta \equiv (\lambda, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_R)$  be the set of tolerance parameters. The first of them is related to the distances between points in  $\Omega$ , the second one is related to the distances between values of function  $F(\cdot)$  and the  $k$ -th one to the distances between values of the  $k$ -th derivative of  $F(\cdot)$ ,  $k = 1, \dots, R$ . A function  $F(\cdot)$  is called *weakly slowly-varying of the  $R$ -th kind* with respect to cell  $\Delta$  and tolerance parameters  $\delta$ ,  $F \in WSV_\delta^R(\Omega, \Delta)$ , if and only if

$$(\forall (x, y) \in \Omega^2) [(x \approx_\lambda y) \Rightarrow F(x) \approx_{\delta_0} F(y) \text{ and } \partial_1^k F(x) \approx_{\delta_k} \partial_1^k F(y), \quad (4) \\ k = 1, 2, \dots, R],$$

where  $\partial_1^k F(\cdot)$  stands for the  $k$ -th derivative of  $F(\cdot)$  in  $\Omega$ . Roughly speaking, *weakly slowly-varying function*  $F(\cdot)$  can be treated as constant on the cell.

Let us recall that the known *slowly-varying function*  $F(\cdot)$ ,  $F \in SV_\delta^R(\Omega, \Delta)$ , satisfies not only condition (4) but also the extra restriction

$$(\forall x \in \Omega) [\lambda |\partial_1^k F(x)| \approx_{\delta_k} 0, \quad k = 1, 2, \dots, R]. \quad (5)$$

An integrable and bounded function  $f(\cdot)$  defined in  $\overline{\Omega} = [0, L_1]$ , which can also depend on  $\xi \in \overline{\Xi}$  and time coordinate  $t$  as parameters, is called *tolerance-periodic of the  $R$ -th kind* with respect to cell  $\Delta$  and tolerance parameters  $\delta$ ,  $f \in TP_\delta^R(\Omega, \Delta)$ , if it can be treated (together with its derivatives up to the  $R$ -th order) as periodic on an arbitrary cell.

Let  $f(\cdot)$  be a function defined in  $\overline{\Omega}=[0,L_1]$ , which is integrable and bounded in every cell  $\Delta(x)$ ,  $x \in \Omega_\Delta$ . By *the averaging of  $f(\cdot)$*  we shall mean function  $\langle f \rangle(x)$  defined by

$$\langle f \rangle(x) \equiv \frac{1}{\lambda} \int_{x-\lambda/2}^{x+\lambda/2} f(z) dz, \quad z \in \Delta(x), \quad x \in \Omega_\Delta. \quad (6)$$

If  $f(\cdot)$  is a periodic function then  $\langle f \rangle$  is constant.

Let  $h(\cdot)$  be a  $\lambda$ -periodic, highly oscillating function defined in  $\overline{\Omega}=[0,L_1]$ , which is continuous together with derivatives  $\partial_1^k h$ ,  $k=1, \dots, R-1$ , and has a continuous or a piecewise continuous bounded derivative  $\partial_1^R h$ . Function  $h(\cdot)$  will be called *the fluctuation shape function*,  $h(\cdot) \in FS^R(\Omega, \Delta)$ , if it depends on  $\lambda$  as a parameter and satisfies conditions:  $h \in O(\lambda^R)$ ,  $\partial_1^k h \in O(\lambda^{R-k})$ ,  $k=1, 2, \dots, R$ ,  $\langle \mu h \rangle = 0$ , where  $\mu(\cdot)$  is a shell mass density.

The tolerance modelling is based on two assumptions. The first assumption is called *the tolerance averaging approximation*. The second one is termed *the micro-macro decomposition*.

Let  $f(\cdot)$  be an arbitrary integrable tolerance-periodic functions defined in  $\overline{\Omega}=[0,L_1]$  and let  $F(\cdot) \in WSV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $G(\cdot) \in WSV_\delta^2(\Omega, \Delta)$ . *The tolerance averaging approximation has the form*

$$\begin{aligned} \langle f \partial_1^R F \rangle(x) &= \langle f \rangle \partial_1^R F(x) + O(\delta), \quad R=0,1, \quad \partial_1^0 F \equiv F, \\ \langle f \partial_1^R G \rangle(x) &= \langle f \rangle \partial_1^R G(x) + O(\delta), \quad R=0,1,2, \quad \partial_1^0 G \equiv G. \end{aligned} \quad (7)$$

In the course of modelling, terms  $O(\delta)$  will be neglected. Let us observe that the weakly slowly-varying functions can be regarded as invariant under averaging. Let us recall that the ‘‘classical’’ *slowly-varying functions*  $F(\cdot) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $G(\cdot) \in SV_\delta^2(\Omega, \Delta)$  satisfy not only approximations (7) but also the extra approximate relations

$$\begin{aligned} \langle f \partial_1(hF) \rangle(x) &= \langle f \partial_1 h \rangle(x) F(x) + O(\delta), \\ \langle f \partial_1(gG) \rangle(x) &= \langle f \partial_1 g \rangle(x) G(x) + O(\delta), \\ \langle f \partial_1^2(gG) \rangle(x) &= \langle f \partial_1^2 g \rangle(x) G(x) + O(\delta), \end{aligned} \quad (8)$$

where  $h(\cdot) \in FS^1(\Omega, \Delta)$ ,  $g(\cdot) \in FS^2(\Omega, \Delta)$ .

The second fundamental assumption, called *the micro-macro decomposition*, states that the displacements fields occurring in the lagrangian under con-

sideration can be decomposed into *unknown averaged (macroscopic) displacements* being *weakly slowly-varying functions* in periodicity direction and highly oscillating *fluctuations* represented by the known highly oscillating  $\lambda$ -periodic *fluctuation shape functions* multiplied by unknown *fluctuation amplitudes (microscopic variables)* being *weakly slowly-varying* in  $x$ .

## 4. Tolerance modelling

### 4.1. General tolerance model equations

The tolerance modelling procedure for Euler-Lagrange equations (2) is realized in two steps.

The first step is *the tolerance averaging of lagrangian* (1). To this end let us introduce *fluctuation shape functions*  $h(x) \in FS^1(\Omega, \Delta)$  and  $g(x) \in FS^2(\Omega, \Delta)$ ,  $x \in \Omega$ . These functions are assumed to be known in every problem under consideration. They depend on  $\lambda$  as parameter and have to satisfy conditions:  $h \in O(\lambda)$ ,  $\lambda \partial_1 h \in O(\lambda)$ ,  $g \in O(\lambda^2)$ ,  $\lambda \partial_1 g \in O(\lambda^2)$ ,  $\lambda^2 \partial_{11} g \in O(\lambda^2)$ ,  $\langle \mu h \rangle = \langle \mu g \rangle = 0$ , where  $\mu(\cdot)$  is the shell mass density being a periodic function with respect to  $x$ . Taking into account that inside the cell the geometrical, elastic and inertial properties of the periodic shell under consideration are described by symmetric (i.e. even) functions of argument  $z \in \Delta(x)$ , we assume that  $h(\cdot)$  is either even or odd function of  $z$ . This same restriction is imposed on function  $g(\cdot)$ .

Now, we have to introduce *the micro-macro decomposition* of displacements  $u_\alpha(x, \xi, t) \in TP_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $w(x, \xi, t) \in TP_\delta^2(\Omega, \Delta)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $(\xi, t) \in \Xi \times I$ , which in the problem under consideration is assumed in the form

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, \xi, t) &= u_\alpha^0(x, \xi, t) + h(x)U_\alpha(x, \xi, t), \\ w(x, \xi, t) &= w^0(x, \xi, t) + g(x)W(x, \xi, t), \end{aligned} \quad (9)$$

where  $u_\alpha^0(x, \xi, t), U_\alpha(x, \xi, t) \in WSV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $w^0(x, \xi, t), W(x, \xi, t) \in WSV_\delta^2(\Omega, \Delta)$ .

Functions  $u_\alpha^0, w^0$ , called *macrodisplacements*, and functions  $U_\alpha, W$ , called *fluctuation amplitudes*, are *the new unknowns*.

Substituting the right-hand sides of micro-macro decomposition (9) into lagrangian (1) and then averaging the obtained result over the cell using operation (6) and *tolerance averaging approximation* (7), we arrive at function  $\langle L_{hg} \rangle$  called *the tolerance averaging of L in  $\Delta(x)$  under micro-macro decomposition* (9). The obtained result has the form



$$\begin{aligned}
& \langle L_{hg} \rangle (\partial_\beta u_\alpha^0, u_\alpha^0, \partial_\beta U_\alpha, U_\alpha, \dot{u}_\alpha^0, \dot{U}_\alpha, \partial_{\alpha\beta} w^0, w^0, \partial_{\alpha\beta} W, \\
& \quad \partial_\beta W, W, \dot{w}^0, \dot{W}) = \\
& = -\frac{1}{2} [\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_\beta u_\alpha^0 \partial_\delta u_\gamma^0 + 2 \langle D^{\alpha\beta\gamma 1} \partial_1 h \rangle \partial_\beta u_\alpha^0 U_\gamma + \\
& + 2 \langle \underline{D^{\alpha\beta\gamma\delta} h} \rangle \partial_\beta u_\alpha^0 \partial_\delta U_\gamma + \\
& + \langle D^{\alpha 1 1 \gamma} (\partial_1 h)^2 \rangle U_\gamma U_\alpha + \langle \underline{D^{\alpha\beta\gamma\delta} (h)^2} \rangle \partial_\beta U_\alpha \partial_\delta U_\gamma + \\
& + 2r^{-1} (\langle D^{\alpha\beta 1 1} \rangle \partial_\beta u_\alpha^0 w^0 + \langle D^{\alpha 1 1 1} \partial_1 h^a \rangle w^0 U_\alpha + \\
& + \langle \underline{D^{\alpha\beta 1 1} g} \rangle \partial_\beta u_\alpha^0 W + \langle \underline{D^{\alpha 1 1 1} \partial_1 h g} \rangle U_\alpha W + \\
& + \langle \underline{D^{\alpha\beta 1 1} h} \rangle \partial_\beta U_\alpha w^0 + \langle \underline{D^{\alpha\beta 1 1} h g} \rangle \partial_\beta U_\alpha W) + \\
& + r^{-2} (\langle D^{1 1 1 1} \rangle (w^0)^2 + 2 \langle \underline{D^{1 1 1 1} g} \rangle w^0 W + \\
& + \langle \underline{D^{1 1 1 1} (g)^2} \rangle (W)^2) + \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_{\alpha\beta} w^0 \partial_{\gamma\delta} w^0 + \\
& + 2 (\langle \underline{B^{\alpha\beta 1 1} \partial_{11} g} \rangle \partial_{\alpha\beta} w^0 W + \langle \underline{B^{\alpha\beta\gamma\delta} g} \rangle \partial_{\alpha\beta} w^0 \partial_{\gamma\delta} W + \\
& + \langle \underline{B^{1 1 \gamma\delta} g \partial_{11} g} \rangle \partial_{\gamma\delta} W W) + 4 \langle \underline{B^{\alpha\beta 1 \delta} \partial_1 g} \rangle \partial_{\alpha\beta} w^0 \partial_\delta W + \\
& + 4 \langle \underline{B^{1\beta 1\delta} (\partial_1 g)^2} \rangle \partial_\beta W \partial_\delta W + \langle B^{1 1 1 1} (\partial_{11} g)^2 \rangle (W)^2 + \\
& + \langle \underline{B^{\alpha\beta\gamma\delta} (g)^2} \rangle \partial_{\alpha\beta} W \partial_{\gamma\delta} W - \langle \mu \rangle a^{\alpha\beta} \dot{u}_\alpha^0 \dot{u}_\beta^0 - \langle \mu \rangle (\dot{w}^0)^2 + \\
& - \langle \mu (h)^2 \rangle a^{\alpha\beta} \dot{U}_\alpha \dot{U}_\beta - \langle \mu (g)^2 \rangle (\dot{W})^2 ] + \\
& + \langle f^\alpha \rangle u_\alpha^0 + \langle \underline{f^\alpha h} \rangle U_\alpha + \langle f \rangle w^0 + \langle \underline{fg} \rangle W .
\end{aligned} \tag{10}$$

The underlined terms in (10) depend on microstructure length parameter  $\lambda$ .

The second step in the tolerance modelling of starting equations (3) is to apply the principle of stationary action to action functional determined by averaged lagrangian  $\langle L_{hg} \rangle$ . As a result we obtain the system of Euler-Lagrange equations for unknowns  $u_\alpha^0, w^0, U_\alpha, W$ , which explicit form can be written as

- the constitutive equations

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} & = \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_\delta u_\gamma^0 + r^{-1} (\langle D^{\alpha\beta 1 1} \rangle w^0 + \langle \underline{D^{\alpha\beta 1 1} g} \rangle W) + \\
& + \langle D^{\alpha\beta\gamma 1} \partial_1 h \rangle U_\gamma + \langle \underline{D^{\alpha\beta\gamma\delta} h} \rangle \partial_\delta U_\gamma, \\
M^{\alpha\beta} & = \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_{\gamma\delta} w^0 + \langle B^{\alpha\beta 1 1} \partial_{11} g \rangle W + \\
& + 2 \langle \underline{B^{\alpha\beta\gamma 1} \partial_1 g} \rangle \partial_\gamma W + \langle \underline{B^{\alpha\beta\gamma\delta} g} \rangle \partial_{\gamma\delta} W,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
H^\beta &= \underline{\partial_1 h D^{\beta 1 \gamma \delta}} > \partial_\delta u_\gamma^0 - \underline{\langle h D^{\alpha \beta \gamma \delta} \rangle} \partial_{\alpha \delta} u_\gamma^0 + \\
&+ \underline{\langle D^{\beta 1 1 \gamma} (\partial_1 h)^2 \rangle} U_\gamma - \underline{\langle D^{\alpha \beta \gamma \delta} (h)^2 \rangle} \partial_{\alpha \delta} U_\gamma + \\
&+ r^{-1} (\underline{\langle \partial_1 h D^{\beta 1 1 1} \rangle} w^0 - \underline{\langle h D^{\alpha \beta 1 1} \rangle} \partial_\alpha w^0 + \\
&+ \underline{\langle \partial_1 h D^{\beta 1 1 1} g \rangle} W - \underline{\langle h D^{\alpha \beta 1 1} g \rangle} \partial_\alpha W), \\
G &= r^{-1} (\underline{\langle g D^{1 1 \gamma \delta} \rangle} \partial_\delta u_\gamma^0 + \underline{\langle \partial_1 h D^{1 1 1 \gamma} g \rangle} U_\gamma + \\
&+ \underline{\langle h D^{1 1 \gamma \delta} g \rangle} \partial_\delta U_\gamma) + r^{-2} \underline{\langle g D^{1 1 1 1} \rangle} w^0 + \\
&+ \underline{\langle \partial_{11} g B^{1 1 \alpha \beta} \rangle} \partial_{\alpha \beta} w^0 - 2 \underline{\langle \partial_{11} g B^{\alpha \beta \gamma 1} \rangle} \partial_{\alpha \beta \gamma} w^0 + \\
&+ \underline{\langle g B^{\alpha \beta \gamma \delta} \rangle} \partial_{\alpha \beta \gamma \delta} w^0 + (\underline{\langle (\partial_{11} g)^2 B^{1 1 1 1} \rangle} + \\
&+ r^{-2} \underline{\langle (g)^2 D^{1 1 1 1} \rangle}) W + (2 \underline{\langle \partial_{11} g B^{1 1 \beta \delta} g^B \rangle} + \\
&- 4 \underline{\langle (\partial_{11} g)^2 B^{1 \beta 1 \delta} \rangle}) \partial_{\beta \delta} W + \underline{\langle (g)^2 B^{\alpha \beta \gamma \delta} \rangle} \partial_{\alpha \beta \gamma \delta} W,
\end{aligned} \tag{12}$$

- the dynamic equilibrium equations

$$\begin{aligned}
\partial_\beta N^{\alpha \beta} - \underline{\langle \mu \rangle} a^{\alpha \beta} \ddot{u}_\beta^0 + \underline{\langle f^\alpha \rangle} &= 0, \quad \partial_{\alpha \beta} M^{\alpha \beta} + r^{-1} N^{1 1} + \underline{\langle \mu \rangle} \ddot{w}^0 - \underline{\langle f \rangle} = 0, \\
\underline{\langle \mu (h)^2 \rangle} a^{\alpha \beta} \ddot{U}_\alpha + H^\beta - \underline{\langle f^\beta h \rangle} &= 0, \quad \underline{\langle \mu (g)^2 \rangle} \ddot{W} + G - \underline{\langle fg \rangle} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

In equations (11)-(13) the underlined terms depend on a cell size  $\lambda$ .

Equations (11)-(13) together with *micro-macro decomposition* (9) constitute the *general tolerance model of selected dynamic problems for the micro-heterogeneous uniperiodic shells under consideration*.

#### 4.2. Discussion of results

The characteristic features of the derived *general tolerance model* are:

- In contrast to starting equations (3) with discontinuous, highly oscillating and periodic coefficients, the tolerance model equations (11)-(13) proposed here *have constant coefficients depending also on a cell size* (underlined terms). Hence, the tolerance model makes it possible to *describe the effect of a period length on the global shell behaviour*.
- Unknown macrodisplacements  $u_\alpha^0, w^0$  and fluctuation amplitudes  $U_\alpha, W$  of the tolerance model equations must be *weakly slowly-varying functions* in periodicity direction. *This requirement can be verified only a posteriori and it determines the range of the physical applicability of the model.*

- The number and form of boundary/initial conditions for the basic unknowns of the tolerance model are the same as in the classical shell theory governed by equations (3).
- Decomposition (9) and hence also resulting tolerance model equations (11)-(13) are uniquely determined by the postulated *a priori* periodic *fluctuations shape functions*  $h(x) \in FS^1(\Omega, \Delta)$ ,  $h \in O(\lambda)$ , and  $g(x) \in FS^2(\Omega, \Delta)$ ,  $g \in O(\lambda^2)$ , representing oscillations inside a cell. These functions can be obtained as exact or approximate solutions to certain periodic eigenvalue problems describing free periodic vibrations of the cell, cf. [3]. It means that they represent either the principal modes of free periodic vibrations of the cell or physically reasonable approximation of these modes.
- The resulting equations involve terms with time and spatial derivatives of the fluctuation amplitudes. Hence, these equations describe certain *time-boundary-layer and space-boundary-layer phenomena* strictly related to the specific form of initial and boundary conditions imposed on unknown fluctuation amplitudes  $U_\alpha, W$ .
- After neglecting in equations (11)-(13) the underlined terms, we obtain the asymptotic model of the shells under consideration. This model is not able to describe the length-scale effect on the overall shell dynamics being independent of a cell size. It is necessary to observe that now equations (13)<sub>3,4</sub> for the fluctuation amplitudes are linear algebraic equations.

### 4.3. Standard tolerance model equations

Let us compare *the general tolerance model* proposed here with the corresponding known *standard tolerance model* presented and discussed in [3], which was derived under assumption that the unknown functions  $u_\alpha^0(x, \xi, t)$ ,  $w^0(x, \xi, t)$ ,  $U_\alpha(x, \xi, t)$ ,  $W(x, \xi, t)$  in micro-macro decomposition (9) are *slowly-varying*. We recall that *the slowly-varying functions* being a subclass of *the weakly slowly-varying functions* are defined by means of (4) and (5). For *the slowly-varying functions* approximate relations (7), (8) hold.

Following [3], *the standard tolerance model* consists of:

- micro-macro decomposition (9) in which *weakly slowly-varying functions*  $u_\alpha^0, U_\alpha \in WSV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $w^0, W \in WSV_\delta^2(\Omega, \Delta)$  are replaced by *slowly-varying functions*  $u_\alpha^0, U_\alpha \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $w^0, W \in SV_\delta^2(\Omega, \Delta)$ ,
- constitutive equations (11) in which  $\lambda$ -depending terms  $\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h \rangle \partial_\delta U_\gamma$  in (11)<sub>1</sub>, and  $\langle B^{\alpha\beta\gamma 1} \partial_1 g \rangle \partial_\gamma W$ ,  $\langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g \rangle \partial_{\gamma\delta} W$  in (11)<sub>2</sub> are replaced respectively by  $\langle D^{\alpha\beta\gamma 2} h \rangle \partial_2 U_\gamma$  and  $\langle B^{\alpha\beta 2 1} \partial_1 g \rangle \partial_2 W$ ,  $\langle B^{\alpha\beta 2 2} g \rangle \partial_{22} W$ ,

- constitutive equations (12) in which  $\lambda$ -depending terms  $\langle h D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_{\alpha\delta} u_\gamma^0$ ,  $\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} (h)^2 \rangle \partial_{\alpha\delta} U_\gamma$ ,  $\langle h D^{\alpha\beta 11} \rangle \partial_\alpha w^0$ ,  $\langle h D^{\alpha\beta 11} g \rangle \partial_\alpha W$  in  $(12)_1$  and  $\langle h D^{11\gamma\delta} g \rangle \partial_\delta U_\gamma$ ,  $\langle \partial_1 g B^{\alpha\beta\gamma 1} \rangle \partial_{\alpha\beta\gamma} w^0$ ,  $\langle g B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_{\alpha\beta\gamma\delta} w^0$ ,  $\langle \partial_{11} g B^{11\beta\delta} \rangle \partial_{\beta\delta} W$ ,  $\langle (\partial_1 g)^2 B^{1\beta 1\delta} \rangle \partial_{\beta\delta} W$ ,  $\langle (g)^2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \partial_{\alpha\beta\gamma\delta} W$  in  $(12)_2$  are replaced respectively by  $\langle h D^{2\beta\gamma\delta} \rangle \partial_{2\delta} u_\gamma^0$ ,  $\langle D^{2\beta\gamma\delta} (h)^2 \rangle \partial_{22} U_\gamma$ ,  $\langle h D^{2\beta 11} \rangle \partial_2 w^0$ ,  $\langle h D^{2\beta 11} g \rangle \partial_2 W$  and  $\langle h D^{11\gamma 2} g \rangle \partial_2 U_\gamma$ ,  $\langle \partial_1 g B^{\alpha\beta 21} \rangle \partial_{\alpha\beta 2} w^0$ ,  $\langle g B^{\alpha\beta 22} \rangle \partial_{\alpha\beta 22} w^0$ ,  $\langle \partial_{11} g B^{11 22} \rangle \partial_{22} W$ ,  $\langle (\partial_1 g)^2 B^{12 12} \rangle \partial_{22} W$ ,  $\langle (g)^2 B^{22 22} \rangle \partial_{22 22} W$ ,
- the dynamic equilibrium equations having form of equations (13).

It can be observed that the constitutive equations of the standard model do not involve derivatives of amplitude fluctuations  $U_\alpha, W$  with respect to argument  $x$ . It arises from tolerance relations (8), which hold for the slowly-varying functions.

From comparison of both the general and the standard tolerance models it follows that the general model equations (11)-(13) contain a bigger number of terms depending on the microstructure size than the standard model equations. So, the general model proposed in this contribution allows us to investigate the length-scale effect in more detail.

It can be observed that for the standard model, the boundary conditions for unknown fluctuation amplitudes  $U_\alpha, W$  should be defined only on boundaries  $\xi = 0$ ,  $\xi = L_2$  whereas in the framework of the general model the boundary conditions for  $U_\alpha, W$  should be defined on all boundaries of the shell. It means that for open cylindrical shell, applying the general model we can investigate *the space-boundary-layer phenomena* near all boundaries of the shell whereas within the standard model we can analyse these phenomena only near boundaries  $\xi = 0$ ,  $\xi = L_2$ .

#### 4.4. Combined asymptotic-tolerance model equations

Let us compare *the general tolerance model* proposed here with the corresponding *general combined asymptotic-tolerance model* of uniperiodic shells under consideration which is presented and discussed in [7].

In the general case, the asymptotic and tolerance modelling procedures are discussed independently each other. In paper [7], these two techniques are combined together into a new *combined modelling procedure*.

Following [7], the combined model consists of:

- *Asymptotic (macroscopic) model equations* formulated by applying the *consistent asymptotic procedure*, cf. [5], and having constant coefficients being independent of a cell size. After eliminating fluctuation amplitudes  $U_\alpha(x, \xi, t)$ ,  $W(x, \xi, t)$  by means of  $U_\gamma = -(G^{-1})_{\gamma\eta} [\langle \partial_1 h D^{1\eta\mu\vartheta} \rangle \partial_\vartheta u_\mu^0 + r^{-1} \langle \partial_1 h D^{1\eta 11} \rangle w^0]$  and  $W = -E^{-1} \langle \partial_{11} g B^{11\gamma\delta} \rangle \partial_{\gamma\delta} w^0$ , the asymptotic equations are expressed only in macrodisplacements  $u_\alpha^0, w^0$

$$\begin{aligned} D_h^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\beta\delta} u_\gamma^0 + r^{-1} D_h^{\alpha\beta 11} \partial_\beta w^0 - \langle \mu \rangle a^{\alpha\beta} \ddot{u}_\beta^0 + f^\alpha &= 0, \\ B_g^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta\gamma\delta} w^0 + r^{-1} D_h^{11\gamma\delta} \partial_\delta u_\gamma^0 + r^{-2} D_h^{1111} w^0 + \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 - \langle f \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

where  $D_h^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - \langle D^{\alpha\beta\eta 1} \partial_1 h \rangle (G^{-1})_{\eta\zeta} \langle \partial_1 h D^{1\zeta\gamma\delta} \rangle$  and  $B_g^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - \langle B^{\alpha\beta 11} \partial_{11} g \rangle (E^{-1}) \langle \partial_{11} g B^{11\gamma\delta} \rangle$  with  $G_{\alpha\gamma} = \langle D^{\alpha 1\gamma 1} (\partial_1 h)^2 \rangle$  and  $E = \langle B^{1111} (\partial_{11} g)^2 \rangle$ .

- *Microscopic model equations* imposed on the known solutions  $u_\alpha^0, w^0$  obtained in the framework of the asymptotic model and derived by applying an extended version of the tolerance modelling technique, cf. [6]. Setting  $u_{0\alpha} = u_\alpha^0 + h U_\alpha$  and  $w_0 = w^0 + g W$ , we obtain the following form of the *superimposed microscopic model equations*

$$\begin{aligned} \langle D^{\alpha\beta\lambda\delta} c^2 \rangle \partial_{\beta\gamma} Q_\delta - \langle D^{\alpha 1\gamma 1} (\partial_1 c)^2 \rangle Q_\gamma - \langle \mu c^2 \rangle a^{\alpha\beta} \ddot{Q}_\beta + \langle f^\alpha h \rangle &= \\ = r^{-1} \langle D^{\alpha\beta 11} \partial_1 c w_0 \rangle + \langle D^{\alpha\beta\gamma 1} \partial_1 c \partial_\beta u_{0\gamma} \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} b^2 \rangle \partial_{\alpha\beta\gamma\delta} V + [2 \langle B^{\alpha\beta 11} b \partial_{11} b \rangle - 4 \langle B^{\alpha\beta 11} (\partial_1 b)^2 \rangle] \partial_{\alpha\beta} V + \\ + \langle B^{1111} (\partial_{11} b)^2 \rangle V + \langle \mu b^2 \rangle \ddot{V} - \langle fg \rangle = - \langle B^{\alpha\beta 11} \partial_{11} b \partial_{\alpha\beta} w_0 \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

where  $Q_\alpha \in WSV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ ,  $V \in WSV_\delta^2(\Omega, \Delta)$  are *new unknown weakly slowly-varying fluctuation amplitudes* and  $c(\cdot) \in FS^1(\Omega, \Delta)$ ,  $b(\cdot) \in FS^2(\Omega, \Delta)$  are the *new known periodic highly oscillating fluctuation shape functions*. Coefficients of the tolerance model are *constant* and some of them *depend on a cell size* (underlined terms). The right-hand sides of (15), (16) are known under assumption that  $u_{0\alpha}$ ,  $w_0$  have been determined in the framework of asymptotic model.

- *Decomposition of displacement fields*  $u_\alpha(x, \xi, t)$ ,  $w(x, \xi, t)$  in  $\Omega \times \Xi \times I$

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, \xi, t) &= u_\alpha^0(x, \xi, t) + h(x) U_\alpha(x, \xi, t) + c(x) Q_\alpha(x, \xi, t), \\ w(x, \xi, t) &= w^0(x, \xi, t) + g(x) W(x, \xi, t) + b(x) V(x, \xi, t), \end{aligned}$$

where functions  $u_\alpha^0, U_\alpha, w^0, W$  have to be obtained in the first step of combined modelling, i.e. in the framework of the asymptotic modelling.

From comparison of both the general tolerance and the general combined asymptotic-tolerance models it follows that tolerance model equations (11)-(13) proposed in this contribution contain a bigger number of terms depending on the microstructure size than the combined model equations (14)-(16) recalled here following [7]. Thus, the general tolerance model proposed in this paper allows us to investigate the length-scale effect in more detail.

It can be shown, that neglecting the external forces and under special conditions imposed on the fluctuation shape functions we can obtain superimposed microscopic model equations, which are independent of the solutions obtained in the framework of the macroscopic model, cf. [7]. It means, that *an important advantage of the combined model is that it makes it possible to separate the macroscopic description of some special problems from the microscopic description of these problems.*

## 5. Final remarks and conclusions

The tolerance modelling technique based on the notion of *weakly slowly-varying function*, cf. [6], is proposed as a tool to derive a new mathematical non-asymptotic averaged model for the analysis of selected dynamic problems for thin cylindrical shells with micro-periodic structure in circumferential direction.

Contrary to “exact” shell equations (3) with highly oscillating non-continuous periodic coefficients, the tolerance model equations (11)-(13) have constant coefficients depending also on a cell size. Hence, this model makes it possible *to describe the effect of a length scale on the global shell behaviour.*

*The general tolerance model equations (11)-(13) formulated in this contribution contain a bigger number of terms depending on the microstructure size than the standard tolerance model equations presented in [3], which were derived applying the concept of slowly-varying function.* Moreover, the tolerance model with *the weakly slowly-varying unknowns* proposed here allows us to investigate the length-scale effect in more detail than *the combined asymptotic-tolerance model* formulated in [7], which was also derived using the concept of *weakly slowly-varying function.*

The basic unknowns of the general tolerance model equations must be *the weakly slowly-varying functions* in periodicity direction. This requirement can be verified only *a posteriori.*

## References

- [1] Lewiński T., Telega J.J: Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization, World Scientific Publishing Company, Singapore 2000.
- [2] Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Manevitch L.: Asymptotical mechanics of thin-walled structures, Springer, Berlin 2004.
- [3] Tomczyk B.: Length-scale effect in dynamics and stability of thin periodic cylindrical shells, Bulletin of the Lodz University of Technology, No. 1166, series: Scientific Dissertations, Lodz University of Technology Press, Lodz 2013.
- [4] Woźniak C., Michalak B., Jędrzyak J. (eds.): Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach, Lodz University of Technology Press, Lodz 2008.
- [5] Woźniak C., et al. (eds.): Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media, Silesian Technical University Press, Gliwice 2010.
- [6] Tomczyk B., Woźniak C.: Tolerance models in elastodynamics of certain reinforced thin-walled structures, in: Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (eds.), Statics, dynamics and stability of structural elements and systems, vol. 2, Lodz University of Technology Press, Lodz 2012, pp. 123-153.
- [7] Tomczyk B.: A new combined model of dynamic problems for thin uniperiodic cylindrical shells, in: Kleiber M. et al. (eds.), Advances in mechanics, CRC Press/Balkema (Taylor & Francis Group), London 2016, pp. 581-585.
- [8] Kaliski S.: Vibrations, PWN-Elsevier, Warsaw-Amsterdam 1992.

## NOWY MODEL TOLERANCYJNY DO ANALIZY DRGAŃ CIENKICH MIKROPERIODYCZNYCH POWŁOK WALCOWYCH

### Streszczenie

Przedmiotem rozważań są cienkie liniowo-sprężyste powłoki walcowe typu Kirchhoffa-Love'a mające periodycznie mikro-niejednorodną strukturę w kierunku obwodowym. Powłoki takie nazywamy *uniperiodycznymi*. Celem pracy jest sformułowanie nowego, nieasymptotycznego, uśrednionego modelu służącego do analizy wybranych zagadnień dynamiki takich powłok. Przedstawiony *ogólny model tolerancyjny* wyprowadzony jest w oparciu o pewną zmodyfikowaną wersję znanej techniki tolerancyjnego modelowania struktur mikro-niejednorodnych. Wersja ta bazuje na nowym pojęciu *funkcji słabo wolno-zmiennej*. W przeciwieństwie do równań wyjściowych dla analizowanych powłok niejednorodnych mających współczynniki periodyczne, silnie oscylujące i nieciągłe, równania modelu tolerancyjnego mają stałe współczynniki. Ponadto, współczynniki te zależą od parametru długości mikrostruktury. Tym samym umożliwiają badanie efektu skali.

**Słowa kluczowe:** powłoka uniperiodyczna, modelowanie matematyczne, funkcja słabo wolno-zmienna, zagadnienia dynamiki, efekt skali

*Przesłano do redakcji: 24.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Krystyna KUŹNIAR<sup>1</sup>  
Maciej ZAJĄC<sup>2</sup>

## ODPOWIEDŹ DYNAMICZNA BUDYNKU MIESZKALNEGO PO TERMOMODERNIZACJI NA WSTRZĄSY POCHODZENIA GÓRNICZEGO

Budynki prefabrykowane, wzniesione w drugiej połowie dwudziestego wieku, nadal stanowią liczną grupę wśród budynków mieszkalnych w Polsce. W ostatnich latach, w wyniku nowych wymagań dotyczących ochrony środowiska oraz właściwości cieplnych budynków, obiekty te są modernizowane. Wprowadzane zmiany dotyczą głównie izolacyjności cieplnej ścian zewnętrznych. W typowych technologiach zwiększeniu ulega grubość ściany poprzez wprowadzenie dodatkowych warstw styropianu, wełny mineralnej, zbrojonej zaprawy, siatki z włókna szklanego. Termomodernizacja budynku skutkuje zatem zwiększeniem jego masy i może zmienić sztywność konstrukcji. W niniejszej pracy analizowano wpływ wykonanej termomodernizacji prefabrykowanego, wysokiego budynku mieszkalnego zlokalizowanego w obszarze jednego z najbardziej aktywnych sejsmicznie regionów górniczych w Polsce – Legnicko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego, na jego odpowiedź dynamiczną na działanie wstrząsów górniczych. W obliczeniach wykorzystano metodę elementów skończonych. Rozważano użycie do modelowania ścian przed i po termomodernizacji modelu wielowarstwowego oraz prostego modelu jednowarstwowego o zastępczych, uśrednionych parametrach. Otrzymane wyniki obliczeń wskazują, że termomodernizacja rozważanego budynku praktycznie nie zmienia wartości częstotliwości drgań własnych tej konstrukcji i odpowiedzi na wymuszenie parasejsmiczne w postaci wstrząsów górniczych.

**Słowa kluczowe:** budynek prefabrykowany, model numeryczny, wstrząsy górnicze, drgania budynku, izolacja cieplna budynku, termomodernizacja

### 1. Wprowadzenie

Budynki prefabrykowane, wzniesione w drugiej połowie dwudziestego wieku, nadal stanowią bardzo liczną klasę budynków mieszkalnych w Polsce.

W ostatnich latach, w wyniku nowych wymagań (przepisów) dotyczących ochrony środowiska oraz właściwości cieplnych budynków, obiekty te są mo-

<sup>1</sup> Autor do korespondencji: Krystyna Kuźniar, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Instytut Techniki, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, tel. 126626339; kkuźniar@up.krakow.pl

<sup>2</sup> Maciej Zajac, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Instytut Techniki, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, tel. 126626339; mjzajac@up.krakow.pl



dernizowane. Wprowadzane zmiany dotyczą głównie izolacyjności cieplnej ścian zewnętrznych. W typowych technologiach zwiększeniu ulega grubość ściany poprzez wprowadzenie dodatkowych warstw styropianu, wełny mineralnej, zbrojonej zaprawy, siatki z włókna szklanego. Termomodernizacja budynku skutkuje zatem zwiększeniem jego masy i może zmienić sztywność konstrukcji.

W niniejszej pracy analizowano wpływ wykonanej termomodernizacji prefabrykowanego, wysokiego budynku mieszkalnego zlokalizowanego w obszarze jednego z najbardziej aktywnych sejsmicznie regionów górniczych w Polsce – Legnicko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego (LGOM), na jego odpowiedź dynamiczną na działanie wstrząsów górniczych. W obliczeniach wykorzystano metodę elementów skończonych. Rozważano użycie do modelowania ścian przed i po termomodernizacji modelu wielowarstwowego oraz prostego modelu jednowarstwowego o zastępczych, uśrednionych parametrach.

## 2. Analizowany budynek

Analizowany budynek jest typowym w LGOM, wysokim (12-kondygnacyjnym), prefabrykowanym (wielkopłytowym) budynkiem mieszkalnym. Składa się z dwóch oddylatowanych części: jedno- i dwuklatkowej. Obie części są podpiwniczone, posadowione na ławach fundamentowych. Obiekt wzniesiono w poprzeczno-podłużnym układzie ścian nośnych. Wysokość kondygnacji wynosi 2,7m.

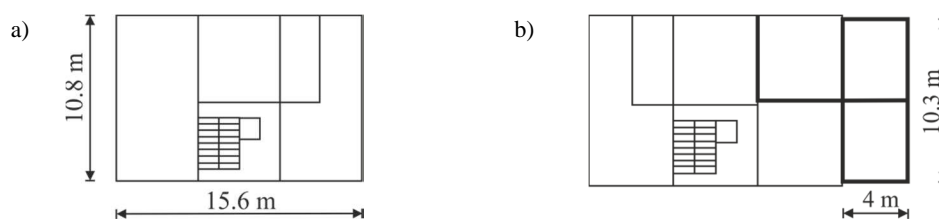
Z uwagi na oddziaływania w postaci wstrząsów górniczych, konstrukcja budynku została wzmocniona poprzez wprowadzenie dodatkowych przęseł wykonanych w technologii betonu monolitycznego, przylegających do ścian szczytowych oraz wzmocnienia ścian wewnętrznych w skrajnych segmentach. Wzmocnienie sięga do poziomu 7 i 10 kondygnacji odpowiednio w części jednoklatkowej i dwuklatkowej. Dobudowane części posadowione są na fundamentach płytowych. Na rys. 1 pokazano widok rozważanego budynku, a na rys. 2 schematycznie przedstawiono rzuty poziome segmentów budynku: segmentu typowego i wzmocnionego.

Każda z prefabrykowanych ścian zewnętrznych składa się z trzech warstw: nośnej, izolacji termicznej i warstwy elewacyjnej. W ramach termomodernizacji budynku, wprowadzono kolejne warstwy, które złożone są z warstw styropianu, siatki z włókna szklanego, zaprawy klejowo-szpachlowej. Układ warstw w ścianie prefabrykowanej przed dociepleniem oraz po dołożeniu warstw izolacji cieplnej pokazano na rys. 3, a w tabeli 1 podano grubości i parametry materiałowe poszczególnych warstw.



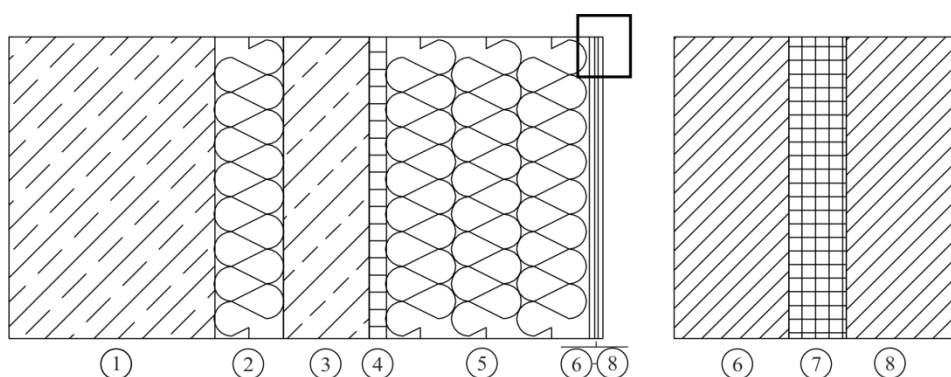
Rys.1. Widok analizowanego budynku

Fig. 1. Analysed building – view



Rys. 2. Segmenty budynku: a) typowy; b) po wzmocnieniu

Fig. 2. Building segments: a) typical; b) after reinforcement



Rys. 3. Ściana budynku: 1-3 – warstwy ściany prefabrykowanej, 4-8 – warstwy izolacji cieplnej

Fig. 3. Building's wall: 1-3 – layers of prefabricated wall, 4-8 – thermal insulation layers

Tabela 1. Parametry materiałowe warstw, na podstawie [1, 2, 3]

Table 1. Material parameters of layers, based on [1, 2, 3]

Nr warstwy	Materiał	Grubość [cm]	$E$ [GPa]	$\nu$ [-]
1	żelbet	12	20	0,2
2	styropian	4	0,003	0,07
3	beton fakturowy	5	20	0,2
4	zaprawa klejowo -szpachlowa	1	20	0,2
5	styropian	10	0,003	0,07
6	zaprawa klejowo - szpachlowa	0,2	20	0,2
7	siatka z włókna szklanego	0,1	66	0,23
8	zaprawa klejowo - szpachlowa	0,2	20	0,2

### 3. Model numeryczny

Model numeryczny budynku (rys. 4) wykonano w programie Ansys z wykorzystaniem 4-węzłowych elementów skończonych typu SHELL o 6 stopniach swobody [4]. Wpływ złączy w ścianach prefabrykowanych na sztywność konstrukcji uwzględniono poprzez redukcję modułu sprężystości elementów konstrukcyjnych. W obliczeniach uwzględniono podatność podłoża oraz przyjęto liniowo-sprężyste modele materiałowe.

Wielowarstwowość ścian zewnętrznych przed i po termomodernizacji modelowano na dwa sposoby z użyciem modelu A i modelu B ściany. W modelu A wykorzystano element wielowarstwowy SHELL181 [4], umożliwiający uwzględnienie w obliczeniach parametrów każdej warstwy z osobna (model dokładny). Natomiast model B jest prostym modelem jednowarstwowym o zastępczych, uśrednionych parametrach – module Younga ( $E_{eqv}$ ) i współczynnika Poissona ( $\nu$ ), wyliczanych odpowiednio według wzorów (1) i (2):

$$E_{eqv} = \frac{\sum_i E_i \cdot d_i}{\sum_i d_i} \quad (1)$$

$$\nu_{eqv} = \frac{\sum_i \nu_i \cdot d_i}{\sum_i d_i} \quad (2)$$

gdzie:  $E_{eqv}$ ,  $\nu_{eqv}$  – odpowiednio zastępczy moduł Younga i współczynnik Poissona dla całego modelu,

$E_i$ ,  $\nu_i$  – moduł Younga i współczynnik Poissona poszczególnych, kolejnych warstw,

$d_i$  – grubość danej warstwy.



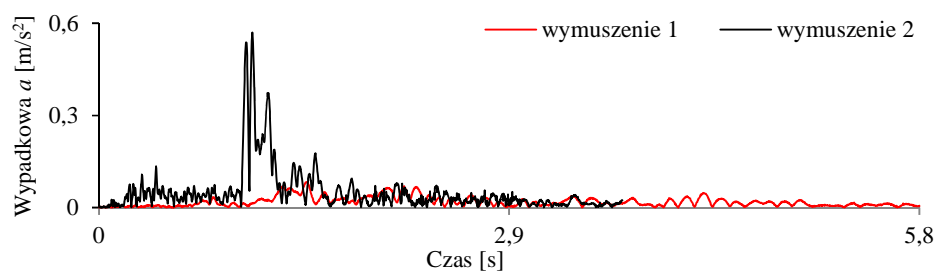
Rys. 4. Model MES analizowanego budynku

Fig. 4. FE model of the analysed building

#### 4. Analizowane wymuszenia drgań od wstrząsów górniczych

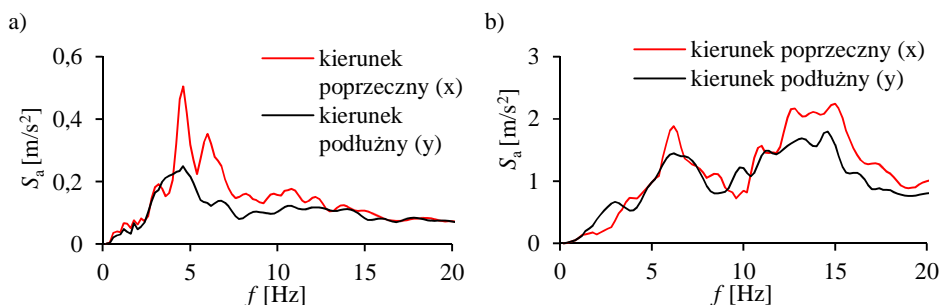
Źródłem zarejestrowanych wymuszeń kinematycznych (na fundamencie) drgań rozważanego budynku były wstrząsy pochodzenia górniczego, które wystąpiły w LGOM. Do analizy wzięto dwa wstrząsy wysokoenergetyczne o energiach rzędu  $10^8$  J. Odległość epicentralna pierwszego z nich wynosiła ponad 2,5km, a drugiego ok. 700m. Uwagę skupiono na składowych przebiegów przyspieszeń drgań w dwóch kierunkach drgań poziomych: x i y, równoległych odpowiednio do osi poprzecznej i podłużnej budynku.

Na rys. 5 pokazano przebiegi wypadkowych poziomych przyspieszeń drgań wymuszenia 1 i wymuszenia 2, a na rys. 6 – odpowiednie przyspieszeniowe spektra odpowiedzi od drgań składowych. Widać, że w wymuszeniu 1 dominują stosunkowo niskie częstotliwości, natomiast w wymuszeniu 2 zauważyć można dwa pasma dominujących częstotliwości.



Rys. 5. Przebiegi wypadkowych poziomych przyspieszeń drgań – wymuszenia

Fig. 5. Records of resultant acceleration of horizontal vibrations – excitations



Rys. 6. Przyspieszeniowe spektra odpowiedzi  $S_a$ : a) wymuszenie 1, b) wymuszenie 2

Fig. 6. Acceleration response spectra  $S_a$ : a) excitation 1, b) excitation 2

## 5. Wyniki obliczeń

W tabeli 2 porównano obliczone i wyznaczone doświadczalnie częstotliwości poziomych drgań własnych budynku przed i po termomodernizacji. Z kolei na rys. 7 – rys. 10 porównano wybrane przebiegi przyspieszeń poziomych drgań składowych (kier. x, kier. y) budynku przed i po termomodernizacji, wyznaczone z użyciem modelu A oraz modelu B.

Mimo zwiększenia masy obiektu na skutek wprowadzenia dodatkowych warstw termomodernizacyjnych, wartości częstotliwości drgań własnych budynku i jego odpowiedzi dynamiczne na oddziaływania paraseismiczne (wstrząsy górnicze) praktycznie nie różnią się od tych wyznaczonych dla budynku przed termomodernizacją. Pewnym wyjaśnieniem tego efektu może być fakt, że dokładane w procesie termomodernizacji budynku elementy niekonstrukcyjne poza tym, że stanowią „balast” dla konstrukcji, mogą też istotnie wpływać na zwiększenie sztywności obiektów i dalej na ich charakterystyki dynamiczne [7, 8].

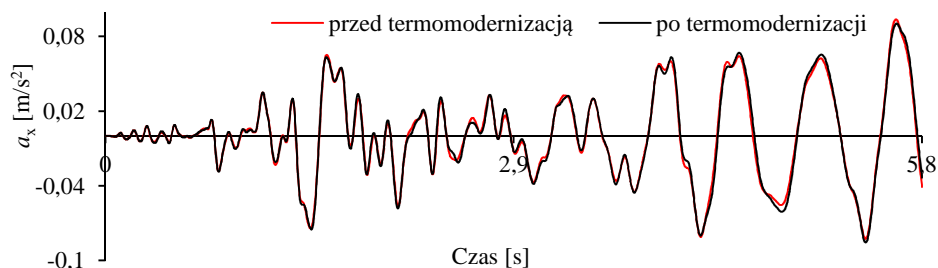
Tabela 2. Porównanie obliczonych i wyznaczonych doświadczalnie częstotliwości poziomych drgań własnych budynku przed i po termomodernizacji

Table 2. Comparison of the computed and experimental values of natural frequencies of horizontal vibrations of the building before and after thermo-modernization

Częstotliwość poziomych drgań własnych budynku $f$ [Hz]						
Kierunek drgań	Przed termomodernizacją			Po termomodernizacji		
	Z pomiarów [5, 6]	Obliczone		Z pomiarów	Obliczone	
		model A	model B		model A	model B
Poprzeczny (x)	1,56 – 1,71	1,80	1,82	1,50 – 1,64	1,80	1,82
Podłużny (y)	2,06 – 2,28	2,49	2,52	2,08 – 2,27	2,49	2,53

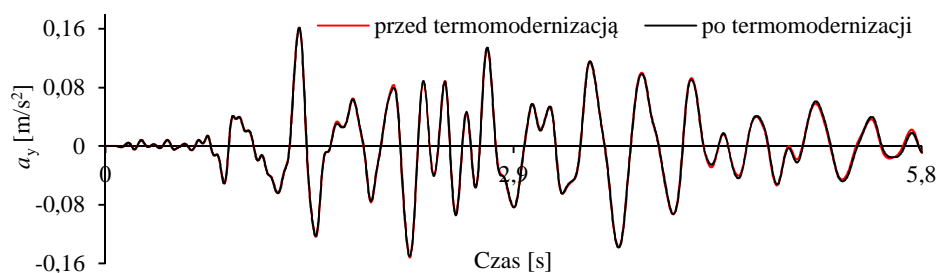
Różnice w wartościach częstotliwości drgań własnych rozważanego budynku obliczonych z użyciem modelu wielowarstwowego A i jednowarstwowego

modelu B (tabela 2), zarówno w przypadku budynku przed termomodernizacją, jak i po zwiększeniu izolacyjności cieplnej ścian zewnętrznych, są nieznaczne.



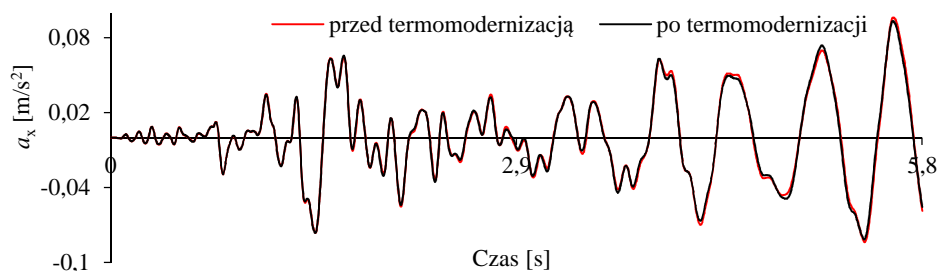
Rys. 7. Porównanie przebiegów przyspieszeń poziomych drgań budynku w kierunku poprzecznym (x) przed i po termomodernizacji – wymuszenie 1, model A

Fig. 7. Comparison of records of horizontal accelerations of building vibrations in transverse direction (x) before and after thermo-modernization – excitation 1, model A



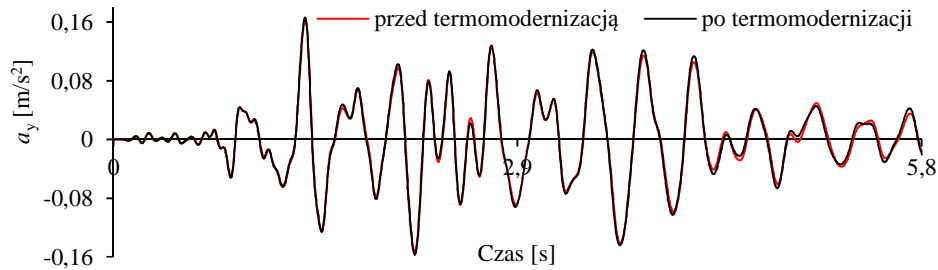
Rys. 8. Porównanie przebiegów przyspieszeń poziomych drgań budynku w kierunku podłużnym (y) przed i po termomodernizacji – wymuszenie 1, model A

Fig. 8. Comparison of records of horizontal accelerations of building vibrations in longitudinal direction (y) before and after thermo-modernization – excitation 1, model A



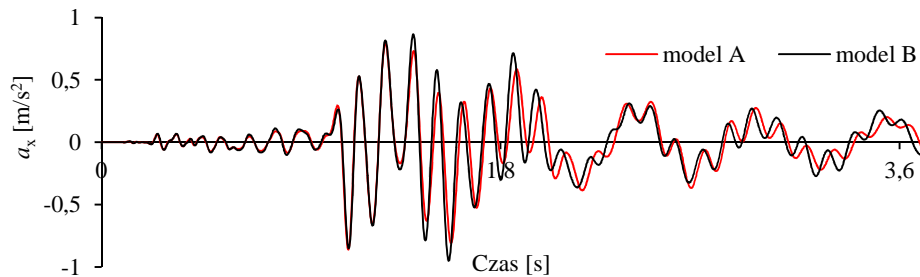
Rys. 9. Porównanie przebiegów przyspieszeń poziomych drgań budynku w kierunku poprzecznym (x) przed i po termomodernizacji – wymuszenie 1, model B

Fig. 9. Comparison of records of horizontal accelerations of building vibrations in transverse direction (x) before and after thermo-modernization – excitation 1, model B



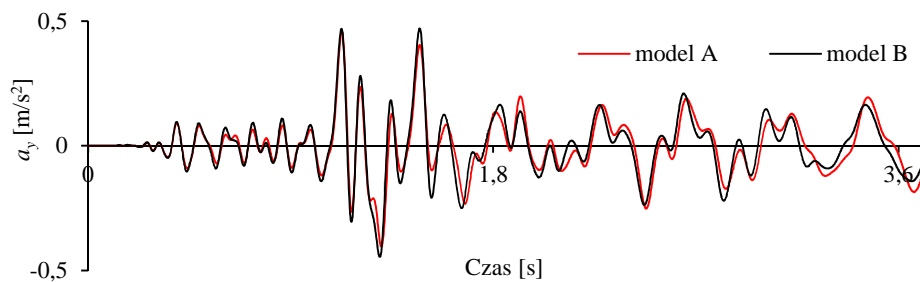
Rys. 10. Porównanie przebiegów przyspieszeń poziomych drgań budynku w kierunku podłużnym (y) przed i po termomodernizacji – wymuszenie 1, model B

Fig. 10. Comparison of records of horizontal accelerations of building vibrations in longitudinal direction (y) before and after thermo-modernization – excitation 1, model B



Rys. 11. Porównanie przebiegów przyspieszeń poziomych drgań budynku w kierunku poprzecznym (x) wyznaczonych z użyciem modeli A i B budynku przed termomodernizacją, wymuszenie 2

Fig. 11. Comparison of records of horizontal accelerations of vibrations in transverse direction (x) determined using A and B models of the building before thermo-modernization, excitation 2



Rys. 12. Porównanie przebiegów przyspieszeń poziomych drgań budynku w kierunku podłużnym (y) wyznaczonych z użyciem modeli A i B budynku po termomodernizacji, wymuszenie 2

Fig. 12. Comparison of records of horizontal accelerations of vibrations in longitudinal direction (y) determined using A and B models of the building after thermo-modernization, excitation 2

Również za pomijalnie małe w praktyce można uznać różnice w wyznaczonych numerycznie z wykorzystaniem modeli A i B odpowiedziach budynku przed i po termomodernizacji na wymuszenia generowane wstrząsami górnymi, co przykładowo ilustrują rys. 11 i rys. 12.

## 6. Uwagi końcowe

Otrzymane wyniki obliczeń wskazują, że termomodernizacja rozważanego prefabrykowanego, wysokiego budynku mieszkalnego praktycznie nie zmienia wartości częstotliwości poziomych drgań własnych tej konstrukcji oraz jej odpowiedzi dynamicznej na wymuszenie parasejsmiczne w postaci wstrząsów górniczych.

Stwierdzono ponadto, że zastosowanie w obliczeniach bardzo prostego modelu ściany o zastępczych parametrach (moduł Younga i ułamek Poissona) prowadzi do wyników bardzo bliskich uzyskanym z użyciem modelu wielowarstwowego, a pozwala na redukcję wysiłku numerycznego. Zatem taki prosty model można byłoby rekomendować do obliczeń dotyczących tak dużych konstrukcji, o bardzo dużej liczbie stopni swobody, jakimi są prefabrykowane budynki mieszkalne.

Obliczenia do pracy wykonano z wykorzystaniem Infrastruktury PLGrid.

## Literatura

- [1] Dzierżewicz Z., Starosolski W.: Systemy budownictwa wielkopłytkowego w Polsce w latach 1970-1985, Wolters Kluwer Polska, Warszawa 2010.
- [2] Bathurst R. J., Zarnani S., Gaskinszósty A.: Shaking table testing of geofoam seismic buffers, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier, 27(4), 2007, s. 324-332.
- [3] Hartman D., Greenwood M. E., Miller D. M.: High Strength Glass Fibres, AGY Technical Paper, USA, 2006.
- [4] Release 11.0 Documentation for Ansys 2007.
- [5] Maciąg E., Kowalski W.: Ocena zmian cech dynamicznych budynków podlegających działaniom wstrząsów górniczych, *ZN Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika*, 60, 2002, s. 405-414.
- [6] Kowalski W.: Wyznaczanie sił sejsmicznych w budynkach podlegającym wstrząsom górnym, *Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska*, 1997.
- [7] Maciąg E., Kuźniar K.: Wpływ elementów niekonstrukcyjnych na częstotliwości drgań własnych ścianowych budynków prefabrykowanych, *Inżynieria i Budownictwo*, nr 10, 1993, s. 423-425.
- [8] Kowalska A.: Analiza wpływu elementów niekonstrukcyjnych na charakterystyki dynamiczne budynków, *Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska*, 2007.



## **DYNAMIC RESPONSE OF APARTMENT BUILDING AFTER THERMO-MODERNIZATION ON MINE-INDUCED ROCKBURSTS**

### **S u m m a r y**

Prefabricated buildings erected in the second half of the twentieth century still constitute a large group of apartment buildings in Poland. Nowadays, as a result of new environmental regulations as well as the necessity to improve energy properties they are modernized. These changes mainly concern thermal insulation of external walls. Application of typical technologies results in increasing of the walls thickness by adding the extra layers of styrofoam, rock or mineral wool, reinforced mortar, glass fibre textile mesh. Therefore such thermo-modernization causes increasing of the building mass and can change the stiffness of structure.

In this paper the influence of the performed thermo-modernization of the prefabricated, high-rise, apartment building located in the area of the one of the most seismically active mining region in Poland – Legnica-Glogow Copperfield, on the mine-induced building dynamic response. Numerical calculations were carried out using finite element method software. A multi-layer model as well as simple one layer model with equivalent parameters were taken into consideration for modelling the walls before and after thermo-modernization. The results of calculations indicate that the thermo-modernization of the considered building practically does not change the values of frequencies of natural vibrations and the dynamic response on the mine-induced excitations of the structure.

**Keywords:** prefabricated building, numerical model, mining tremors, building vibrations, building thermal insulation, thermo-modernization

*Przesłano do redakcji: 28.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Tomasz SIWOWSKI<sup>1</sup>  
 Mateusz RAJCHEL<sup>2</sup>  
 Damian KALETA<sup>3</sup>

## CHARAKTERYSTYKA DYNAMICZNA MOSTU DROGOWEGO WYKONANEGO Z POLIMEROWYCH KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH FRP

Przęsło kompozytowe mostu drogowego ma zazwyczaj wysoki stosunek obciążeń ruchomych do stałych (ciężaru własnego), co czyni je znacznie bardziej wrażliwym na oddziaływanie poruszających się pojazdów niż mosty konwencjonalne ze stali i betonu. To m.in. powoduje, że charakterystyka dynamiczna przęseł mostów kompozytowych jest obecnie jednym z najważniejszych aspektów, koniecznych do analizy w procesie projektowania, budowy i eksploatacji mostów kompozytowych. W badaniach dynamicznych obiektu mostowego jego charakterystykę otrzymuje się zazwyczaj z bezpośredniego pomiaru przyspieszeń, odkształceń lub przemieszczeń określonych punktów konstrukcji, wymuszonych w czasie rzeczywistym przez poruszające się po nim z różną prędkością pojazdy. Ta metoda została zastosowana również w badaniach pierwszego polskiego mostu drogowego, którego zarówno dźwigary główne jak i płytę pomostu wykonano z kompozytów FRP. Na podstawie pomiarów przemieszczeń wybranych punktów przęsła pod wpływem obciążenia przejeżdżającymi pojazdami wyznaczono podstawowe charakterystyki dynamiczne mostu: współczynniki dynamiczne, częstości drgań własnych oraz współczynnik tłumienia. Otrzymane wartości potwierdziły właściwe parametry dynamiczne mostu kompozytowego w świetle wymagań stawianych drogowym obiektom mostowym w Polsce.

**Słowa kluczowe:** współczynnik dynamiczny, częstość drgań własnych, współczynnik tłumienia, przęsło mostu, kompozyt FRP, badania mostu

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Tomasz Siwowski, Politechnika Rzeszowska, Zakład Dróg i Mostów, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651926; siwowski@prz.edu.pl

<sup>2</sup> Mateusz Rajchel, Politechnika Rzeszowska, Zakład Dróg i Mostów, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651016; mrajchel@prz.edu.pl

<sup>3</sup> Damian Kaleta, Promost Consulting Sp. z o.o. Sp.k., ul. Bohaterów 10 Sudeckiej Dywizji Piechoty 4, 35-307 Rzeszów; tel. 178579155; kaleta@promost.pl

## 1. Wprowadzenie

Pierwsza dekada XXI w. przyniosła znaczące upowszechnienie w budownictwie mostowym nowego materiału konstrukcyjnego, jakim są kompozyty włókniste FRP (ang. *fibre reinforced polymers*). Kompozyty włókniste to materiały powstałe z połączenia włókien syntetycznych (węglowych, szklanych, aramidowych, bazaltowych) oraz polimerów (np. żywicy epoksydowej, poliestrowej, winyloestrowej). Charakteryzują się one zdecydowanie lepszymi własnościami fizycznymi i mechanicznymi niż beton, stal czy drewno, tradycyjne materiały budowlane stosowane w mostownictwie. Z konstrukcyjnego punktu widzenia do największych zalet kompozytów FRP należą m.in.: wysoka wytrzymałość, doskonała trwałość, duża sztywność (w przypadku kompozytu z włókien węglowych) oraz mała masa konstrukcji, a co za tym idzie łatwość i szybkość jej wznoszenia. Jednakże z drugiej strony lekkość konstrukcji kompozytowej wymaga, aby przy jej kształtowaniu i projektowaniu odpowiednią wagę przykładać do jej parametrów dynamicznych.

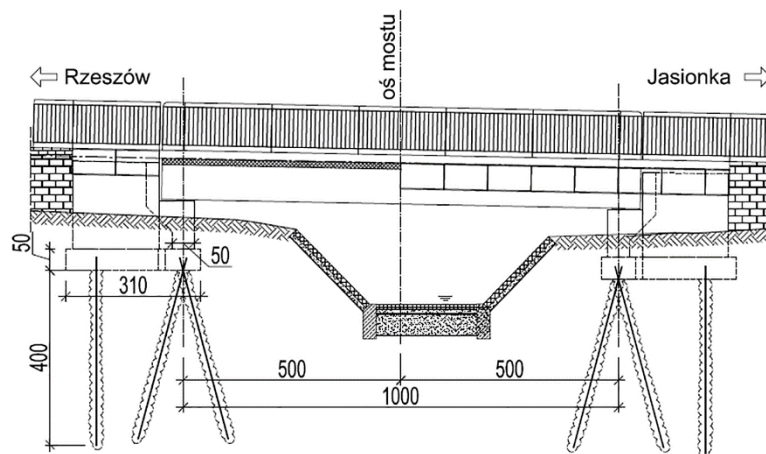
Przęsło kompozytowe mostu drogowego ma zazwyczaj wysoki stosunek obciążeń ruchomych do stałych (ciężaru własnego), co czyni je znacznie bardziej wrażliwym na oddziaływanie poruszających się pojazdów niż przęsła mostów konwencjonalnych. Co więcej, mały ciężar konstrukcji w połączeniu z niższym (np. od betonu) tłumieniem materiałowym kompozytu FRP, może prowadzić do nadmiernych drgań oraz wzrostu poziomu odkształceń i przemieszczeń przęsła wskutek oddziaływań dynamicznych pojazdów. Np. badania kilku amerykańskich mostów kompozytowych wykazały, że tzw. współczynnik dynamiczny dla tych mostów wahał się, w zależności od prędkości i rodzaju pojazdów wymuszających, od 1,71 do 1,93 przy projektowej wartości dopuszczalnej 1,33 [1], [2]. Te cechy mostów kompozytowych powodują, że ich charakterystyka dynamiczna jest jednym z najważniejszych aspektów, koniecznych do analizy w procesie ich projektowania. Drugim ważnym powodem, dla którego ocena parametrów dynamicznych mostów kompozytowych jest bardzo istotna jest fakt, że służy ona jako efektywny sposób identyfikacji zmiany stanu technicznego mostu w czasie. Przy braku sprawdzonych procedur utrzymania i monitoringu stanu mostów kompozytowych, właśnie zmiana charakterystyk dynamicznych konstrukcji, oceniana w określonym przedziale czasowym w jej cyklu życia, jest niezawodnym sposobem identyfikacji zmian konstrukcyjnych.

W badaniach dynamicznych obiektu mostowego jego charakterystykę otrzymuje się zazwyczaj z bezpośredniego pomiaru przyśpieszeń, odkształceń lub przemieszczeń określonych punktów konstrukcji, wymuszonych w czasie rzeczywistym przez poruszające się po nim z różną prędkością pojazdy. Większość znanych z piśmiennictwa charakterystyk dynamicznych mostów kompozytowych została wyznaczona na podstawie obróbki pomiarów, zazwyczaj w dziedzinie częstotliwości [1], [3], [4], [5]. Ta metoda została zastosowana również w badaniach pierwszego polskiego mostu drogowego, którego zarówno dźwiga-

ry główne jak i płytę pomostu wykonano z kompozytów FRP. Na podstawie pomiarów przemieszczeń wyznaczono podstawowe charakterystyki dynamiczne przęsła mostu: współczynniki dynamiczne, częstotliwości drgań własnych oraz współczynnik tłumienia. Otrzymane wartości pozwoliły na weryfikację modelu numerycznego konstrukcji, użytego do jej zaprojektowania, a także potwierdziły jej właściwe parametry dynamiczne w świetle wymagań stawianych drogowym obiektom mostowym w Polsce.

## 2. Opis mostu drogowego z kompozytów FRP

Pierwszy w Polsce most drogowy, którego przęsło wykonano w całości z kompozytów FRP, został zbudowany w miejscowości Nowa Wieś koło Rzeszowa. Most jest położony w ciągu drogi powiatowej i przekracza niewielki potok Czarna. Jest obiektem jednoprzęsłowym, swobodnie podpartym, położonym zgodnie z niweletą i krzywizną drogi w spadku podłużnym 2,1% i jednostronnym spadku poprzecznym 3%. Główne parametry techniczne mostu są następujące: rozpiętość teoretyczna przęsła – 10,0 m; długość całkowita pomostu – 10,7 m; całkowita szerokość mostu – 7,7 m; szerokości użytkowe: jezdnia – 5 m (2×2,5 m), opaska bezpieczeństwa – 2×0,5 m; chodnik – 0,75 ÷ 1,1 m; balustrada z gzymsem – 2×0,25 m. Most ma nośność 30 ton (rys. 1).

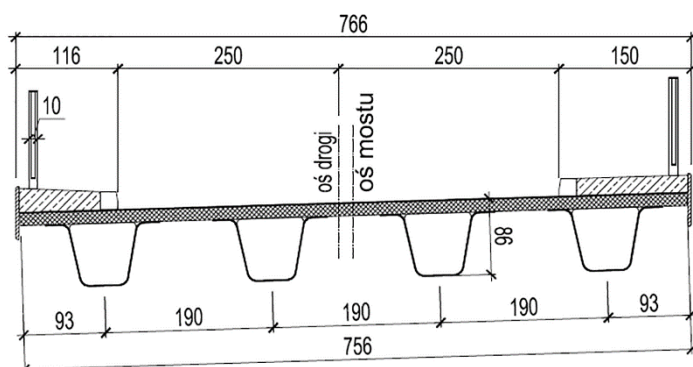


Rys. 1. Widok ogólny mostu kompozytowego w Nowej Wsi

Fig. 1. General view of the FRP composite bridge in Nowa Wies

Przęsło mostu jest wykonane z czterech dźwigarów kompozytowych o przekroju skrzynkowym (typu U) w rozstawie osiowym 1,9 m oraz zespolonej z dźwigarami warstwowej płyty pomostu (rys. 2). Dźwigary główne mają następujące wymiary: wysokość – 0,715 m, szerokość w poziomie pasa górnego – 1,38 m oraz szerokość w poziomie pasa dolnego – 0,60 m. Nominalna grubość laminatów pasa

górnego i dolnego wynosi 15 mm. Środniki dźwigarów są kompozytem warstwowym, składającym się z dwóch zewnętrznych laminatów oraz przekładki z pianki PUR. Grubość całkowita środników wynosi 17 mm. Wnętrze przekrojów skrzynkowych dźwigarów usztywniono przeponami o budowie analogicznej jak środnik i grubości 46 mm w rozstawie 1,25 m. Wszystkie laminaty dźwigarów wykonano w całości z kompozytu na bazie włókien szklanych i żywicy epoksydowej.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny przęsła mostu kompozytowego

Fig. 2. Cross-section of the FRP composite superstructure

Kompozytowa płyta pomostu ma grubość 0,135 m, szerokość 7,56 m i długość 10,7 m. Płyta jest kompozytem warstwowym typu *sandwich*, składającym się z dwóch zewnętrznych laminatów o grubości 11,5 mm każdy oraz przekładki z pianki PUR o wysokości 105 mm i grubości 25 mm, usztywnionej kompozytowymi żebrami wewnętrznymi w postaci laminatów o grubości ok. 1 mm. Na szerokości 1 mb panelu płyty pomostu znajduje się 37 wewnętrznych żeber kompozytowych. Płytę w całości wykonano z kompozytu z włókien szklanych i żywicy epoksydowej. Ze względów transportowych przęsło zostało podzielone po szerokości na trzy części: dwa identyczne tandemy (po 2 dźwigary i odpowiadający im fragment płyty) oraz środkowy, płytowy element scalający. Połączenia podłużne przęsła zlokalizowano w miejscu występowania najmniejszych sił wewnętrznych w płycie, tuż nad pasami górnymi dźwigarów wewnętrznych. Połączenia te wykonywane na budowie. Ograniczenia w procesie wytwarzania elementów montażowych płyty wymusiły jej dodatkowy podział na długości przęsła. Styki poprzeczne płyty wykonano w warsztacie. Wszystkie połączenia w kompozytowym przęśle mostu, tj.: styki płyty pomostu, styki przepon wewnętrznych oraz zespolenie „dźwigary – płyta”, wykonano jako klejone za pomocą kleju na bazie żywicy epoksydowej.

Na kompozytowej płycie pomostu zostały wykonane kapy chodnikowe grubości od 0,15 do 0,18 m, ograniczone od strony jezdni krawężnikami kamiennymi natomiast od strony zewnętrznej deskami gzymsowymi z polimerobe-

tonu. Kapy chodnikowe wykonano z betonu lekkiego LC30/33, zbrojonego prętami kompozytowymi z włókien szklanych i żywicy poliestrowej. Od strony zewnętrznych krawędzi pomostu zamontowano stalowe balustrady systemowe o wysokości 1,1 m. Przyczółki mostu posadowiono na mikropalach o średnicy 110 mm i długości 4,0 m i zatopiono w nasypach dojazdów, które ze względu na ograniczenia terenowe są częściowo umocnione murami oporowymi.

### 3. Schemat badań dynamicznych mostu

Do identyfikacji parametrów dynamicznych mostu zastosowano pomiar przemieszczeń pionowych dźwigarów i płyty pomostu w środku rozpiętości przęsła (rys. 3). Rejestrowano czasowe zmiany wartości przemieszczeń za pomocą czujników indukcyjnych o bazie pomiarowej 50 mm i dokładności odczytu 0,01 mm, zlokalizowanych w sześciu punktach pomiarowych w środku rozpiętości przęsła: czterech pasach dolnych dźwigarów oraz wspornikach płyty pomostu (rys. 4).



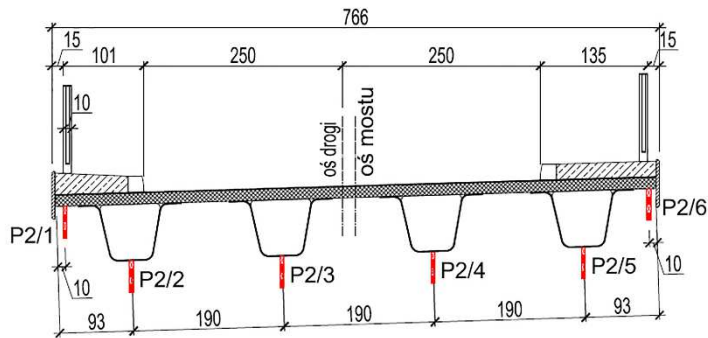
Rys. 3. Stanowisko pomiaru przemieszczeń pionowych dźwigarów

Fig. 3. Set-up of vertical displacement measurement

Obciążenie dynamiczne mostu zrealizowano za pomocą samochodu ciężarowego o masie z ładunkiem około 32 tony (rys. 5). Do oceny efektów dynamicznych zastosowano 5 schematów badawczych (S1 - S5):

- S1 - przejazd samochodu z prędkością 10 km/h,
- S2 - przejazd samochodu z prędkością 20 km/h,

- S3 - przejazd samochodu z prędkością 25 km/h,
- S4 - przejazd samochodu z prędkością 15 km/h z hamowaniem na moście,
- S5 - przejazd samochodu z prędkością 10 km/h przez próg.



Rys. 4. Lokalizacja punktów pomiaru przemieszczeń przęsła

Fig. 4. Measurement points of span vertical displacements



Rys. 5. Przejazd samochodu przez most (schemat S5)

Fig. 5. Vehicle passing through the bridge (S5 scheme)

#### 4. Wyniki badań dynamicznych mostu i ich analiza

Wybrane wyniki pomiarów przemieszczeń w czasie przejazdu samochodów w poszczególnych schematach obciążenia przedstawiono na rys. 6-13.

Analiza wyników badań mostu pod obciążeniem dynamicznym polegała na wyznaczeniu tzw. współczynnika dynamicznego, pierwszych częstotliwości drgań własnych oraz logarytmicznego dekrementu tłumienia (współczynnika tłumienia) dla kompozytowego przęsła mostu.

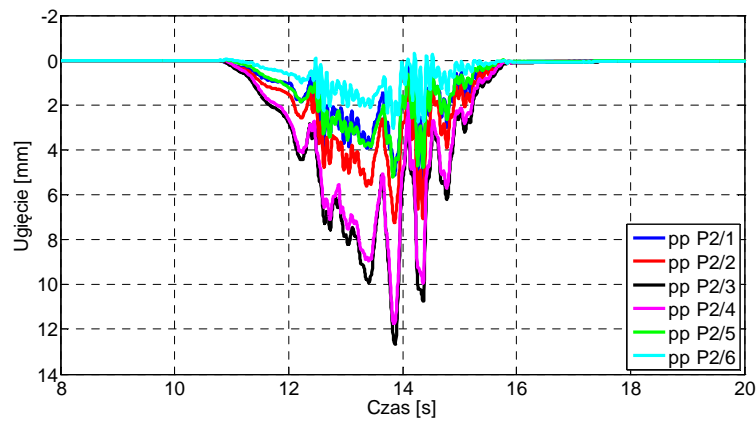
Współczynniki dynamiczne wyznaczone jako stosunek maksymalnego ugięcia dynamicznego, (największa wartość na wykresie ugięcia w funkcji czasu) do maksymalnego ugięcia statycznego (średnia z minimalnej i maksymalnej wartości na wykresie) wg wzoru (1):

$$\varphi = \frac{f_{dyn}}{f_{st}} \quad (1)$$

gdzie:  $\varphi$  – współczynnik dynamiczny,

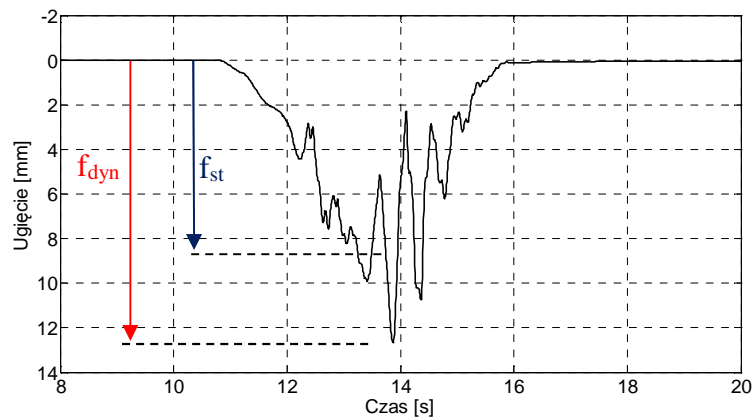
$f_{dyn}$  – ugięcie dynamiczne,

$f_{st}$  – ugięcie statyczne.



Rys. 6. Ugięcia w sześciu punktach pomiarowych w schemacie S1

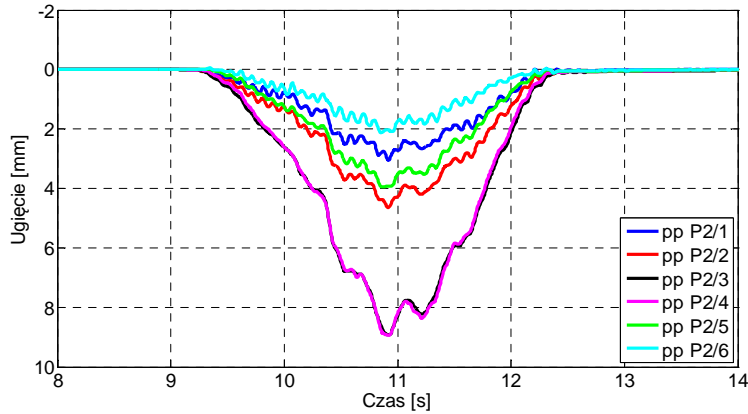
Fig. 6. Deflections in six measurement points of S1 scheme



Rys. 7. Maksymalne ugięcie w punkcie pomiarowym P2/3 w schemacie S1

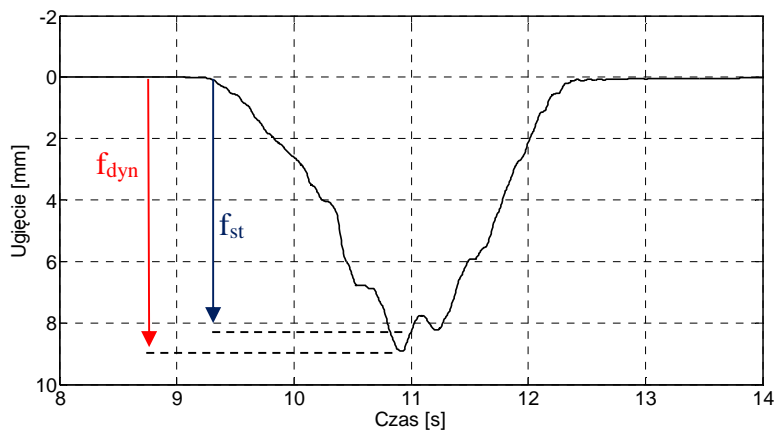
Fig. 7. Maximum deflection in P2/3 measurement point in S1 scheme





Rys. 8. Ugięcie w sześciu punktach pomiarowych w schemacie S2

Fig. 8. Deflections in six measurement points of S2 scheme



Rys. 9. Maksymalne ugięcie w punkcie pomiarowym P2/3 w schemacie S2

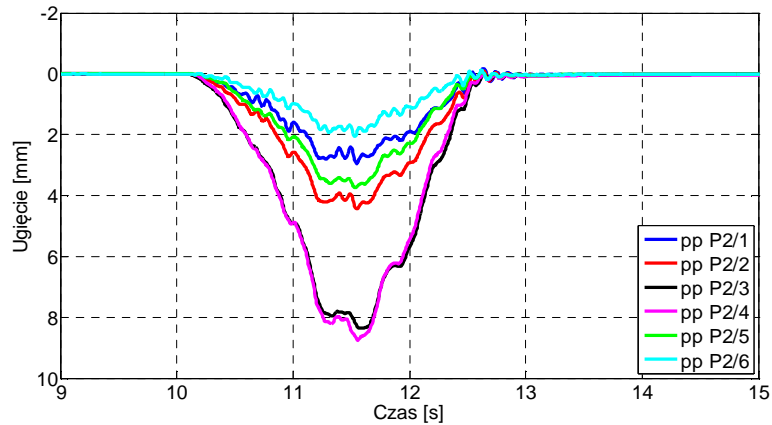
Fig. 9. Maximum deflection in P2/3 measurement point in S2 scheme

Tabela 1. Maksymalne wartości współczynnika dynamicznego w schematach obciążenia

Table 1. Maximum values of dynamic coefficients in loading schemes

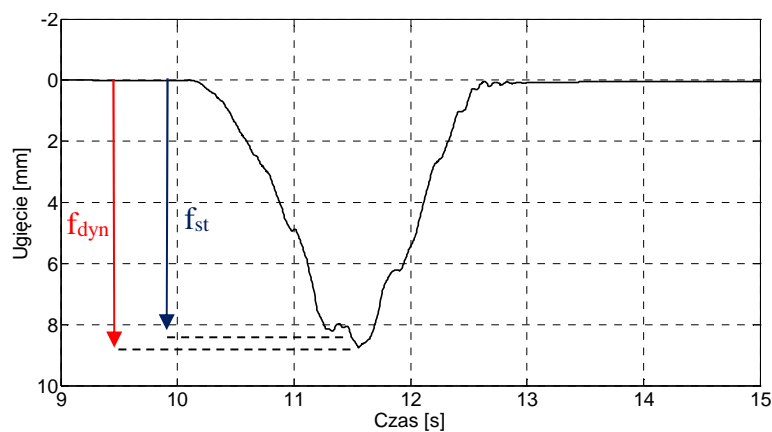
Schemat obciążenia	S1	S2	S3
Prędkość przejazdu [km/h]	10	20	25
Współczynnik dynamiczny	1,079	1,100	1,102

Maksymalne wartości współczynnika dynamicznego dla poszczególnych schematów obciążenia podano w tabeli 1. Żadna z tych wartości nie przekroczyła wartości normowej [6], wynoszącej  $\varphi = 1,25$  i przyjętej w obliczeniach podczas projektowania mostu.



Rys. 10. Ugięcie w sześciu punktach pomiarowych w schemacie S3

Fig. 10. Deflections in six measurement points of S3 scheme



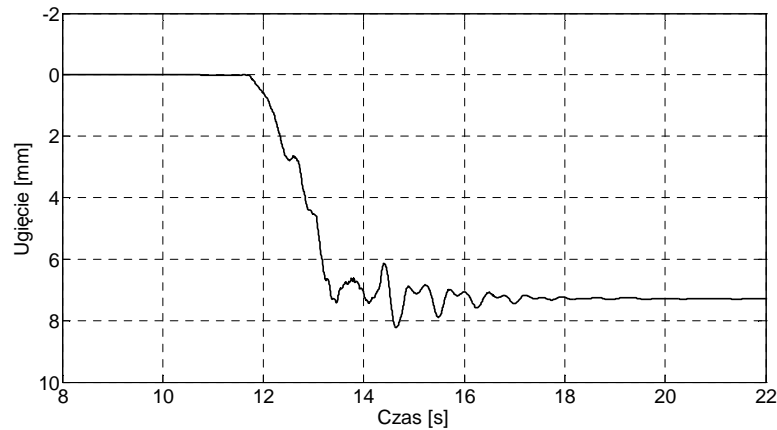
Rys. 11. Maksymalne ugięcie w punkcie pomiarowym P2/4 w schemacie S3

Fig. 11. Maximum deflection in P2/3 measurement point in S3 scheme

Częstotliwość drgań własnych przęsła została wyznaczona na podstawie wykresów drgań mostu uzyskanych podczas przejazdu samochodu z prędkością 25 km/h (schemat S3) oraz przejazdu przez próg i podczas hamowania na moście (schematy S4, S5). Częstotliwość drgań własnych przęsła mostu, zmierzonych tuż po opuszczeniu przęsła przez pojazd, została wyznaczona wg wzoru (2):

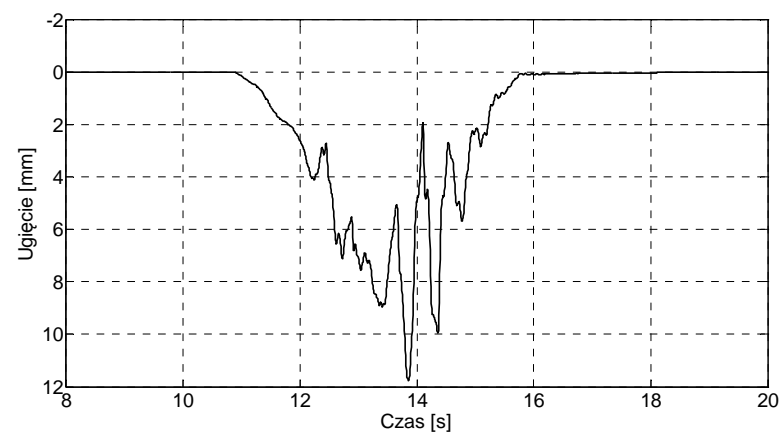
$$\eta = \frac{n}{t_s} = \frac{1}{T} \quad (2)$$

gdzie:  $n$  – liczba drgań w czasie  $t_s$  policzona na wykresie drgań konstrukcji,  
 $T$  – okres drgań własnych konstrukcji.



Rys. 12. Maksymalne ugięcie w punkcie pomiarowym P2/4 w schemacie S4

Fig. 12. Maximum deflection in P2/4 measurement point in S4 scheme



Rys. 13. Maksymalne ugięcie w punkcie pomiarowym P2/4 w schemacie S5

Fig. 13. Maximum deflection in P2/4 measurement point in S5 scheme

Wyznaczona w opisany sposób podstawowa częstotliwość drgań własnych (giętych) przęsła wyniosła 10,1 Hz. Częstotliwość ta jest ponad 3-krotnie większa od minimalnej wartości dopuszczalnej w rozporządzeniu [7], równej 3 Hz.

Logarytmiczny dekrement tłumienia (LDT) obliczono na podstawie wykresów drgań własnych mostu wg wzoru (3), który otrzymano poprzez odfiltrowanie wibrogramu do częstotliwości własnej.

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A_n} \quad (3)$$

gdzie:  $A_l$ ,  $A_n$  – pomierzona wartość połowy amplitudy drgań własnych odpowiednio w części początkowej i końcowej wykresu drgań,  
 $n$  – liczba drgań pomiędzy pomierzonymi amplitudami  $A_l$  i  $A_n$ .

Wyznaczony z wzoru (3) logarytmiczny dekrement tłumienia przęsła wyniósł 0,283. Wykorzystując wyznaczoną doświadczalnie wartość LDT obliczono współczynnik tłumienia ze wzoru (4):

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2}} \quad (4)$$

Obliczony ze wzoru (4) współczynnik tłumienia dla przęsła kompozytowego wynosi 4,5%. Wartość ta jest zbliżona do wartości otrzymanych z wyników badań trzech amerykańskich mostów kompozytowych, gdzie otrzymano minimalny współczynnik tłumienia o wartości 5% [1]. Jest to jednak wartość znacznie niższa od wartości współczynników tłumienia mostów betonowych, które mieszczą się zwykle w przedziale 7,9 – 8,4%.

## 5. Podsumowanie

Badania dynamiczne przęsła mostu wykonanego w całości z kompozytów FRP wykazały, że jego parametry dynamiczne są odpowiednie i zasadniczo spełniają aktualne krajowe wymagania, stawiane mostom drogowym. Maksymalna wartość współczynnika dynamicznego wyniosła 1,102 i jest o 13% mniejsza od wartości projektowej. Zidentyfikowana podstawowa częstość drgań własnych wyniosła 10,1 Hz i jest ponad 3-krotnie większa od minimalnej wartości dopuszczalnej prawem, równej 3 Hz. Jedynie tłumienie mostu jest blisko 2-krotnie mniejsze w porównaniu do np. podobnych belkowych mostów betonowych, czego jednak można było się spodziewać ze względu na małą masę konstrukcji przęsła. Jednakże nie odbiega ono zasadniczo od wartości uzyskiwanych dla innych mostów drogowych z kompozytów FRP [1].

*Praca powstała w ramach projektu pn.: „Com-Bridge – Innowacyjny most drogowy z kompozytów FRP”. Projekt był realizowany w ramach przedsięwzięcia pilotażowego pn.: „Wsparcie badań naukowych i prac rozwojowych w skali demonstracyjnej DEMONSTRATOR+” (umowa nr UOD-DEM-1-041/001), współfinansowanego przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju.*

## Literatura

- [1] Aluri S., Jinka C., GangaRao H.V.S.: Dynamic response of three fibre reinforced polymer composite bridges, Journal of Bridge Engineering, vol. 10, no. 6, 2005, pp. 722-730.
- [2] Robinson M.J., Kosmatka J.B.: Dynamic response of a light-weight composite bridge, Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics (EURODYN'11), Leuven, Belgium, 2011, pp. 1430-1437.

- [3] Alampalli S.: Field performance of an FRP slab bridge, *Composite Structures*, vol. 72, no. 4, 2006, pp. 494-502.
- [4] Aref A.J., Alampalli S.: Vibration characteristics of a fibre-reinforced polymer bridge superstructure, *Composite Structures*, vol. 52, no. 3-4, 2001, pp. 467-474.
- [5] Burgueño R., Karbhari V.M., Seible F., Kolozs R.T. Experimental dynamic characterization of an FRP composite bridge superstructure assembly, *Composite Structures*, vol. 54, no. 4, 2001, pp. 427-444.
- [6] PN-S-10030:1985. Obiekty mostowe. Obciążenia.
- [7] Rozporządzenie Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej z dnia 30 maja 2000 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać drogowe obiekty inżynierskie i ich usytuowanie. Dz.U. 2000 nr 63 poz. 735.

## **DYNAMIC CHARACTERISATION OF ROAD BRIDGE MADE OF FIBRE REINFORCED POLYMER COMPOSITES**

### **S u m m a r y**

In the first decade of XXI century the new structural material, fibre reinforced polymer composites (FRP), promulgate remarkably in bridge engineering. FRP composite bridge superstructure characterizes usually the high live load / dead load ratio, which makes FRP bridges more sensitive to moving vehicles than conventional bridges. Therefore the dynamic characterization of FRP superstructure has become recently one the most important issues in its design, construction and maintenance. Dynamic characterization of a bridge is usually identified by direct measurement of accelerations, strains or displacements in relevant structural points, induced by moving vehicles with various velocities. This method has been applied in the dynamic test of the first Polish all-composite bridge. On the basis of displacements measurement in relevant points of the FRP superstructure during bridge loading the basic dynamic parameters have been identified: dynamic coefficients, natural frequencies and damping ratio. The values established during the test confirmed the FRP composite bridge has the adequate dynamic characterization according to the Polish requirements for road bridges.

**Keywords:** dynamic coefficient, natural frequency, damping ratio, bridge superstructure, FRP composite, bridge test

*Przesłano do redakcji: 24.02.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Jan WALCZAK<sup>1</sup>

## STATE-OF-THE-ART TIME INTEGRATION METHODS IN THE ADINA PROGRAM

This paper presents state-of-the-art solution methods available in the ADINA program for dynamic, direct time integration analysis of time-dependent problems. For implicit direct dynamic solutions, a two-step Bathe method is presented. Advantages of the Bathe method over the widely used Newmark method are shown in small sample problems. Solutions of complex dynamic problems using the Bathe method will be presented at the Conference. For direct explicit dynamic solutions, the Noh-Bathe method is presented and compared with the central difference method and here again, advantages of the Noh-Bathe method are shown in small sample problems.

**Keywords:** structural dynamics, finite elements, implicit time integration, Bathe method, explicit time integration, Noh-Bathe method

### 1. Introduction

Dynamic analysis of engineering structures can be carried out using:

- direct implicit time integration,
- direct explicit time integration, or
- modal solutions.

However, commonly used methods may not remain stable for a given time step in nonlinear solutions. Hence we use in the ADINA program [1] two new methods: one proposed by K.J. Bathe [2],[3] for implicit time integration, which is stable in nonlinear solutions, and the other by G. Noh and K.J. Bathe [4] for explicit time integration, which has advantages over the central difference method. For modal solutions, we use either the Bathe-subspace or Lanczos method. In this presentation we will focus on direct time integration methods only. The material presented here is an effort of the whole ADINA team.

---

<sup>1</sup> Jan Walczak, ADINA R&D, Inc., Watertown, MA, USA Jan.Walczak@adina.com

## 2. Implicit time integration, Bathe method

Let us summarize here the essence of the Bathe method. Assuming that the solution is completely known at time  $t$  and that we are looking for a solution at time  $t + \Delta t$ . Let  $t + \gamma \Delta t$  be an instant of time between  $t$  and  $t + \Delta t$ , i.e.  $\gamma \in (0,1)$ . We can then write the equilibrium equation as follows

$$\mathbf{M}^{t+\gamma\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^{t+\gamma\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\gamma\Delta t} \mathbf{F} \quad (1)$$

Evaluating velocities in terms of displacements and accelerations in terms of velocities, we have [1],[2]:

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = c_1 {}^t \mathbf{U} + c_2 {}^{t+\gamma\Delta t} \mathbf{U} + c_3 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \quad (2)$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = c_1 {}^t \dot{\mathbf{U}} + c_2 {}^{t+\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + c_3 {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} \quad (3)$$

where  ${}^{t+\gamma\Delta t} \mathbf{U}$ ,  ${}^{t+\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{U}}$  are displacement and velocity solutions at time  $t + \gamma \Delta t$ , and

$$c_1 = \frac{(1-\gamma)}{\Delta t \gamma} \quad c_2 = \frac{-1}{(1-\gamma)\gamma \Delta t} \quad c_3 = \frac{2-\gamma}{(1-\gamma)\Delta t}$$

Using the above expressions, the equilibrium equation (1) can be written at time  $t + \Delta t$  in the following form [1],[2]:

$$\begin{aligned} & ({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} + c_3 c_3 \mathbf{M} - c_3 \mathbf{C}) \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} - \mathbf{M} (c_1 {}^t \dot{\mathbf{U}} + c_2 {}^{t+\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + c_3 c_1 {}^t \mathbf{U} + c_3 c_2 {}^{t+\gamma\Delta t} \mathbf{U} + c_3 c_3 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \\ & - \mathbf{C} (c_1 {}^t \mathbf{U} + c_2 {}^{t+\gamma\Delta t} \mathbf{U} + c_3 {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) \end{aligned} \quad (4)$$

Robustness and effectiveness of the Bathe method can be best demonstrated on a simple two degrees of freedom problem representing flexible and stiff parts [1]:

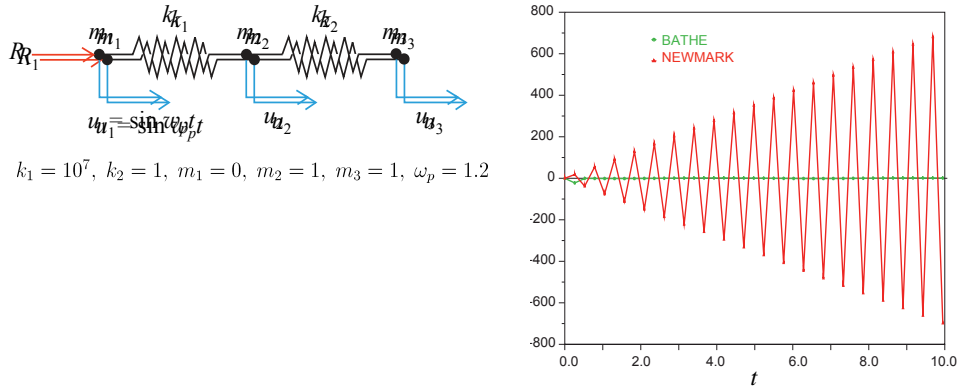


Fig. 1. A simple, 2DOF problem, presented in [1]  
 Rys. 1. Prosty przykład, dwa stopnie swobody [1]

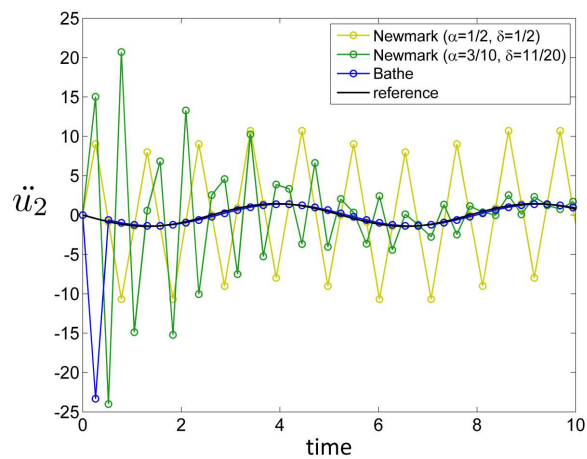


Fig. 2. Close-up of accelerations at node 2  
 Rys. 2. Zbliżenie rysunku 1, przyspieszenia w węźle 2

As can be seen from the above graph, the Newmark method becomes unstable after a few time steps. Fig. 2 shows a close-up of acceleration of node 2. For nonlinear problems, incorrect accelerations may lead to convergence difficulties, especially for contact problems.

The Bathe method has been used in many applications and, at the Conference, solutions will be presented for complex structures, namely earthquake analysis of tall bridges, analysis of crushed car components and dynamic solutions of fluid-structure interaction (FSI) problems.



### 3. Explicit time integration, Noh-Bathe method

The central difference method is commonly used for explicit time integration. The difficulties with the central difference method are spurious oscillations, present even when the optimal time step is used, i.e. if CFL number is equal to 1.0, where  $CFL = \Delta t / \Delta t_r$ .

Considering linear analysis, the governing finite element equations to be solved are:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (5)$$

where  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  are the mass, damping and stiffness matrices. The Noh-Bathe method [3] consists of two sub-steps, similar to the Bathe implicit method. The time step sizes are  $p\Delta t$  and  $(1-p)\Delta t$  for the first and the second sub-step, respectively, where  $p \in (0,1)$ . The first sub-step can be solved as follows:

$$\mathbf{M}^{t+p\Delta t} \mathbf{U} + \mathbf{C}^{t+p\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{t+p\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+p\Delta t} \mathbf{R} \quad (6)$$

$${}^{t+p\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + [p\Delta t] {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} [p\Delta t]^2 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \quad (7)$$

$${}^{t+p\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = {}^{t+p\Delta t} \mathbf{R} / \mathbf{M} \quad (8)$$

$${}^{t+p\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} p\Delta t [{}^t \ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+p\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}] \quad (9)$$

For the second sub-step we have:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (10)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+p\Delta t} \mathbf{U} + [(1-p)\Delta t] {}^{t+p\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} [(1-p)]^2 {}^{t+p\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \quad (11)$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} / \mathbf{M} \quad (12)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^{t+p\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{U}} + a_6 {}^{t+p\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \quad (13)$$

$$\text{where: } a_5 = q_0(1-p)\Delta t \quad a_6 = \left(\frac{1}{2} + q_1\right) \quad a_7 = q_2(1-p)\Delta t$$

$$q_1 = \frac{1}{2}(1-2p)/(p(1-p)) \quad q_2 = \frac{1}{2} - pq_1 \quad q_0 = \frac{1}{2} - q_1 - q_2$$

To illustrate the predictive capabilities of the Noh-Bathe method, we consider a pre-stressed membrane [3], for which we compare the central difference method and Noh-Bathe method wave propagation solutions.

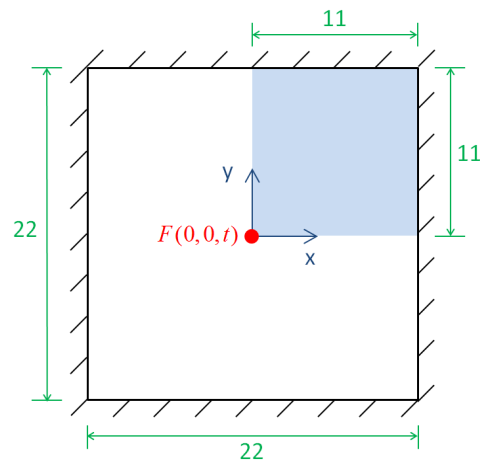


Fig. 3. Pre-stressed membrane problem; initial displacement and velocity are zero

Rys. 3. Naprężona membrana, początkowe przemieszczenia i prędkości równe zero

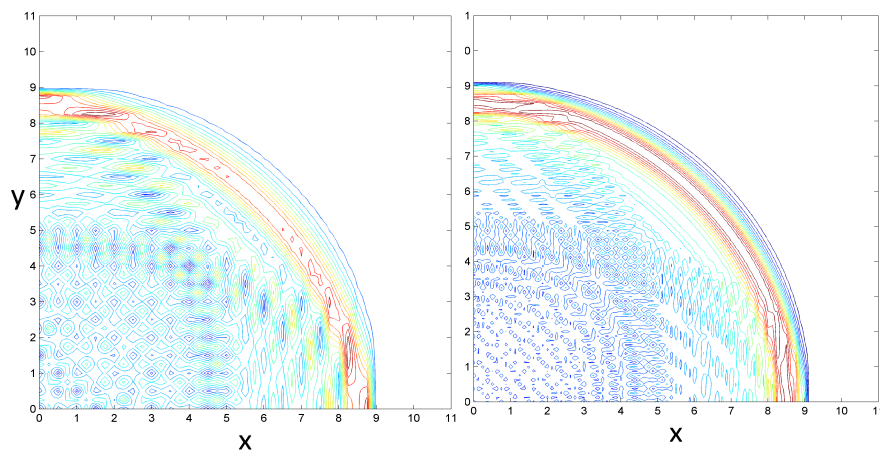


Fig. 4. Central difference displacement response, left: 44x44 mesh, right: 88x88 mesh

Rys. 4. Metoda różnic centralnych, przemieszczenia, siatki po lewej: 44x44, po prawej 88x88

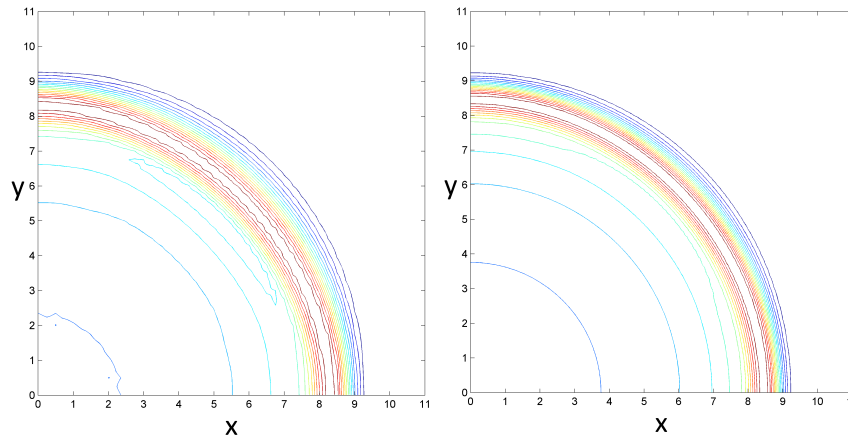


Fig. 5. Noh-Bathe displacement response, left: 44x44 mesh, right: 88x88 mesh

Rys. 5. Metoda Noh-Bathe, przemieszczenia, siatki po lewej: 44x44, po prawej 88x88

#### 4. Implicit and explicit solutions of a compressed tube

In engineering practice, crush and crash simulations are almost always performed using explicit time integration. Crash events are quite rapid events, occurring over relatively small time periods; hence, a small time step explicit time integration simulation of the problem is naturally pursued. On the other hand, crush events are slow dynamic events, occurring over relatively large time periods. They are frequently almost static events. These simulations, when performed with explicit time integration, require mass scaling and careful setting or tuning of parameters in order to obtain valid solutions.

One of our continuing aims in the ADINA developments has been to establish an analysis tool that can be used reliably and effectively for both crash and crush simulations, i.e. to use implicit integration or explicit integration, whichever technique is most appropriate, based on the physics of the problem. One important feature in the ADINA program is a possibility to automatically switch from implicit time integration to explicit time integration (e.g. when there is no convergence) or from explicit time integration to implicit time integration (e.g. to calculate spring back).

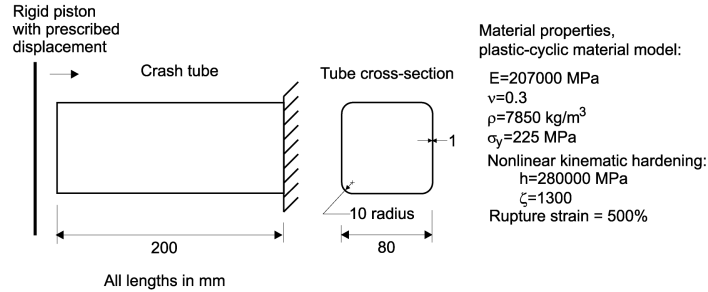


Fig. 6. Crush tube geometry and material data

Rys. 6. Zgniatanie prostokątnej tuby, dane materiałowe i geometryczne

Let us consider a crush tube process, shown on Fig. 6, with the piston motion at 1 mph and at 30 mph. The 1 mph case is solved using implicit time integration. The 30 mph case is solved twice, first using implicit time integration (Bathe method) and in a second run, using explicit time integration (Noh-Bathe method). The tube has been modeled using 3D-shell MITC4 elements and large strain assumptions and the same mesh, model and material data are used for both cases.

The resulting force deflection curves are shown in Fig. 7. Note that peak forces calculated in the explicit and implicit solutions are practically the same for the 30 mph case, and overall responses after the peak forces have been reached are similar.

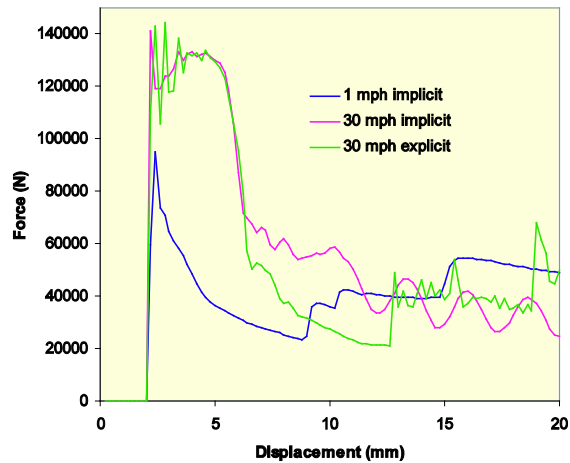


Fig. 7. Force deflection responses for a compressed tube

Rys. 7. Wykres siła-przemieszczenie dla ściskanej tuby

## 5. Conclusion

The ADINA program provides reliable, state-of-the-art tools for dynamic analysis of structures. In particular, the Bathe method shows very desirable solution characteristics in implicit direct time integration solutions. The high frequency response is effectively damped out, leading to better convergence in nonlinear solutions. The advantages of Bathe method and Noh-Bathe method have been shown using simple illustrative examples. Solution results for complex structures will be presented at the Conference.

## References

- [1] K.J. Bathe, G. Noh, Insight into implicit time integration scheme for structural dynamics, *Computer & Structures*, 98-99, 2012, s. 1-12.
- [2] G. Noh, K.J. Bathe, An Explicit Time Integration Scheme for the Analysis of Wave Propagation, *Computers & Structures*, 129, 2013, s. 178-193.
- [3] ADINA Theory and Modeling Guide, ADINA R&D, Inc, Watertown MA, 2011.
- [4] K.J. Bathe, Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: a simple implicit time integration scheme, *Computers & Structures*, 85, 2007, s. 437-445.

## STAN WIEDZY NA TEMAT METOD CAŁKOWANIA RÓWNAŃ RUCHU W PROGRAMIE ADINA

### Streszczenie

W pracy zaprezentowano metody do bezpośredniego całkowania równań ruchu schematem niejawnym (metoda Bathe'go) i jawnym (metoda Noh-Bathe). W przypadku niejawnego schematu rozwiązywania równań ruchu, porównano rezultaty otrzymane metodami Bathe'go i Newmarka dla prostych przykładów uwypuklając przewagę metody Bathe'go. W przypadku jawnego schematu rozwiązywania równań ruchu, porównano wyniki otrzymane przy pomocy metody Noh-Bate i metody różnic centralnych. Wyniki rozwiązań dla kompleksowych konstrukcji będą przedstawione w czasie Konferencji.

**Słowa kluczowe:** dynamika konstrukcji, niejawne rozwiązywanie równań ruchu, metoda Bathe'go, jawne rozwiązywanie równań ruchu, metoda Noh-Bathe

*Przesłano do redakcji: 24.02.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Dominika ZIAJA<sup>1</sup>  
Bartosz MILLER<sup>2</sup>

## WYKRYWANIE USZKODZEŃ WĘZŁÓW W MODELU RAMY STALOWEJ NA PODSTAWIE ANALIZY INERTANCJI

W artykule przedstawiono możliwość detekcji uszkodzeń węzłów na podstawie analizy proporcji pomiędzy wytypowanymi fragmentami funkcji przejścia (FRF). W ramach zadania wykonano eksperyment na modelu laboratoryjnym dwukondygnacyjnej ramy portalowej, którą poddano testom dynamicznym i dla której określono model modalny. Funkcję przejścia odpowiadającą wybranym punktom układu potraktowano jako sygnał w dziedzinie częstotliwości. Wyznaczono odcięte środków ciężkości kwadratów sygnału wybranych fragmentów funkcji, które następnie potraktowano jako dane wejściowe w metodzie wektorów nośnych. Zaproponowane podejście umożliwia skuteczną detekcję uszkodzeń węzłów badanego modelu.

**Słowa kluczowe:** detekcja uszkodzeń, SHM, FRF, Support Vector Machines (SVM)

### 1. Wprowadzenie

Wykrywaniu uszkodzeń w konstrukcjach budowlanych poświęcono już wiele uwagi. Podstawową metodą oceny stanu konstrukcji jest inspekcja wizualna, kosztowna, czasochłonna, wymagająca doświadczonego eksperta i często niemożliwa do przeprowadzenia bez wyłączenia obiektu z użytkowania. Ze względu na wymienione niedogodności coraz większą popularnością cieszą się metody nieniszczące, bazujące na ocenie stanu konstrukcji na podstawie danych pozyskanych w wyniku pomiarów nowoczesnymi metodami. Główną zaletą metod nieniszczących jest możliwość ciągłego monitorowania stanu konstrukcji bez ingerencji w jej strukturę, w trakcie normalnej eksploatacji obiektu. Jedną z takich metod jest np. pomiar przyspieszeń wybranych punktów wzbudzonej dynamicznie konstrukcji z jednoczesną rejestracją siły wymuszającej. Na pod-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Dominika Ziaja, Politechnika Rzeszowska, Zakład Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651618; dziaja@prz.edu.pl

<sup>2</sup> Bartosz Miller, Politechnika Rzeszowska, Zakład Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651623; bartosz.miller@prz.edu.pl

stawie zgromadzonych danych wykonywana jest analiza modalna, która umożliwia określenie postaci drgań swobodnych układu, odpowiadających im częstotliwości, a także współczynników tłumienia. Brownjohn i inni w pracy [1] przedstawili przykłady konstrukcji, w których zaimplementowano systemy bazujące na pomiarze drgań, opisując zalety i wady wykorzystanej metody.

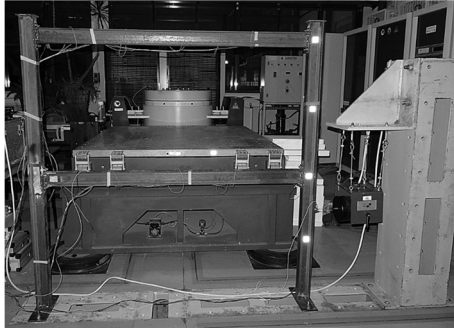
Wyniki prezentowanych w tym artykule badań opierają się na informacjach otrzymanych z analizy modalnej. Jednak zastosowane podejście wykorzystuje nie popularnie stosowaną analizę zmian wartości częstotliwości i współczynników tłumienia dla poszczególnych form drgań swobodnych, a informacje o zmianie funkcji przejścia (Frequency Response Function, FRF). Funkcja przejścia opisuje relację pomiędzy wymuszeniem a rejestrowaną odpowiedzią konstrukcji [2]. Możliwość wykorzystania funkcji przejścia do detekcji uszkodzeń została zaprezentowana między innymi w [3], [4], [5] i [6]. W [3] funkcję przejścia potraktowano jako sygnał. Różnica pomiędzy energią takiego sygnału dla stanu z uszkodzeniem i bez umożliwiła skuteczne wykrywanie uszkodzenia. Przeprowadzony eksperyment bazował niestety wyłącznie na danych numerycznych. Nieco inne podejście zaproponowano w pracy [4], gdzie wykazano, że wystąpienie uszkodzenia w układzie powoduje przesunięcie wykresu funkcji w stronę niższych częstotliwości, a ocena, czy uszkodzenie wystąpiło czy nie możliwa jest poprzez wizualne porównanie funkcji dla układu wzorcowego i uszkodzonego. W pracy [5] pokazano skuteczność detekcji uszkodzeń na rzeczywistym obiekcie (most), a w [6] wykorzystano FRF do identyfikacji uszkodzenia w postaci zmiany sztywności połączeń.

Wnioski prezentowane w niniejszym artykule bazują wyłącznie na danych otrzymanych z eksperymentu na modelu fizycznym. Dane eksperymentalne wymagają wnikliwej analizy, do której można wykorzystać różnego rodzaju metody jak choćby te, zaprezentowane w pracach [5], [7], [8] i [9]. W dalszej części artykułu zostanie pokazane, że analiza zmian kształtu funkcji przejścia z wykorzystaniem metody wektorów nośnych (ang: Support Vector Machines, SVM, [10]) umożliwia skuteczną detekcję uszkodzeń węzłów badanej ramy.

## 2. Opis procedury badawczej

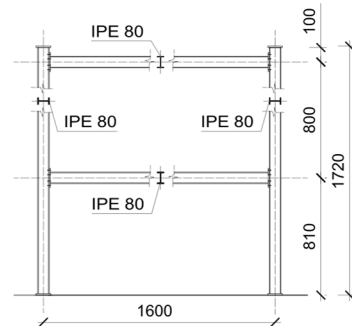
### 2.1. Model laboratoryjny

W badaniach wykorzystano model stalowej, dwukondygnacyjnej ramy portalowej pokazany na Rys. 1, wykonanej z IPE 80, ze stali S355. Wymiary w osiach elementów przedstawiono na Rys. 2. Wszystkie połączenia rygiel-słup, pokazane na Rys. 3, wykonano jako doczołowe z czterema rzędami śrub M8 klasy 8.8. Połączenie z fundamentem przedstawiono na Rys 4.



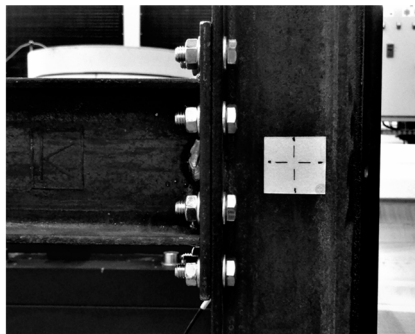
Rys. 1. Model laboratoryjny

Fig. 1. Laboratory model of the frame



Rys. 2. Schemat modelu laboratoryjnego, wymiary w mm

Fig. 2. Scheme of the model, dimensions in mm



Rys. 3. Połączenie rygiel - słup

Fig. 3. Beam-to-column connection



Rys. 4. Połączenie z fundamentem

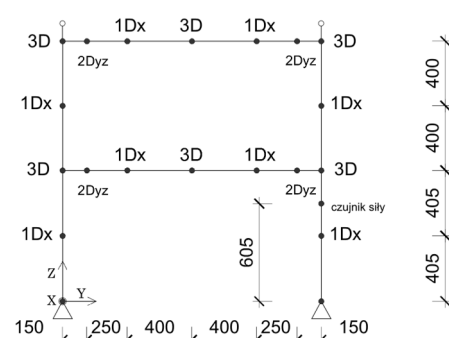
Fig. 4. Column footing

## 2.2. Przeprowadzone pomiary

Model laboratoryjny poddano badaniom dynamicznym. Ponieważ prezentowane badania są częścią szerszego tematu, mającego na celu opracowanie skutecznych procedur wykrywania uszkodzeń w konstrukcjach budowlanych przy wykorzystaniu różnych, nieniszczących metod pomiarowych, w trakcie pomiarów wykorzystano czujniki przyspieszeń rozmieszczone na ramie w konfiguracji pokazanej na Rys. 5. Oznaczenia przyjęte na tym rysunku: 1D - czujnik jednoosiowy, 2D - czujnik trójosiowy mierzący przyspieszenia tylko w 2 wybranych kierunkach, 3D - czujnik trójosiowy; x, y, z - kierunki mierzonych przyspieszeń. W ramie wzbudzano drgania używając wzbudnika modalnego. Drgania wzbudzano białym szumem, w taki sposób, że po transformacji do dziedziny częstotliwości rejestrowany sygnał miał zakres 0-200Hz i rozdzielczość 0.097Hz. Do wykonania pomiarów użyto wielkanałowego rejestratora/analizatora LMS Scadas Mobile wraz z oprogramowaniem Siemens LMS Test.Lab 15 (z modułem MIMO FRF Testing).

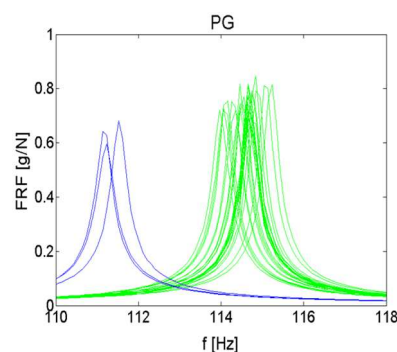


W trakcie eksperymentu wykonywano pomiary na ramie bez uszkodzenia (wszystkie śruby w każdym z połączeń rygiel-słup dokręcone z takim samym momentem) oraz z wprowadzonym uszkodzeniem (rozkręcone dwa zewnętrzne rzędy śrub w jednym z połączeń). W ten sposób zgromadzono 30 wzorców bez uszkodzenia i 12 z uszkodzeniem (po 3 dla każdego węzła).



Rys. 5. Rozmieszczenie czujników, wymiary w mm

Fig. 5. Location of accelerometers, dimensions in mm

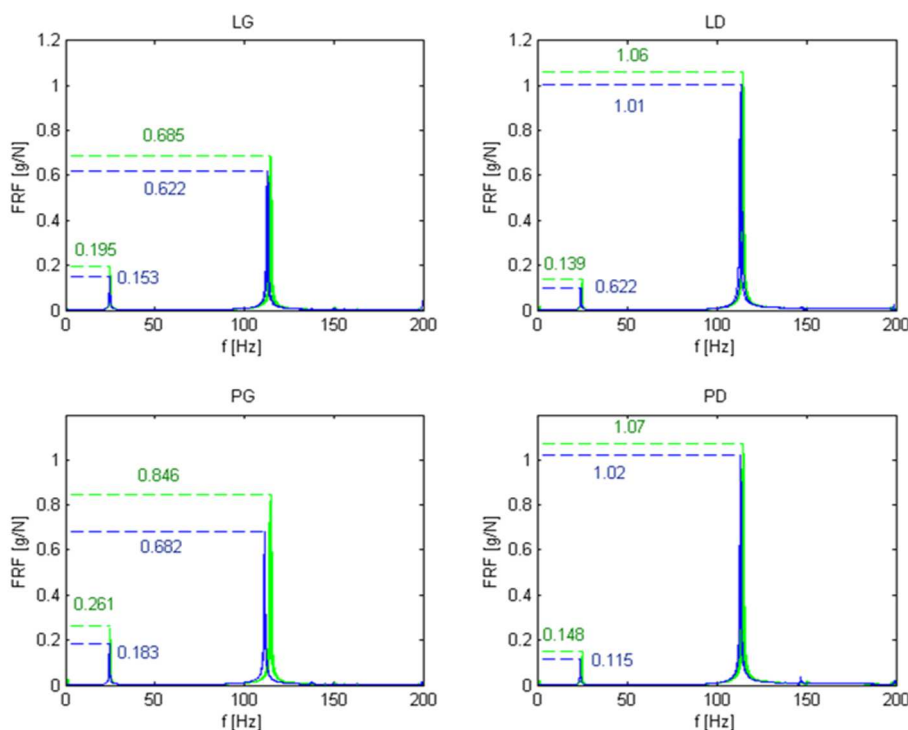


Rys. 6. Fragment funkcji przejścia w przedziale 110-118 Hz dla prawego, górnego węzła. Kolor niebieski - wzorce uszkodzone, zielony - bez uszkodzenia

Fig. 6. Fragment of FRF function in the range of 110-118 Hz for the right upper node, for damaged (blue) and undamaged (green) patterns

### 3. Analiza danych pomiarowych

Szczegółowej analizie poddano funkcje przejścia otrzymane z czujników zlokalizowanych po obu stronach każdego z węzłów, czujniki te rejestrowały przyspieszenia w kierunku Y (poziomo w płaszczyźnie ramy) oraz Z (pionowo, w płaszczyźnie ramy). Badano relacje pomiędzy kształtem funkcji przejścia po wewnętrznej i zewnętrznej stronie węzłów (np. różnice pomiędzy wartościami funkcji, proporcje pomiędzy nimi), a także możliwość detekcji uszkodzenia na podstawie informacji otrzymanych tylko z jednej strony węzła. W wyniku przeprowadzonych rozważań uznano, że najlepsze możliwości detekcji dają funkcje przejścia na kierunku Y (poziomo w płaszczyźnie ramy), Odpowiadające czujnikom umieszczonym na słupach, na przecięciu teoretycznych osi rygli i słupów. W dalszej części artykułu ograniczono się wyłącznie do przedstawienia wyników bazujących na tych funkcjach. Dodatkowa korzyść płynąca z takiego podejścia to fakt, że do wykrycia uszkodzenia węzła wystarczy jeden czujnik przyłożony do dowolnego połączenia rygiel – słup. Na Rys. 6 przedstawiono fragment wykresu wartości bezwzględnej z funkcji przejścia dla prawego górnego węzła (w zakresie częstotliwości 110-118 Hz), a na Rys. 7 zamieszczono wykresy dla każdego z 4 węzłów, rozróżniając sytuację z uszkodzeniem (kolor niebieski)



Rys. 7. Porównanie wartości bezwzględnej z funkcji przejścia dla stanu bez uszkodzenia (kolor zielony) i z uszkodzeniem (kolor niebieski) dla każdego z analizowanych czujników (L - lewy, P- prawy, G- górny, D - dolny węzeł)

Fig. 7. Comparison of the absolute value of the FRF function for failure-free state (green) and fault (blue) for each of the analyzed sensors (L - left, P- right, G- top, D - bottom node)

i bez uszkodzenia (kolor zielony), przy czym w sytuacji towarzyszącej uszkodzeniu użyto wyłącznie informacji o FRF przy znanym, uszkodzonym węźle (informacja z pozostałych czujników na tym rysunku została pominięta).

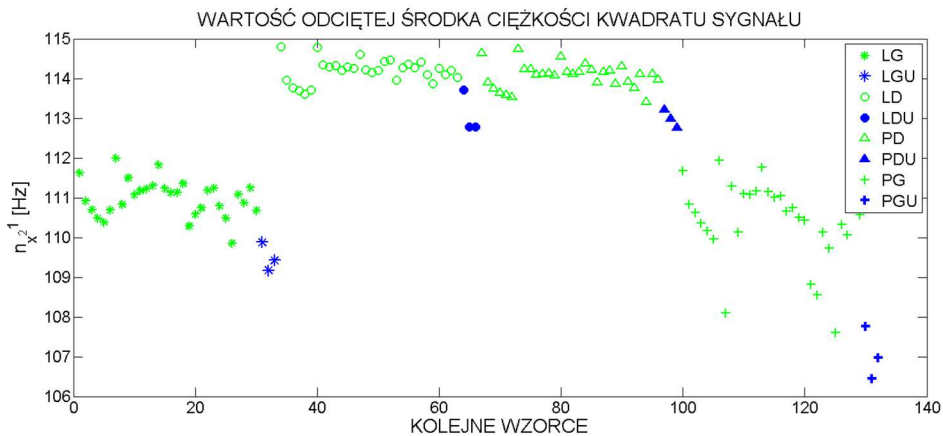
Porównując zamieszczone wykresy można zauważyć, że pojawieniu się uszkodzenia towarzyszy przesunięcie ekstremów na wykresie funkcji w stronę niższych częstotliwości, co potwierdza zmniejszenie sztywności układu. Dodatkowo widoczne są także zmiany w wartości amplitudy – dla wzorców uszkodzonych amplitudy są niższe.

Aby liczbowo opisać zmiany zachodzące na skutek uszkodzenia funkcję przejścia potraktowano jak sygnał i wyznaczono początkowo odciętą średnią ciężkości kwadratu sygnału w pełnym zakresie, zgodnie ze wzorem [11]:

$$\bar{n}_x^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} n \cdot x^2(n) / \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^2(n) \quad (1)$$

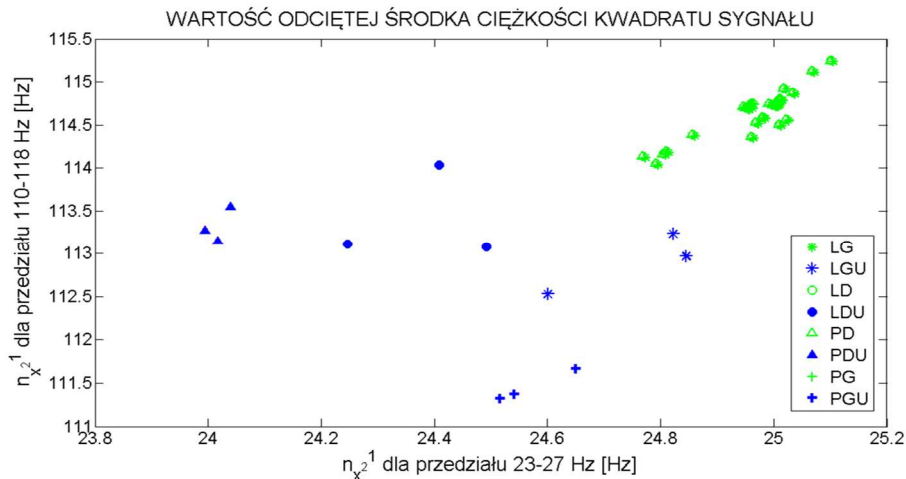
gdzie:  $x$  – oznacza wartość sygnału dyskretnego,  
 $n$  – oznacza numer kroku.

Następnie dla każdego wzorca wyznaczono wartości odciętych środka ciężkości kwadratu sygnału w przedziałach 23-27 Hz i 110-118 Hz. Na Rys. 8 zamieszczono obliczone odcięte wyznaczone dla pełnego zakresu częstotliwości, natomiast na Rys. 9 przedstawiono każdy wzorec jako punkt, dla którego na osi poziomej odłożono położenie odciętej dla pierwszego przedziału, na osi pionowej zaś wartość odciętej dla przedziału drugiego.



Rys. 8. Porównanie wartości odciętej środka ciężkości kwadratu sygnału dla wszystkich węzłów (oznaczenia: L - lewy, P - prawy, G - górny, D - dolny węzeł, U - wzorec uszkodzony, kolor zielony - wzorce bez uszkodzenia)

Fig. 8. Comparison of the center of gravity of the squared signal for all nodes (L - left, P - right, G - top, D - bottom node, U - damaged pattern, green color - patterns without damage)

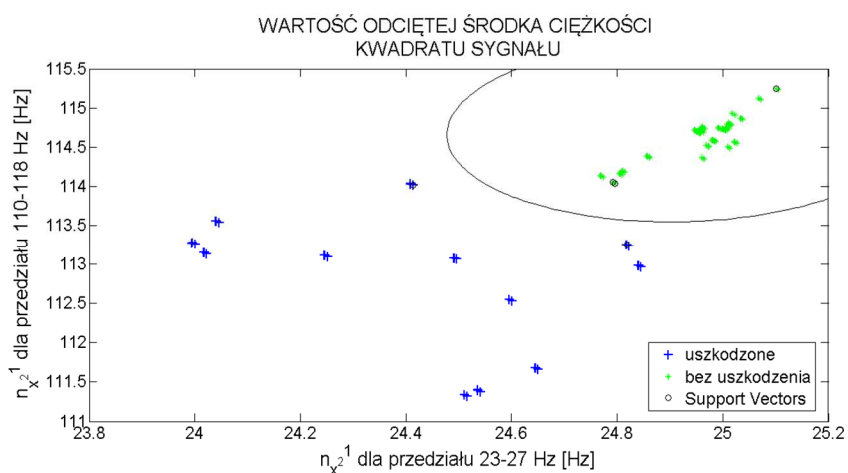


Rys. 9. Porównanie wartości odciętej środka ciężkości kwadratu sygnału w wybranych przedziałach dla wszystkich węzłów (oznaczenia: L - lewy, P - prawy, G - górny, D - dolny węzeł, U - wzorec uszkodzony, kolor zielony - wzorce bez uszkodzenia)

Fig. 9. Comparison of the center of gravity of the squared signal in selected intervals for all nodes (L - left, P - right, G - top, D - bottom node, U - damaged pattern, green color - patterns without damage)

Niestety wyłącznie na podstawie informacji o odciętej środka ciężkości całej funkcji nie jest możliwe rozróżnienie wzorców uszkodzonych od nieuszkodzonych. Ma to wyraźny związek z lokalizacją i typem węzła (węzły górne zachowują się nieco inaczej niż dolne). Porównując jednak każdy węzeł osobno można zauważyć, że widoczne na Rys. 7 przesunięcie można wyrazić właśnie poprzez zmianę położenia odciętej środka ciężkości kwadratu sygnału. Opis sygnału przy pomocy wartości w wytypowanych przedziałach przyniósł znacznie lepsze rezultaty. Na Rys. 9 widoczny jest podział na dwa zbiory - wzorców uszkodzonych i nieuszkodzonych.

Do precyzyjnego rozgraniczenia obu zbiorów użyto metody wektorów nośnych. Ze względu na małą liczbę wzorców zdecydowano się wyłącznie na zastosowanie SVM jako klasyfikatora jednoklasowego. Otrzymany rezultat graficznie przedstawiono na Rys 10, gdzie czarną linią rozgraniczono obszary odpowiadające uszkodzeniu (na lewo) i prawidłowej pracy konstrukcji (na prawo).



Rys. 10. Podział na wzorce uszkodzone i nieuszkodzone

Fig. 10. Classifying for damaged and undamaged patterns

Analizie poddano również FRF z czujników przy trzech węzłach nieuszkodzonych, rejestrujących drgania w sytuacji, gdy jeden (ostatni) z węzłów ramy uległ uszkodzeniu. Różnice w wartościach analizowanych parametrów są tak małe, że po naniesieniu na płaszczyznę (porównaj Rys. 9 i Rys. 10) widać, że układ jest uszkodzony.

## 4. Wnioski

Na podstawie przedstawionych wyników można stwierdzić, że wykorzystanie funkcji przejścia do detekcji uszkodzeń ramy stalowej, w połączeniu z metodą wektorów nośnych, daje znacznie większe możliwości od podejścia bazującego wyłącznie na postaciach i częstotliwościach drgań. Przede wszystkim pozwala zredukować liczbę niezbędnych czujników (w przedstawionym przykładzie wystarczy FRF z pomiarów wykonanych jednym czujnikiem przyspieszenia, aby stwierdzić, czy wystąpiło uszkodzenie). Proponowane podejście, na obecnym etapie zaawansowania prac, może być zastosowane do stwierdzenia, że uszkodzenie pojawiło się, przy ograniczeniu wyłącznie do zmian w połączeniach. Ze względu na bardzo małą liczbę wzorców dla każdego typu uszkodzenia nie jest możliwe precyzyjne wskazanie położenia uszkodzenia. Można jednak spodziewać się, że zwiększenie liczby wzorców oraz zastosowanie multiklasowej metody SVM pozwoli na wskazanie uszkodzonego węzła, a uwzględnienie informacji pochodzących z dodatkowych punktów (np. na środku rygli), oraz innych kierunków pomiarowych (np. Z - czyli pionowo w płaszczyźnie ramy) umożliwi wskazanie położenia ewentualnych uszkodzeń na długości poszczególnych elementów, jednak potwierdzenie tego wymaga dalszych badań.

### **Podziękowania**

*Program MATLAB wykorzystany do przeprowadzenia badań został zakupiony w wyniku realizacji Projektu nr UDA-RPPK.01.03.00-18-003/10-00 „Budowa, rozbudowa i modernizacja bazy naukowo-badawczej Politechniki Rzeszowskiej” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podkarpackiego na lata 2007-2013, Priorytet I. Konkurencyjna i Innowacyjna Gospodarka, Działanie 1.3 Regionalny system innowacji.*

*Do badań wykorzystano aparaturę zakupioną w projekcie nr POPW.01.03.00-18-012/09 z Funduszy Strukturalnych w ramach Programu Operacyjnego Rozwój Polski Wschodniej współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego*

### **Literatura**

- [1] Brownjohn J. M. W., De Stefano A., Xu Y.-L., Wenzel H., Aktan A. E.: Vibration-based monitoring of civil infrastructure: challenges and successes, *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, nr 1, 2011, s. 79-95.
- [2] Uhl T., Lisowski W.: *Praktyczne problemy analizy modalnej konstrukcji*, Wydawnictwo AGO, Kraków 1996.
- [3] Arun Kumar K. A., Mallikarjuna Reddy D.: Application of frequency response curvature method for damage detection in beam and plate like structures, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 149, 2016, 012160.

- [4] Sulaiman M. S. A., Yunus M. A., Bahari A. R., Abdul Rani M. N.: Identification of damage based on frequency response function (FRF) data, MATEC Web of Conferences 90, 2016, 01025.
- [5] Dilena M., Limongelli M.P., Morassi A.: Damage localization in bridges via the FRF interpolation method, Mechanical Systems and Signal Processing 52-53, 2015, s. 162-180.
- [6] Xu Y.L., Huang Q., Zhan S., Su Z.Q., Liu H.J.: FRF-based structural damage detection of controlled buildings with podium structures: Experimental investigation, Journal of Sound and Vibration 333, 2014, s. 2762-2775.
- [7] Ziemiański L.: Sieci neuronowe w dynamice konstrukcji. Wybrane zagadnienia, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1999.
- [8] Comanducci G., Magalhaes F., Ubertini F., Cunha A.: On vibration-based damage detection by multivariate statistical techniques: Application to a long-span arch bridge, Structural Health Monitoring Vol. 15(5), 2016, s. 505-524.
- [9] Dilena M., Limongelli M.P., Morassi A.: Damage localization in bridges via the FRF interpolation method, Mechanical Systems and Signal Processing 52-53, 2015, s. 162-180.
- [10] HosseinAbadi H. Z., Amirfattahi R., Nazari B., Mirdamadi H. R., Atashipour S. A.: GUV-based structural damage detection using WPT statistical features and multiclass SVM, Applied Acoustics 86, 2014, s. 59-70.
- [11] Zieliński T. P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005.

## DETECTION OF DEFECTS CONNECTION BETWEEN MEMBERS OF STEEL FRAME ON THE BASIS OF FRF CHANGES

### Summary

The article presents the possibility of nodes failures detecting based on the analysis of the proportions between the selected intervals of FRF function. Within the scope of the task an experiment was performed on the laboratory model of a two-storey portal frame, which was subjected to dynamic tests and for which a modal model was defined. FRF function for selected system points was treated as a signal in the frequency domain. For the relevant fragments, the centers of gravity of the signal squares were determined, which were then used as input data in the Support Vector Machines (SVM) method. The proposed approach enables effective detection of connection damage in the tested structure.

**Keywords:** damage detection, SHM, FRF, Support Vector Machines (SVM)

*Przesłano do redakcji: 10.03.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*



Artur BOROWIEC<sup>1</sup>  
 Leonard ZIEMIAŃSKI<sup>2</sup>

## BADANIA DYNAMICZNE ODBIERAKA PRĄDU LEKKIEGO POJAZDU SZYNOWEGO

Badania dynamiczne odbieraka prądu pojazdu szynowego przeprowadzono w celu określenia parametrów modalnych projektowanego rozwiązania. Przedmiotem badań był odbierak prądu dedykowany do lekkich pojazdów szynowych (tramwaj, kolej miejska, metro) o oznaczeniu 120ECI. W celu weryfikacji modelu modalnego podczas badań porównano wyniki analiz modalnych dla różnych sposobów wymuszania drgań (losowo, impulsowo). Przeprowadzono pomiary dla pięciu położzeń ślizgacza pantografu w zakresie jego pracy.

**Słowa kluczowe:** analiza modalna, lekki pojazd szynowy, odbierak prądu

### 1. Wprowadzenie

We współczesnych miastach komunikacja szynowa postrzegana jest jako najtańsza, a jednocześnie najbardziej ekologiczna, pomijając aspekt wytworzenia energii elektrycznej zasilającej te pojazdy. Do środków transportu szynowego miast zaliczamy tramwaje, kolej miejską i metro. W sieci komunikacyjnej dużych miast stanowią istotną rolę. Projektowanie nowych pojazdów jako odpowiedź na stale poprawiane warunki komfortu i bezpieczeństwa podróży to kolejne aspekty w tej kwestii. Sprawność obecnie eksploatowanego transportu szynowego zależy od dynamicznej kompatybilności układu pantografów z siecią trakcyjną i wynikającymi siłami kontaktu pomiędzy tymi elementami [1]. W literaturze można znaleźć wiele modeli do opisu zagadnień dynamiki górnej sieci jezdnej [1-3]. Jednym z elementów tych opisów jest model dynamiczny pantografu. Najczęściej wykorzystuje się model w postaci układu dyskretnego [2,3].

Projektowanie i analiza tego układu z wykorzystaniem odpowiednich procedur obliczeniowych pozwala uchwycić najważniejsze cechy dynamiczne obiektu badań. Obecnie projektowanie pojazdów szynowych to bardzo czaso-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Artur Borowiec, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651617; artur.borowiec@prz.edu.pl

<sup>2</sup> Leonard Ziemiański, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651353; ziele@prz.edu.pl



chłonne i odpowiedzialne zadanie. Każdy element pojazdu przed wdrożeniem do eksploatacji musi spełniać ostre wymagania norm krajowych [4,5]. Testowanie nowych produktów i ich atestowanie jest związane z wykonaniem szeregu prób środowiskowych weryfikujących jego odporność i trwałość. Część z weryfikacji dotyczy badań dynamicznych w tym: symulacyjne próby trwałości przy zwiększonym poziomie wibracji losowych, próby udarowe oraz próby trwałości zmęczeniowej. Jednym z podstawowych parametrów jest wyznaczenie częstotliwości drgań własnych. Współcześnie projektanci dysponują bardzo zaawansowanymi narzędziami numerycznymi. Mogą oni na etapie projektowania wstępnie zweryfikować efekty części obciążeń na modelach numerycznych. Niemniej jednak weryfikacja w laboratorium prototypów jest nieunikniona i konieczna. Wyniki takich eksperymentów mogą posłużyć do weryfikacji przyjętych modeli numerycznych lub nawet ich poprawy.

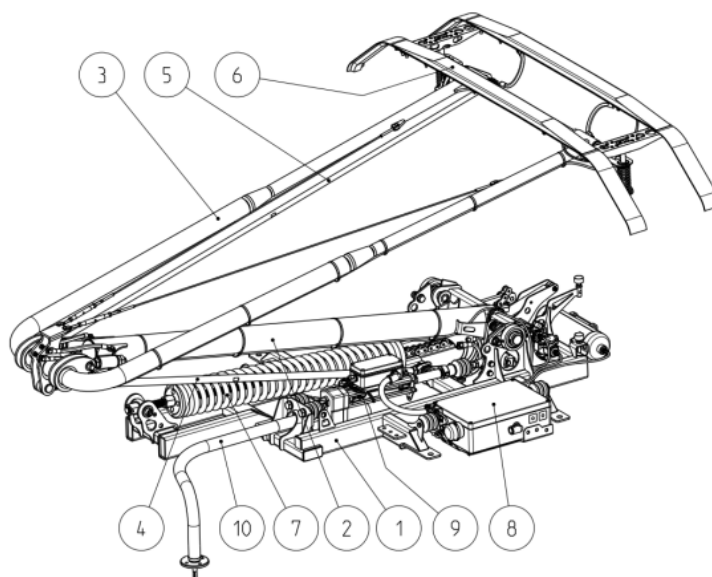
## 2. Opis badań dynamicznych

Badania zrealizowano w Laboratorium Badań Konstrukcji Wydziału Budownictwa, Inżynierii Środowiska i Architektury Politechniki Rzeszowskiej. Głównym celem był pomiar parametrów dynamicznych pantografu: częstotliwości, współczynników tłumienia oraz postaci. W trakcie prób zastosowano eksperymentalną analizę modalną [6], z pomiarem sygnału wymuszenia i odpowiedzi w przyjętych punktach pomiarowych. W praktyce estymację parametrów modelu modalnego uzyskano stosując algorytm PolyMAX [7] w dziedzinie częstotliwości. Podczas badań porównano wyniki analiz modalnych dla różnych sposobów wymuszania drgań w celu weryfikacji uzyskanego modelu modalnego układu mechanicznego. Do porównania pomierzonych postaci drgań zastosowano współczynnik MAC [8].

### 2.1. Opis przedmiotu badań - pantografu

Projektowany model odbieraka prądu to produkt oznaczony jako 120ECI, przeznaczony do lekkich pojazdów szynowych. Zaprojektowany przez firmę EC-Engineering odbierak prądu w założeniach projektowych pozwala na skuteczną pracę z trakcją w zakresie od 44 cm do 288 cm nad poziom zamocowania do pojazdu [9]. Na rys. 1 przedstawiono budowę pantografu typu 120ECI. Konstrukcja mechanizmu odbieraka oparta jest na dwóch czworobokach przegubowych. Dolny czworobok składa się z ramy podstawy (1), ramienia dolnego (2), ramienia górnego (3) oraz drążka reakcyjnego (4). Górny czworobok składa się z ramienia dolnego (2), ramienia górnego (3), drążka stabilizującego (5) oraz drążka zespołu ślizgacza (6). Zespół ślizgacza (6) połączony jest z ramieniem górnym (3) podatnie z zastosowaniem zestawu sprężyn. Urządzenie poprzez zespół ślizgacza (6), dwugałęziowe aluminiowe ramię górne (3), stalowe ramię dolne (2), ramę wsporczą (1) oraz zestaw 8 linek boczniujących przekazuje po-

tencjał elektryczny z trakcji do przyłącza elektrycznego zainstalowanego na ramie wsporczej, służącego do połączenia odbieraka z instalacją pojazdu. Podnoszenie pantografu realizowane jest poprzez zespół napędowy (7) wyposażony w sprężynę naciągową. Siła pochodząca od sprężyny w korelacji z odpowiednio ukształtowaną krzywką napędową umożliwia nie tylko samoczynne podniesienie pantografu do maksymalnej wysokości konstrukcyjnej ale zapewnia również stały docisk zespołu ślizgacza (6) do trakcji w zakresie roboczym.



Rys. 1. Schemat pantografu typu 120ECI, na podstawie [6] (opis w tekście)

Fig. 1. Scheme of pantograph 120ECI, on the basis of [6] (description in the text)

Układ kinematyczny członów pantografu zapewnia wąską trajektorię ruchu ślizgacza w zakresie roboczym wynoszącą  $\max \pm 30\text{mm}$  względem prostej pionowej przechodzącej przez punkt obrotu ślizgacza w pozycji spoczynkowej (pantograf złożony). Dźwignia reakcyjna (4) odpowiada za właściwą pozycję ramienia górnego (3). Natomiast dźwignia stabilizująca (5) steruje położeniem zespołu ślizgacza (6) i determinuje jego równoległe ułożenie względem trakcji. Opadanie pantografu realizowane jest poprzez zespół siłownika elektrycznego (9), który wysuwając się przeciwdziała sile wywieranej przez sprężynę. W ten sposób siłownik działając na odpowiedniej dźwigni poprzez układ kinematyczny doprowadza do obniżania się ślizgacza oraz ponownie napina sprężynę, akumulując w niej siłę potrzebną do kolejnego podniesienia.



Rys. 2. Pantograf podczas badań dynamicznych

Fig. 2. Pantograph during dynamic testing

Napęd awaryjny (10) służy do ręcznego podnoszenia/opuszczania odbieraka w sytuacjach, kiedy nie ma możliwości wykonania tych operacji za pomocą elektrycznego napędu. System ADD (8) jest odpowiedzialny za awaryjne opuszczanie pantografu. Odbierak prądu z systemem ADD posiada wbudowany układ wykrywania awarii, który podczas jej wystąpienia w sposób automatyczny przejmuje sterowanie nad pracą siłownika elektrycznego, doprowadzając do niezależnego od woli motorniczego złożenia pantografu. Powyższe zastosowanie systemu uchroni w przypadku uszkodzenia mechanicznego nakładki lub też jej nadmiernego zużycia nie tylko sam pantograf, ale i sieć trakcyjną przed ewentualnymi dalszymi uszkodzeniami [6]. Całość pantografu z systemem ADD waży blisko 185 kg. W artykule przyjęto w opisie osi pantografu nazwy zgodne z kierunkami pojazdu (wzdłużny -X, poprzeczny -Y i pionowy -Z). Na rys. 2 przedstawiono zdjęcie obiektu podczas badań dynamicznych.

## 2.2. Aparatura pomiarowa

Badania zrealizowano z wykorzystaniem aparatury Katedry Mechaniki Konstrukcji Politechniki Rzeszowskiej. Cały zestaw to dedykowany system do realizacji testów zmęczeniowych umożliwiającą kompleksową ocenę wytrzymałości, jakości i trwałości elementów oraz obiektów (mechanicznych, elektrycznych i elektronicznych) poddawanych długotrwałym obciążeniom dynamicznym.

Głównym elementem systemu to wzbudnik elektrodynamiczny (TIRA TV 59389/AIT-440), stół ślizgowy (TGT MO 60 XXL) oraz układu sterowania zapewniającego realizację testów przestrajaniem sinusem, szumem lub udarem. Zastosowany w badaniach analizator to model Scadas SCR09 firmy Siemens, z kartami o próbkowaniu sygnału 102,4 kHz. Wykorzystany podczas badań młotek modalny to produkt firmy PCB (T086D20). Czujniki przyspieszeń to modele o czułości 10 mV/g i 100 mV/g firm B&K oraz PCB. Zastosowano tensometry foliowe o bazie 10 mm pracujące w układzie ćwierć-mostków firmy TENMEX. Podczas testów wykorzystano oprogramowanie TestLab firmy Siemens, a w szczególności moduły: MIMO FRF Testing, Impact Testing oraz Modal Analysis.

### 2.3. Metodyka badań

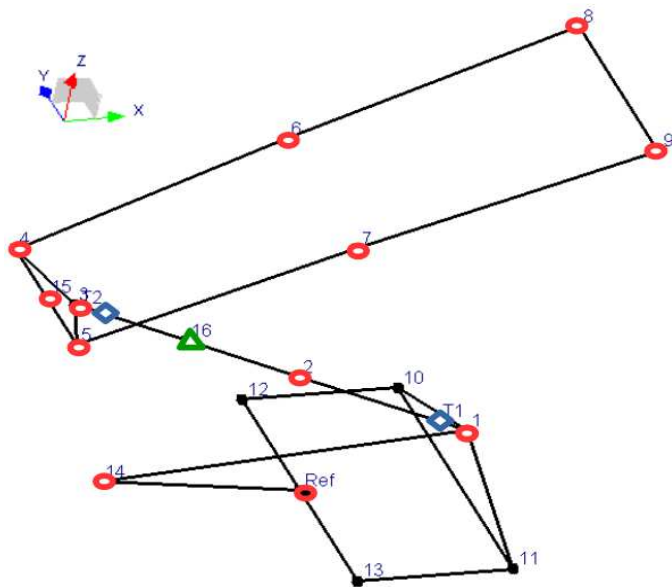
W warunkach eksploatacji praca elementu odbywa się w różnych pozycjach rozłożenia. Wysokość pracy mierzy się między poziomem mocowania całego pantografu na pojeździe a górną okładziną ślizgacza, który to ma kontakt z trakcją. Podczas projektowania przyjęto wartości graniczne maksymalną (228 cm) i minimalną (44 cm) zakresu pracy odbieraka prądu. Podczas badań przyjęto pięć położzeń roboczych z zakresu pracy ślizgacza:

- minimalny (*P44*),
- $\frac{1}{4}$  zakresu (*P105*),
- $\frac{1}{2}$  zakresu (*P166*),
- $\frac{3}{4}$  zakresu (*P227*),
- maksymalny (*P288*).

Zachowanie przyjętych geometrii uzyskano za pomocą elementu z wiotkiego paska dodanego między osią ślizgacza a ramą pantografu (rys. 2). Przyspieszenia mierzono za pomocą czujników ICP jednoosiowych i trójosiowych umieszczonych na konstrukcji. Rozmieszczenie czujników oznaczono okręgami na rysunku przedstawiającym model geometryczny przyjęty w programie TestLab (rys. 3). Przyjęty zestaw pozwalał zdefiniować model eksperymentalny o 22 stopniach swobody dynamicznej. Tensometry przyklejono od góry w dwóch punktach na dolnym ramieniu pantografu. Rozmieszczenie tensometrów oznaczono rombami (rys. 3). Pierwszy u dołu ramienia dolnego wzdłuż osi rury, drugi u góry ramienia dolnego zgodnie z poprzeczną osią pantografu.

W badaniach zrealizowanych w laboratorium z zastosowaniem eksperymentalnej analizy modalnej wykorzystano wymuszenia:

- sygnałem białego szumu,
- młotkiem modalnym,
- wychylenie poprzeczne ślizgacza z położenia równowagi.



Rys. 3. Model geometryczny pantografu: okręgi – czujniki przyspieszeń; romby – tensometry; trójkąt – wymuszenie impulsowe

Fig. 3. Geometric model of pantograph: circles - acceleration sensors; diamonds - strain gauges; triangle - impulsive impulse

Wszystkie wymuszenia realizowano w kierunku poprzecznym pantografu zgodnie z osią Y modelu geometrycznego.

Sygnal losowy białego szumu generowano w zakresie 3,6 Hz-128 Hz. Biały szum charakteryzuje się stałą wartością amplitud w całym pasmie częstotliwości. Dolna granica wynikała z fizycznych ograniczeń wzbudnika. Sygnal zarejestrowano po 50 powtórzeniach przy rozdzielczości 0,125 Hz. W celu weryfikacji liniowości modelu zrealizowano trzy poziomy napięcia sterującego sygnał, odpowiednio 0,2 V, 0,3 V oraz 0,4 V. Sygnal referencyjny rejestrowano na elementach w miejscu mocowania do stołu ślizgowego wzbudnika.

Wymuszenie impulsowe młotkiem modalnym realizowano na dolnym ramieniu w dwóch kierunkach prostopadle do osi rury, w punkcie oznaczonym na rys. 3 trójkątem. Kierunek oznaczony -Y był zgodny z poprzecznym kierunkiem mechanizmu, a kierunek oznaczony -Z był ukośny od pozostałych osi geometrii pantografu. Sygnal referencyjny rejestrowano czujnikiem siły wbudowanym w młotek. Do analiz przyjęto uśredniony sygnal z serii 10 uderzeń.

Wymuszenie poprzez wychylenie poprzeczne ślizgacza z położenia równowagi zastosowywano wg procedury z normy [5] punkt 6.4.2.2. Punkt ten dotyczy wyznaczania częstotliwości drgań poprzecznych pantografu. Wartość ta jest wykorzystywana jako wymuszenie przy weryfikacji trwałości zmęczeniowej

podczas testu w podtrzymywanym rezonansie o liczbie  $10^7$  cykli. Pomiar ten zakłada wychylenie poprzeczne ślizgacza z położenia równowagi siłą 300 N, zwolnienie oraz pomiar w trakcie swobodnych ruchów pantografu. Przy realizacji tej próby wychylenie ślizgacza wynosiło ok. 2,0 cm. Dla tego wymuszenia jako punkt referencyjny przyjęto odczyt z jednego z czujników. Do analiz przyjęto uśredniony sygnał z serii 10 wychyleń.

### 3. Wyniki pomiarów

Zgodnie z przyjętą metodyką badań zrealizowano przyjęte w planie badań pomiary dla różnych wymuszeń konstrukcji. Z uwagi na wyraźny podział rejestrowanego widma częstotliwości na dwie grupy rezonansów podzielono cały rejestrowany zakres na dwie części. Wyniki estymacji parametrów modalnych prezentowane w publikacji dotyczą analiz pierwszego zakresu 3 Hz-60 Hz. W tym zakresie przyjęto gęstość modalną na poziomie piętnastu biegunów układu.

#### 3.1. Wymuszenie białym szumem

Wyznaczone parametry dynamiczne, wartości zidentyfikowanych częstotliwości drgań i współczynników tłumienia modalnego dla modelu *P166*, zestawiono w tabeli. 1. Zwiększenie amplitudy (0,2 V na 0,4 V) sygnału wymuszenia spowodowało rejestrowane wartości wszystkich częstotliwości zmniejszyły się średnio o ok. 1,3 %. Różnica taka jest wartością zbliżoną do zastosowanej dokładności pomiarowej 0,125 Hz. W tabeli tej dwie ostatnie kolumny zawierają obliczone wartości współczynników MAC względem wymuszenia o najmniejszej amplitudzie. Uzyskane wyniki potwierdzają zgodność otrzymanych modeli.

W celu weryfikacji charakteru układu przedstawiono na rys. 4 przykładowe przebiegi spektrum odpowiedzi i widmowych funkcji przejścia dla różnych amplitud wymuszenia pseudolosowego białym szumem. Zauważyć można, że rejestrowane spektrum odpowiedzi jest proporcjonalne do wymuszeń. Na wykresach FRF widoczny jest spadek częstotliwości co może być związany z nieliniową sprężystością układu. Natomiast przyczyną różnic w amplitudach przebiegów FRF może być nieliniowe tłumienie. Zmiany w amplitudach mają różne tendencje wzrostowe (~11,88 Hz) lub spadkowe (~10,38 Hz) niezależnie od tendencji zmian poziomu sygnału. Zastosowanie tych samych zakresów wymuszeń dla pozostałych położzeń ślizgacza (P44, P105, P227, P288) potwierdziło tendencje do nieznacznego ok. 1-2 % spadku wartości rejestrowanych częstotliwości.

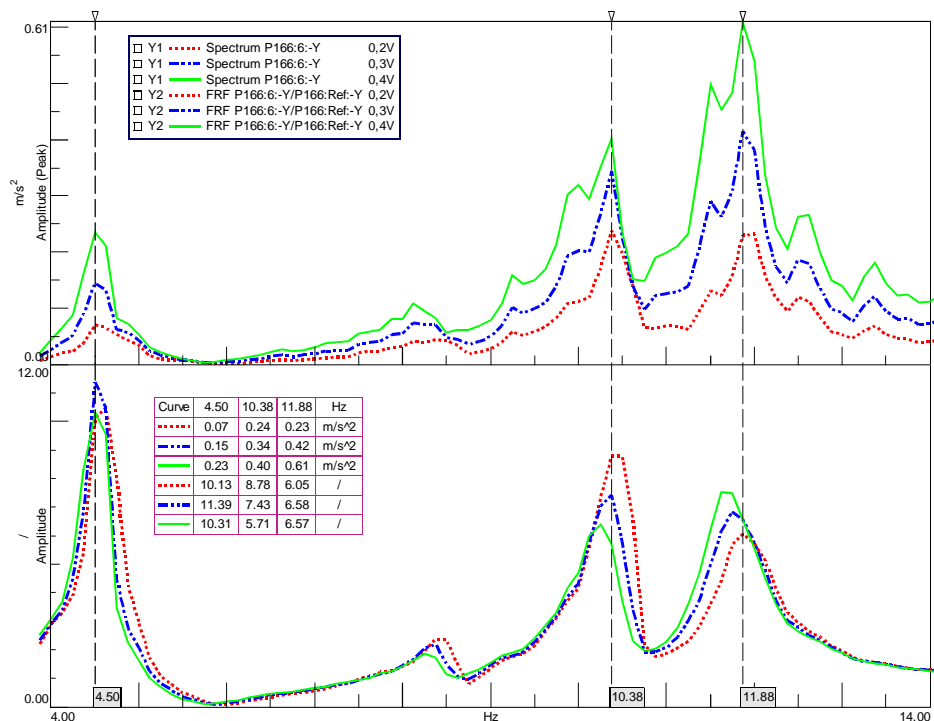
Tabela 1. Wartości zidentyfikowanych częstotliwości drgań, współczynników tłumienia modalnego oraz współczynniki MAC modelu *PI66* wymuszanego białym szumem

Table 1. The values of the identified vibration frequencies, modal damping coefficients and MAC coefficients of the *PI66* model caused by the white noise

Numer postaci	Wymuszenie 0,2 V		Wymuszenie 0,3 V		Wymuszenie 0,4 V		MAC	
	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	02V, 03V	02V, 04V
1.	4,67	1,17	4,60	1,59	4,58	1,57	0,999	0,998
2.	6,96	2,58	6,89	2,85	6,84	2,34	0,996	0,980
3.	7,62	1,62	7,55	3,52	7,49	2,42	0,991	0,955
4.	8,53	1,21	8,45	1,58	8,38	1,71	0,999	0,996
5.	10,41	1,46	10,29	2,32	10,23	1,95	0,998	0,994
6.	11,85	2,69	11,73	2,39	11,66	2,13	0,999	0,997
7.	14,22	3,21	14,09	3,42	14,02	2,91	0,933	0,812
8.	19,17	0,46	19,20	0,93	19,23	0,75	0,925	0,827
9.	21,03	0,16	20,96	0,49	20,87	0,47	0,968	0,917
10.	30,59	0,92	30,50	1,44	30,41	1,23	0,952	0,920
11.	32,28	0,37	32,23	0,41	32,11	0,42	0,962	0,886
12.	37,50	2,53	36,61	2,52	36,59	2,32	0,964	0,935
13.	40,60	0,91	40,46	1,15	40,20	1,16	0,914	0,853
14.	44,38	0,24	44,95	0,38	44,87	0,39	0,728	0,636
15.	49,73	1,26	49,03	1,20	48,61	1,00	0,971	0,939

### 3.2. Wymuszenia impulsowe

W tabeli 2. zestawiono wyniki uzyskane dla wymuszenia młotkiem oraz wychylenia pantografu w kierunku poprzecznym. W tabeli zawarto wartości współczynników MAC estymowanych postaci względem wymuszenia losowego o amplitudzie 0,3 V. Zastosowane w eksperymencie wymuszenia impulsowe nie pozwoliły na estymację wszystkich częstotliwości rezonansowych uzyskanych przy wymuszeniu losowym. Największą zbieżność wyników uzyskano dla czwartej postaci drgań (8,45 Hz). Pozostałe estymowane parametry dynamiczne różnią się co do wartości rezonansów lub ich estymowanych postaci. Różnice te można tłumaczyć kierunkiem zastosowanych wymuszeń oraz zbyt małą energią impulsu do wzbudzenia wszystkich rezonansów. Zarejestrowana pierwsza postać bardzo wyraźnie odbiega od postaci wymuszanej białym szumem. Wyniki wymuszenia impulsowego można potraktować jako zgrubne oszacowanie modelu modalnego badanego obiektu.



Rys. 4. Przykładowe przebiegi zmierzonych odpowiedzi w punkcie 6. modelu *P166*: góra – spektrum, dół – FRF

Fig. 4. Sample of measured response in point 6 of the model *P166*: top - spectrum, bottom – FRF

### 3.3. Modele modalne w zakresie pracy pantografu

W tabeli 3. zestawiono wyniki identyfikacji parametrów modeli modalnych dla przyjętych kilku pozycji z zakresu pracy pantografu (P44, P105, P166, P227, P288). Wszystkie wyniki w tabeli podano dla wymuszenia białym szumem o amplitudzie sygnału 0,3 V. Podczas estymacji parametrów dla modelu *P105* wyznaczono tylko 14 wartości częstotliwości. Postać o numerze 2. i 3. jest tożsamość (7,37 Hz). Zmiana kolejności postaci od 2. do 4. w modelu *P44* wynika z dopasowań postaci z pozostałymi modelami.

W tabeli 4. zestawiono obliczone wartości współczynnika MAC dla wszystkich rozpatrywanych modeli względem siebie. W tabeli wyróżniono wartości MAC większe niż 0,70. Ostatnia kolumna to wartość średnia MAC dla każdej ze zidentyfikowanych postaci.



Tabela 2. Wartości zidentyfikowanych częstotliwości drgań, współczynników tłumienia modalnego oraz współczynniki MAC modelu *PI66* wymuszanego impulsowo

Table 2. The values of the identified vibration frequencies, modal damping coefficients and MAC coefficients of the *PI66* model caused by the impact

Numer postaci	Wymuszenie								MAC		
	<i>b. szum 0,3 V</i>		<i>młotek -Y</i>		<i>młotek -Z</i>		<i>linka</i>		<i>biały szum 0,3 V</i>		
	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	-Y	-Z	linka
1.	4,60	1,59	4,51	3,71	4,22	3,55	4,00	2,41	0,075	0,003	0,134
2.	6,89	2,85	-	-	6,98	4,33	7,11	0,43	-	<b>0,923</b>	<b>0,906</b>
3.	7,55	3,52	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.	8,45	1,58	8,50	1,29	8,58	0,98	8,45	1,01	<b>0,984</b>	<b>0,886</b>	<b>0,939</b>
5.	10,29	2,32	10,46	1,74	-	-	10,96	0,31	<b>0,981</b>	-	<b>0,958</b>
6.	11,73	2,39	11,75	2,30	10,84	0,50	13,04	0,75	<b>0,994</b>	0,490	<b>0,921</b>
7.	14,09	3,42	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8.	19,20	0,93	22,74	2,28	19,48	0,51	-	-	0,138	0,311	-
9.	20,96	0,49	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10.	30,50	1,44	-	-	30,62	0,47	30,55	0,67	-	0,720	0,340
11.	32,23	0,41	33,82	0,77	-	-	33,38	1,33	0,617	-	0,412
12.	36,61	2,52	35,75	2,73	35,80	0,55	37,02	0,60	<b>0,776</b>	0,516	<b>0,876</b>
13.	40,46	1,15	-	-	40,12	5,04	42,59	0,31	-	0,809	0,444
14.	44,95	0,38	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15.	49,03	1,20	-	-	49,53	0,67	-	-	-	0,442	-

Analizując wyniki z tabel 3-4 można zauważyć dla wszystkich modeli: bardzo dużą zgodność postaci 1. i 6., dużą zgodność postaci 4., 5. i 12. oraz duże podobieństwo postaci 2., 7., 9., 10., i 14. Zmiana geometrii, rozkładanie pantografu, właściwie nie wpływa na zmiany wartości częstotliwości postaci 3., 4., 5., oraz 7. Największe zmiany przy rozkładaniu pantografu stwierdzono dla postaci 1. (spadek 39%), 2. (spadek 50%) oraz 9. (spadek 24%). Dla postaci 6. i 12. zaobserwowano niewielki wzrost wartości częstotliwości rezonansowych pantografu. Na rysunkach 5-7 przedstawiono podstawowy zestaw postaci do weryfikacji modeli numerycznych. Strzałkami znaczone składowe wektora przemieszczeń. Na rys. 5a pokazano 1. postać modelu *PI66*. Dla tej postaci dominują przemieszczenia górnej części pantografu w kierunku poprzecznym.

Tabela 3. Wartości zidentyfikowanych częstotliwości drgań, współczynników tłumienia modalnego modeli dla różnych poziomów położenia ślizgacza

Table 3. The values of the identified vibration frequencies, modal damping coefficients of the models of pantograph

Numer postaci	P44		P105		P166		P227		P288		P44-P288
	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	f [Hz]	$\delta$ [%]	$\Delta f$ [%]
1.	5,81	1,71	5,36	1,58	4,60	1,59	3,99	3,36	3,56	2,40	38,7
2.	9,66	2,78	7,37	4,94	6,89	2,85	6,60	4,21	4,80	3,19	50,3
3.	7,44	3,48	7,37	4,94	7,55	3,52	7,48	3,17	7,43	3,30	0,0
4.	8,47	1,35	8,37	0,94	8,45	1,58	8,50	1,74	8,77	1,57	-3,5
5.	10,38	3,64	10,33	3,00	10,29	2,32	10,48	2,96	10,72	3,71	-3,3
6.	11,67	3,01	11,46	1,69	11,73	2,39	11,95	1,98	12,59	1,33	-7,8
7.	14,12	1,01	14,21	3,27	14,09	3,42	14,13	2,98	14,20	2,51	-0,6
8.	19,76	0,23	20,31	0,12	19,20	0,93	18,45	0,69	17,27	0,58	12,6
9.	24,77	0,30	22,03	0,55	20,96	0,49	19,89	0,49	18,92	0,31	23,6
10.	30,76	1,62	32,53	0,98	30,50	1,44	28,83	0,95	28,37	0,93	7,8
11.	34,49	1,62	33,00	0,29	32,23	0,41	31,36	0,41	30,53	0,29	11,5
12.	35,48	0,12	36,04	1,69	36,61	2,52	37,63	1,39	38,79	0,09	-9,3
13.	39,94	0,28	40,10	0,52	40,46	1,15	40,94	0,68	41,29	1,39	-3,4
14.	45,14	0,28	45,14	0,37	44,95	0,38	44,15	0,41	43,22	0,59	4,3
15.	50,79	0,19	50,13	0,94	49,03	1,20	48,64	1,30	49,06	0,64	3,4

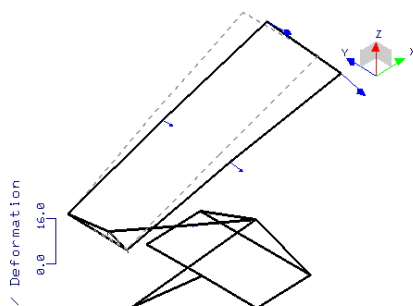
Rysunek 5b. zawiera postać 2., dla której dominują pionowe przemieszczenia górnej części. Na rys. 6a pokazano 4. postać modelu *P166*. Dla tej postaci dominują przemieszczenia skrętne górnej części pantografu z ruchem węzłów w pionie. Rysunek 6b. zawiera postać 5., dla której dominują ruchy poprzeczne środkowej części pantografu przy jednoczesnym rezonansie górnego stabilizatora z tendencją do niesymetrycznego skręcania osi ślizgacza. Na rys. 7a pokazano 6. postać modelu *P166*. Dla tej postaci dominują ruchy poprzeczne środkowej części pantografu przy jednoczesnym rezonansie górnego stabilizatora z tendencją do symetrycznego skręcania osi ślizgacza. Forma ta charakteryzuje się największymi wartościami przemieszczeń ze wszystkich obserwowanych postaci. Rysunek 7b. zawiera postać 12., dla której dominuje zginanie górnej części pantografu.

Tabela 4. Wartości współczynników MAC dla różnych poziomów rozłożenia pantografu

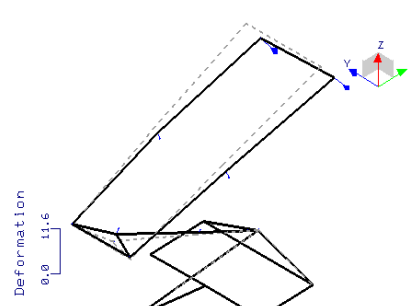
Table 4. The values of the MAC coefficients of a models of pantograph

Numer postaci	P44				P105			P166		P227	Średnia
	P105	P166	P227	P288	P166	P227	P288	P227	P288	P288	
1.	<b>0,92</b>	<b>0,94</b>	<b>0,90</b>	<b>0,84</b>	<b>0,96</b>	<b>0,94</b>	<b>0,94</b>	<b>0,99</b>	<b>0,95</b>	<b>0,95</b>	<b>0,93</b>
2.	0,54	0,56	0,47	0,39	<b>0,74</b>	<b>0,74</b>	0,69	<b>0,90</b>	<b>0,81</b>	<b>0,85</b>	0,67
3.	0,40	0,36	0,31	0,10	0,64	0,24	0,07	<b>0,73</b>	0,31	0,46	0,36
4.	<b>0,76</b>	<b>0,73</b>	0,67	0,64	<b>0,95</b>	<b>0,94</b>	<b>0,93</b>	<b>0,99</b>	<b>0,98</b>	<b>0,99</b>	<b>0,86</b>
5.	<b>0,91</b>	<b>0,86</b>	<b>0,87</b>	<b>0,74</b>	<b>0,98</b>	<b>0,94</b>	<b>0,72</b>	<b>0,97</b>	<b>0,74</b>	<b>0,82</b>	<b>0,85</b>
6.	<b>0,94</b>	<b>0,93</b>	<b>0,89</b>	<b>0,86</b>	<b>0,97</b>	<b>0,94</b>	<b>0,88</b>	<b>0,99</b>	<b>0,96</b>	<b>0,98</b>	<b>0,93</b>
7.	<b>0,75</b>	0,31	0,54	0,64	0,45	0,66	0,60	<b>0,72</b>	0,54	<b>0,84</b>	0,60
8.	0,28	0,01	0,01	0,10	0,28	0,34	0,18	<b>0,86</b>	0,55	<b>0,81</b>	0,34
9.	0,59	0,43	0,26	0,14	<b>0,75</b>	<b>0,71</b>	0,60	<b>0,91</b>	<b>0,75</b>	<b>0,92</b>	0,60
10.	0,20	0,34	0,46	0,53	<b>0,80</b>	0,58	0,64	<b>0,87</b>	0,77	<b>0,87</b>	0,61
11.	0,49	0,38	0,16	0,04	<b>0,90</b>	0,52	0,20	<b>0,79</b>	0,31	0,55	0,43
12.	0,48	0,62	0,63	0,61	<b>0,81</b>	<b>0,70</b>	0,61	<b>0,95</b>	<b>0,92</b>	<b>0,96</b>	<b>0,73</b>
13.	0,55	0,53	0,25	0,06	<b>0,83</b>	0,57	0,35	<b>0,64</b>	0,34	<b>0,85</b>	0,50
14.	<b>0,87</b>	<b>0,80</b>	0,54	0,25	<b>0,86</b>	0,59	0,32	<b>0,77</b>	0,39	<b>0,71</b>	0,61
15.	0,62	0,32	0,18	0,10	<b>0,71</b>	0,45	0,24	<b>0,84</b>	0,33	0,58	0,44

a) 4,60 Hz

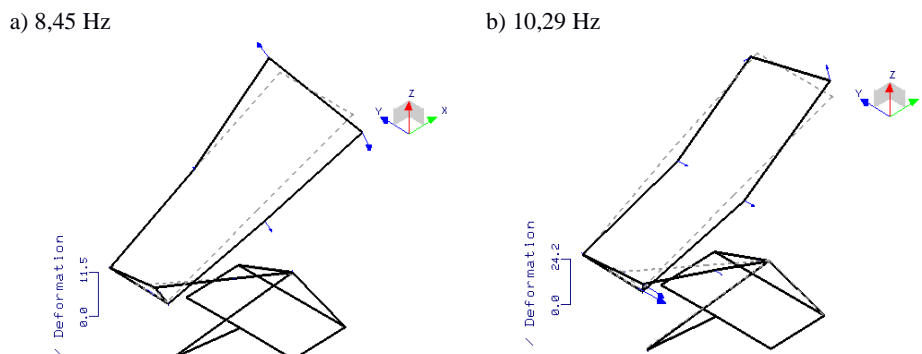
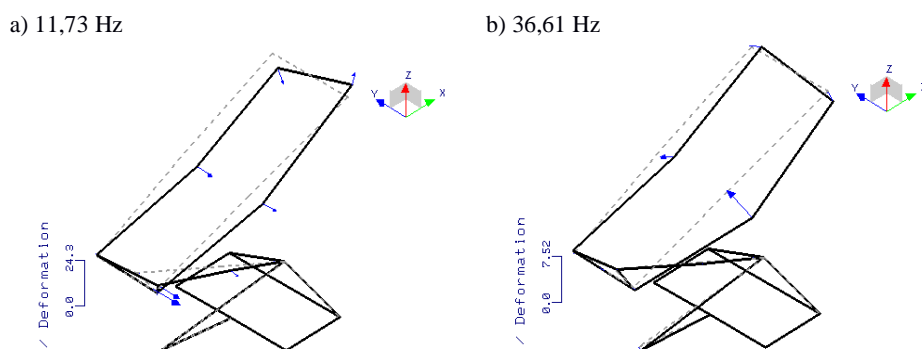


b) 6,89 Hz



Rys. 5. Pomierzone formy modelu P166: (a) pierwsza oraz (b) druga

Fig. 5. Measured forms of model P166: (a) first and (b) second

Rys. 6. Pomierzone formy modelu *PI66*: (a) czwarta oraz (b) piątaFig. 6. Measured forms of model *PI66*: (a) fourth and (b) fifthRys. 7. Pomierzone formy modelu *PI66*: (a) szósta oraz (b) dwunastaFig. 7. Measured forms of model *PI66*: (a) sixth and (b) twelfth

#### 4. Podsumowanie

Uzyskane wyniki analizy modalnej wdrażanego odbieraka prądu pozwoliły na wyznaczenie jego modelu modalnego. Porównanie modeli modalnych dla różnych poziomów rozłożenia pozwala wskazać, że kilka postaci ma zgodne formy w większości nieznacznie różniąc się wartościami częstotliwości. Można stwierdzić, że są to podstawowe formy drgań pantografu niezależnie od zakresu jego rozłożenia (1. 3,6-5,8 Hz, 2. 4,8-9,7 Hz, 4. 8,5-8,8 Hz, 5. 10,3-10,7 Hz, 6. 11,5-12,6 Hz, 12. 35,5-38,8 Hz). Wartości tych rezonansów zestawiono w tabeli 3., a skale podobieństw form zestawiono w tabeli 4. Pozostałe rezonansowe w większym stopniu zmieniają postacie drgań. Zastosowanie wymuszenia impulsowego potwierdziło część uzyskanych rezultatów wymuszenia losowego. Przedstawione w artykule wyniki zostaną zastosowane do weryfikacji modeli numerycznych pantografu.

### **Podziękowania**

*Do badań wykorzystano aparaturę zakupioną w projekcie nr POPW.01.03.00-18-012/09 z Funduszy Strukturalnych w ramach Programu Operacyjnego Rozwój Polski Wschodniej współfinansowanego przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.*

### **Literatura**

- [1] Ambrósio J., Pombo J., Pereira M., Antunes P., Mósca A.: A Computational Procedure for the Dynamic Analysis of the Catenary-Pantograph Interaction in High-Speed Trains, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 50, 3, pp. 681-699, 2012.
- [2] Lopez-Garcia O., Carnicero A., Marono J. L.: Influence of stiffness and contact modelling on catenary-pantograph system dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, 299, 2007, pp. 806-821.
- [3] Bautista A, Montesinos J, Pintado P.: Dynamic interaction between pantograph and rigid overhead lines using a coupled FEM – multibody procedure, *Mechanism and Machine Theory* 97, 2016, pp. 100-111.
- [4] PN-EN 61373 (2011) – Zastosowania kolejowe – Wyposażenie taboru kolejowego – Badania odporności na udary mechaniczne i wibracje.
- [5] PN-EN 50206-2:2010 - Zastosowania kolejowe - Tabor - Pantografy: Charakterystyki i badania - Część 2: Pantografy metra i lekkich pojazdów szynowych.
- [6] Ewins D.J.: *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press, Baldock, 2000.
- [7] Peetersa B, Van der Auweraera H, Guillaumeb P., Leuridana J, The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?, *Shock and Vibration* 11, 2004, pp. 395-409.
- [8] Allemang R. J., Brown D. L., A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, *Proc. of the 1st IMAC*, 1982, pp. 110-116.
- [9] Dokumentacja tech.-rozdrukowa odbieraka prądu 120ECI, EC-Engeneering, 2017.

## **DYNAMIC TESTING A PANTOGRAPH OF LIGHT RAIL VEHICLE**

### **S u m m a r y**

Dynamic testing of the rail vehicle current collector (pantograph) was conducted to determine the modal parameters of the proposed solution. The subject of the study was a current receiver dedicated to light rail vehicles marked 120ECI. In order to verify the modal model, the results of the modal analyzes for different vibration induction methods (random, pulsed) were compared. Measures were taken for the five positions of the collector head in its working range.

**Keywords:** modal analysis, light rail vehicle, pantograph

*Przesłano do redakcji: 19.03.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Michał JUREK<sup>1</sup>  
Katarzyna MAJEWSKA<sup>2</sup>  
Magdalena MIELOSZYK<sup>3</sup>  
Wiesław OSTACHOWICZ<sup>4</sup>  
Leonard ZIEMIAŃSKI<sup>5</sup>

## ANALIZA POŁĄCZENIA PŁYTA GFRP – USZTYWNIENIE Z WYKORZYSTANIEM WIBROTERMOGRAFII

W związku z dynamicznym rozwojem metod projektowania i wytwarzania materiałów kompozytowych, zaobserwować można ich zwiększającą się powszechność w wielu gałęziach przemysłu. Materiały kompozytowe znaleźć można również, w takich zastosowaniach, gdzie kluczowe znaczenie ma bezpieczeństwo konstrukcji. Stąd też rozpowszechnieniu kompozytów jako materiałów konstrukcyjnych, towarzyszy ciągły rozwój nieniszczących metod wykrywania uszkodzeń i oceny stanu technicznego konstrukcji.

W pracy przedstawiono wstępne rezultaty badań laboratoryjnych, których celem była próba oceny przydatności metody termografii aktywnej w badaniu stanu połączenia klejowego płyty i profilu kompozytowego. Badania przeprowadzono na próbkach wykonanych z kompozytów włóknistych GFRP (ang. *Glass Fibre Reinforced Polimer*). Na podstawie zarejestrowanych sekwencji termogramów, przeprowadzona została analiza porównawcza, która pozwoliła na skuteczne zlokalizowanie defektu w postaci wady połączenia płyta – usztywnienie.

**Słowa kluczowe:** wibrotermografia, kompozyty włókniste, badania nieniszczące, połączenia klejone

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Michał Jurek, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651622; mjurek@prz.edu.pl

<sup>2</sup> Katarzyna Majewska, Instytut Maszyn Przepływowych im. Roberta Szewalskiego, Polska Akademia Nauk, ul. Fiszer 14, 80-231 Gdańsk; k.majewska@imp.gda.pl

<sup>3</sup> Magdalena Mieloszyk, Instytut Maszyn Przepływowych im. Roberta Szewalskiego, Polska Akademia Nauk, ul. Fiszer 14, 80-231 Gdańsk; mmieloszyk@imp.gda.pl

<sup>4</sup> Wiesław Ostachowicz, Instytut Maszyn Przepływowych im. Roberta Szewalskiego, Polska Akademia Nauk, ul. Fiszer 14, 80-231 Gdańsk; Politechnika Warszawska, Narbutta 84, 02-524 Warszawa; wieslaw@imp.gda.pl

<sup>5</sup> Leonard Ziemiański, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; ziele@prz.edu.pl

## 1. Wprowadzenie

Dynamiczny rozwój nauk związanych z projektowaniem i wytwarzaniem materiałów kompozytowych wpłynął na ich powszechność w wielu obszarach aktywności człowieka. Z drugiej zaś strony, gwałtowny rozwój materiałów kompozytowych związany jest z rosnącym zapotrzebowaniem przemysłu lotniczego, kosmicznego czy motoryzacyjnego na lekkie i wytrzymałe materiały, którymi dałoby się zastąpić stal czy inne metale. Stąd też, materiały kompozytowe stosowane są również tam, gdzie priorytetowe znaczenie ma bezpieczeństwo użytkowników konstrukcji.

Zaistniała zatem potrzeba opracowania i doskonalenia systemów diagnozowania stanu technicznego konstrukcji i elementów kompozytowych, uwzględniających ich złożoność. Należy podkreślić, iż niejednorodność materiałów kompozytowych zwykle utrudnia skuteczną detekcję i identyfikację pojawiających się w nich uszkodzeń. Ponadto, opracowując metodę diagnozowania stanu technicznego konstrukcji kompozytowych, należy uwzględnić różnorodność uszkodzeń występujących w tego rodzaju strukturach. Obok typowych defektów jak delaminacja, rozwarstwienie, w bardziej złożonych strukturach pojawiają defekty w postaci rozklejenia, czy też odspojenia połączonych kompozytowych elementów konstrukcji, jak na przykład różnego rodzaju żeber, wręg i innych usztywnień.

Jedną z metod zyskujących w ostatnim czasie znaczenie w diagnostyce konstrukcji jest termografia. Technika ta bazuje na pomiarze promieniowania podczerwonego, najczęściej w zakresie długości fali od ok. 9 do 14  $\mu\text{m}$ . Metody termografii można podzielić na pasywne i aktywne [1]. W metodach pasywnych wykorzystywany jest rozkład ciepła na badanym elemencie (np. budynku) powstały podczas jego normalnej eksploatacji, tzn. żadne dodatkowe źródło ciepła nie jest wykorzystywane. W przypadku termografii aktywnej, stosowane jest dodatkowe wymuszenie termiczne. W metodach nieniszczących badań konstrukcji, NDT (ang. *Non-Destructive Testing*) częściej stosuje się metody termografii aktywnej niż pasywnej. W metodzie aktywnej stosowane są różne wymuszenia termiczne, jak wzbudnik ultradźwiękowy [2], lampy halogenowe [3].

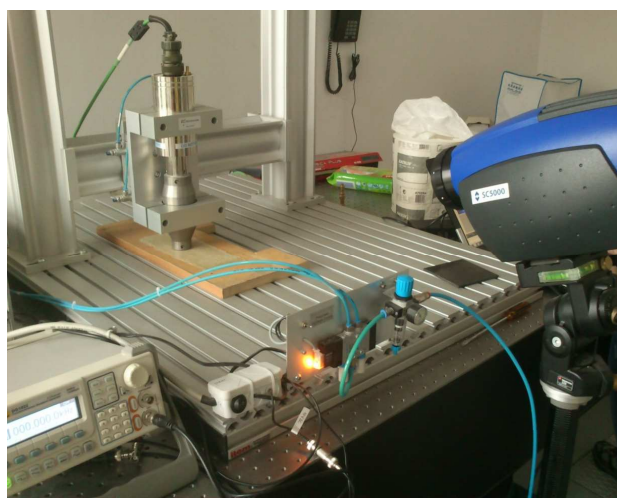
Metody termografii aktywnej są szeroko stosowane do detekcji uszkodzeń w metalowych elementach konstrukcyjnych [1], [4], jak również w częściach wykonywanych z kompozytów CFRP (ang. *Carbon Fibre Reinforced Polymer*) [5] lub GFRP (ang. *Glass Fibre Reinforced Polymer*) [6]. W przypadku materiałów kompozytowych aktywna termografia pozwala na detekcję delaminacji, pęknięć matrycy czy degradacji termicznej [7], a także stosowana jest do oceny jakości połączeń kompozytów [4].

W pracy przedstawiono wstępne wyniki badań, w których metodę termografii aktywnej, a dokładnie wibrotermografii, wykorzystano do oceny stanu połączenia płyta kompozytowa – usztywnienie. Celem analiz było wykrycie defektu połączenia w postaci rozklejenia.

## 2. Pomiary laboratoryjne

### 2.1. Stanowisko i przebieg pomiarów

W badaniach laboratoryjnych wykorzystano stanowisko badawcze (Rys. 1) składające się z kamery termowizyjnej, głowicy ultradźwiękowej, generatora sygnałów oraz stołu antywibracyjnego, na którym umieszczony został analizowany obiekt.



Rys. 1. Stanowisko badawcze

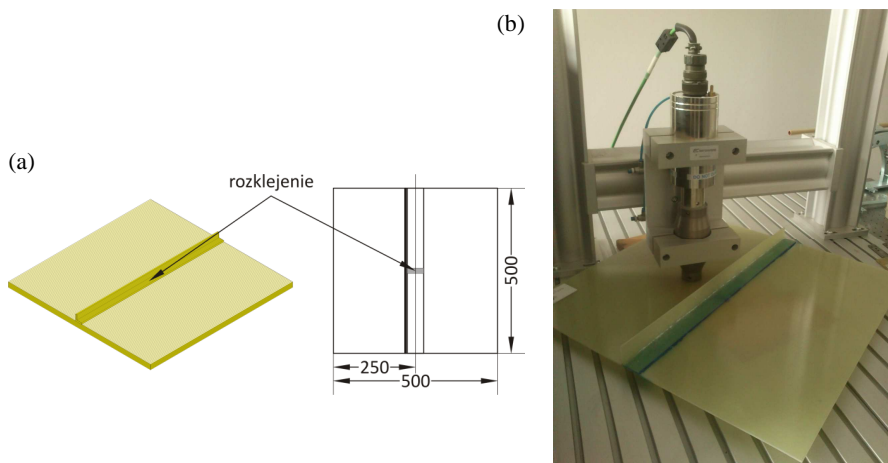
Fig. 1. Laboratory setup

Akwizycja i przetwarzanie zarejestrowanych sekwencji termogramów odbywało się za pomocą komputera przenośnego, wyposażonego w zaawansowane oprogramowanie przeznaczone do obsługi oraz sterowania kamerą

Badania laboratoryjne przeprowadzono na próbce kompozytowej GFRP w postaci płyty o wymiarach 500 mm x 500 mm x 3 mm z usztywnieniem typu L (Rys. 2). Płyta wykonana została z prepregu szklanego o symbolu VV 192T 202 g/m<sup>2</sup> IMP503 oraz żywicy epoksydowej. Do produkcji próbki laboratoryjnej zastosowanych zostało 12 warstw tkaniny w symetrycznym układzie [0/90/0/90/0/90/90/0/90/0/90/0].

Jako usztywnienie płyty użyty został profil w formie kątownika wykonany z tego samego materiału, o wymiarach 30 mm x 30 mm x 3 mm. Płyta oraz usztywnienie połączone zostały klejem epoksydowym, przy czym, w celu zasympulowania defektu połączenia wprowadzono rozklejenie o szerokości równej całkowitej szerokości usztywnienia i długości 10 mm. Lokalizacje defektu pokazano na Rys. 2a.





Rys. 2. (a) Schemat kompozytowej płyty z usztywnieniem typu L i miejscem rozklejenia, (b) obiekt rzeczywisty

Fig. 2. (a) GFRP plate with L-shaped stiffening rib scheme and joint defect localization, (b) specimen real photo

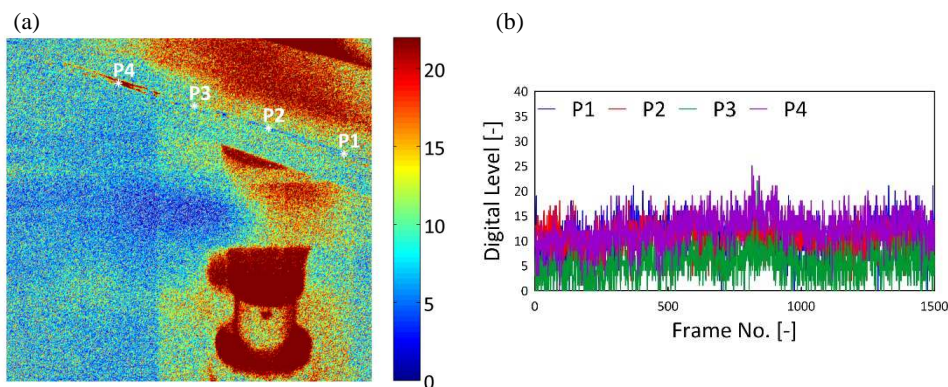
Eksperyment laboratoryjny polegał na rejestracji procesu „ogrzewania”, rozumianego jako wprowadzanie do analizowanego obiektu wymuszenia realizowanego przez głowicę ultradźwiękową. Zastosowano sinusoidalny sygnał wymuszenia o częstotliwości 6 kHz i amplitudzie międzyszczytowej 12 V. Każdy z pomiarów rejestrowany był w postaci 1500-klatkowego filmu, przy częstotliwości próbkowania kamery wynoszącej 100 Hz.

## 2.2. Rezultaty pomiarów

Na Rys. 3a przedstawiono wybraną klatkę filmu (termogram), na której wskazano obszary poddane dalszej analizie. Punkty P1 do P4 wybrano w miejscu krawędzi połączenia usztywnienia i płyty, przy czym punkt P3 – zlokalizowany został w miejscu, w którym znajduje się wada połączenia. Zarejestrowane w punktach P1-P4 sygnały czasowe przedstawiono na Rys. 3b.

Można stwierdzić, iż wartości średnie DL (ang. *Digital Level*) zarejestrowanych sygnałów, do jakich nagrzewa się próbka, różnią się dla punktów poza uszkodzeniem i w miejscu uszkodzenia. W punktach P1, P2, i P4 wartość ta wynosi ok. 10, natomiast dla punktu P3 - ok. 5. Zatem można wnioskować, że w miejscu uszkodzonego połączenia, próbka nagrzewa się do niższego poziomu.

Przetworzono zarejestrowane sygnały wyznaczając, w każdym przypadku, średnią kroczącą oraz liniową funkcję aproksymującą. Wynik przetwarzania pokazano na Rys. 4. Obliczone wartości współczynników liniowej funkcji aproksymującej zestawiono w Tab. 1.



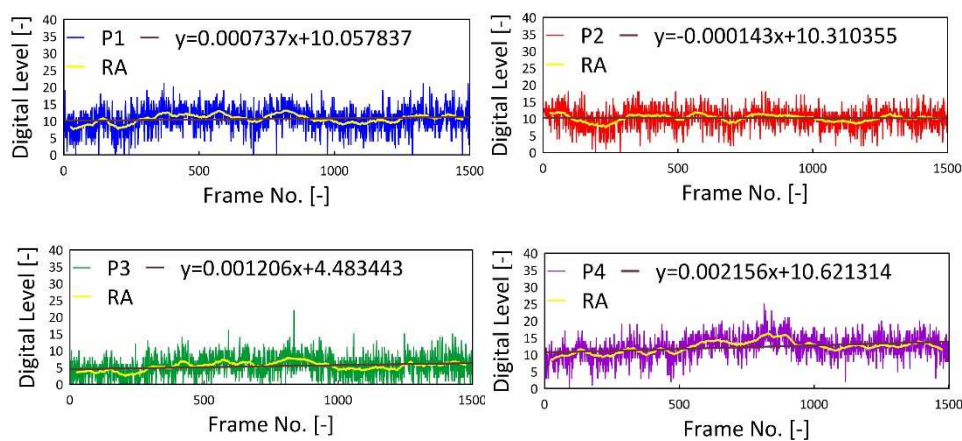
Rys. 3. (a) Wybrana klatka filmu z zaznaczeniem położenia analizowanych punktów (P1–P4), (b) przebiegi czasowe zarejestrowane w punktach P1–P4

Fig. 3. (a) Selected movie frame with localization of analyzed points (P1–P4), (b) time signals recorded in points P1–P4

Tabela 1. Współczynniki liniowej funkcji aproksymującej

Table 1. Linear approximation coefficients

Punkt pomiarowy	$a_1 \times 10^{-3}$	$a_0$
P1	0.737	10.057837
<b>P2</b>	<b>0.143</b>	<b>10.310355</b>
P3	1.206	4.483443
P4	2.156	10.621314



Rys. 4. Przebieg czasowy, średnia krocząca (RA) oraz aproksymacja liniowa (y) sygnałów zarejestrowanych w punktach P1–P4

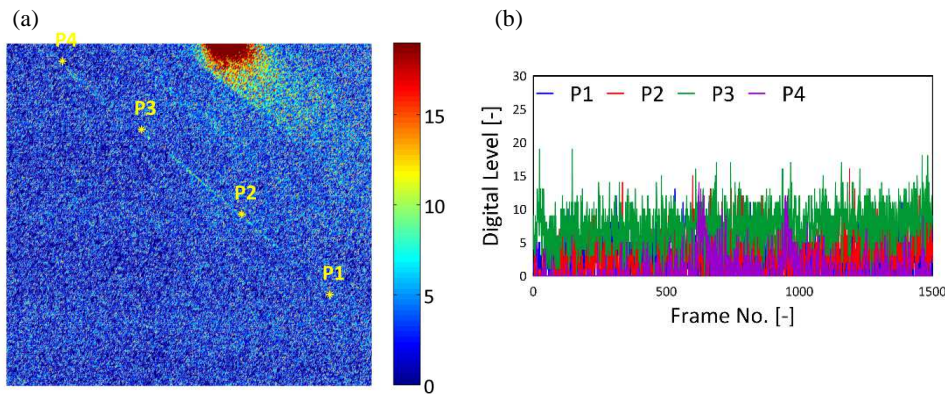
Fig. 4. Time signals, running average (RA) and linear approximation (y) of signals recorded in points P1–P4

Analizując wartości współczynnika kierunkowego ( $a_1$ ), można stwierdzić, iż próbka w analizowanych punktach nagrzewa się bardzo wolno, przy czym wartość wyznaczona dla punktu P2 odbiega od pozostałych. Biorąc pod uwagę współczynnik  $a_0$  można zauważyć, że w punkt P3, zlokalizowanym w miejscu defektu połączenia, charakteryzuje się wyraźnie mniejszą wartością.

Podczas przeprowadzania doświadczenia obserwowano na powierzchni próbki odbicia pracującej głowicy ultradźwiękowej. Utrudniało to analizę i interpretację otrzymanych wyników. Jednakże, jak przedstawiono powyżej możliwe było zlokalizowanie defektu połączenia.

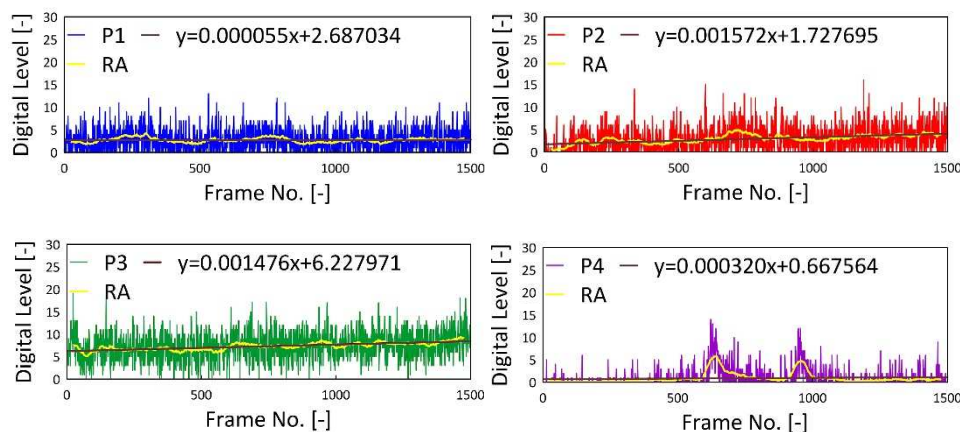
W celu wyeliminowania problemów związanych z odbiciami głowicy ultradźwiękowej na powierzchni na próbki oraz wpływu otoczenia zaproponowano rozwiązanie techniczne – przebudowa stanowiska. Wykonana została komora – całe stanowisko przedstawione na Rys. 1b wraz z kamerą termowizyjną przykryto czarnym, matowym materiałem, który ograniczał zewnętrzne promieniowanie. Dodatkowo, materiałem przykryto również głowicę ultradźwiękową. Dla tak przygotowanego stanowiska przeprowadzono ponowne pomiary (doświadczenie 2) oraz analizę analogiczną jak opisana powyżej.

Na Rys. 5a przedstawiono wybraną klatkę filmu (Nr 720), na której zaznaczono obszary poddane dalszej analizie. Zauważyć można, że zastosowanie prostego rozwiązania w postaci zasłon tworzących komorę pomiarową skutecznie wyeliminowało wpływ otoczenia, w tym refleksy pochodzące od głowicy ultradźwiękowej. Zarejestrowane w punktach P1-P4 przebiegi czasowe przedstawia Rys. 5b.



Rys. 5. (a) Wybrana klatka filmu z analizowanymi punktami (P1–P4), (b) przebiegi czasowe sygnałów zarejestrowanych w punktach P1–P4 – doświadczenie 2

Fig. 5. (a) Selected movie frame with localization of analysed points (P1–P4), (b) time signals recorded in points P1–P4 – experiment 2



Rys. 6. Przebieg czasowy, średnia krocząca (RA) oraz aproksymacja liniowa (y) sygnałów zarejestrowanych w punktach P1–P4 – doświadczenie 2

Fig. 6. Time signals, running average (RA) and linear approximation (y) of signals recorded in points P1–P4 – experiment 2

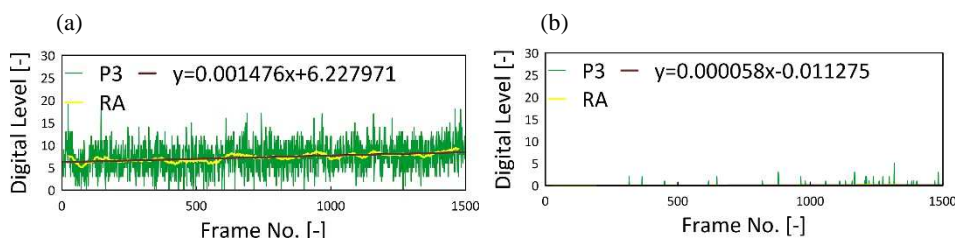
Analizując przebiegi przedstawione na Rys. 6 zauważyć można, że wartość średnia do jakiej „nagrzewa” się próbka w punktach P1, P2, i P4 wynosi ok. 2,5 DL, natomiast dla punktu P3 wartość ta oscyluje ok. 7,5 DL. Porównując współczynniki liniowej funkcji aproksymującej (Tab. 2), wyraźnie wyższą wartością współczynnika  $a_0$  charakteryzuje się punkt P3 zlokalizowany w miejscu defektu.

Tabela 2. Współczynniki liniowej funkcji aproksymującej – doświadczenie 2

Table 2. Linear approximation coefficients – experiment 2

Punkt pomiarowy	$a_1 \times 10^{-3}$	$a_0$
P1	0.055	2.687034
P2	1.572	1.727695
P3	1.476	6.227971
P4	0.320	0.667564

Dodatkowo, dla sekwencji sygnałów zarejestrowanych w doświadczeniu 2 wykonano analizy dla zmodyfikowanego położenia punktu P3. Położenie punktów P1, P2, P4 pozostało niezmienione natomiast punkt P3 został przesunięty wzdłuż krawędzi usztywnienia o około 3 mm, jednakże nadal znajdował się w miejscu defektu połączenia. Sygnały zarejestrowane dla dwóch różnych położenia punktu P3 zestawiono na Rys. 7. Charakter sygnału odpowiadający zmodyfikowanemu położeniu punktu P3 sugeruje, że w tym punkcie próbka prawie nie nagrzewa się – nie dociera do tego punktu fala cieplna.



Rys. 7. Przebieg czasowy, średnia krocząca (RA) oraz aproksymacja liniowa (y) sygnału zarejestrowanego w punkcie P3; (a) lokalizacja wyjściowa; (b) lokalizacja zmodyfikowana

Fig. 7. Time signals, running average (RA) and linear approximation (y) for signals recorded in points P3: (a) original localization; (b) shifted localization

Należy zwrócić uwagę na bardzo wyraźne różnice w obu sygnałach zarejestrowanych dla punktu P3. Teoretycznie zarówno jego pierwotne położenie, jak i zmodyfikowane, znajdują się w strefie, w której brak jest połączenia pomiędzy płytą a usztywnieniem. Jednak różnice w analizowanych sygnałach sugerują, iż wprowadzone uszkodzenie jest niejednorodne. W wyniku dokładnej analizy wizualnej zaobserwowano, że mniej więcej w połowie strefy uszkodzenia znajduje się klej, który najprawdopodobniej wypłynął podczas procesu wykonywania próbki. Fakt ten może stanowić uzasadnienie dla otrzymanych wyników.

### 3. Wnioski

Na podstawie wykonanych doświadczeń laboratoryjnych i przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że możliwa jest diagnostyka połączenia płyta kompozytowa – usztywnienie wykorzystująca metodę wibrotermografii. Jednakże postawienie jednoznacznej diagnozy w zakresie stanu połączenia, wymaga znacznego doświadczenia i dogłębnych analiz uzyskanych wyników.

Spowodowane to jest faktem, iż zastosowana technika pomiarowa wrażliwa jest na wpływ środowiska zewnętrznego (odbicia od różnego rodzaju zewnętrznych źródeł promieniowania podczerwonego), a także w sposób bardzo zróżnicowany reaguje na niejednorodności występujące w analizowanej strukturze. Efektem tego może być ograniczona skuteczność w wykrywaniu wad, jak również występowanie fałszywych alarmów.

Należy stwierdzić, że o ile, w warunkach laboratoryjnych, możliwe jest w stosunkowo prosty sposób, wyeliminowanie wpływu zewnętrznych źródeł promieniowania, w przypadku badań *in-situ* rzeczywistych struktur zapewnienie korzystnych warunków pomiarów może być bardzo utrudnione.

Ponadto, przy zróżnicowanych parametrach i miejscu wymuszenia termicznego, występujące w materiale nieciągłości czy też defekty reagować mogą w zróżnicowany sposób, tzn. „nagrzewać się” w mniejszym lub większym zakresie w porównaniu do stref bez zaburzeń (defektów). Stąd też, wydaje się iż

niezwykle istotne jest posiadanie dużego doświadczenia w analizie i interpretacji wyników pomiarów termowizyjnych.

### **Podziękowania**

*Praca powstała przy częściowym wsparciu finansowym Narodowego Centrum Badań i Rozwoju w ramach projektu (MARTECII/RAMMS/1/2016): Reliable and Autonomous Monitoring System for Maritime Structures.*

### **Literatura**

- [1] Vollmer M., Möllman K.-P.: Infrared Thermal Imaging, Wiley-Vch, 2010.
- [2] Zweschper T., Dillenz A., and Busse G.: Ultrasound Lockin Thermography – a NDT Method for the Inspection of Aerospace Structures, 15th World Conference on Non-destructive Testing 2000, Roma (Italy).
- [3] Meola C., Carlomagno G. M., Valentino M. and Bonavolontà C.: Non destructive evaluation of impact damage in CFRP with infrared thermography and squid, 2nd International Conference on Buckling and Postbuckling Behaviour of Composite Laminated Shell Structures, 2008, Germany.
- [4] Rajic N., Rowlands D. and Tsoi K.A. An Australian Perspective on the Application of Infrared Thermography to the Inspection of Military Aircraft, 2nd International Symposium on NDT in Aerospace 2010 - Tu.1.B.1, 2010, Germany.
- [5] Susa M., Castanedo C.I., Maldague X. and Bendada A.: Pulse thermography applied on a complex structure sample: comparison and analysis of numerical and experimental results, IV Conferencia Panamericana de END, 2007, Buenos Aires.
- [6] Shepard S.M.: Flash Thermography of Aerospace Composites, IV Conferencia Panamericana de END Buenos Aires, 2007.
- [7] Chobaut N., Bockenheimer C., Boller C., Valeske B., Ehrhart B.: Heat Damage Detection and Assessment in CFRP by Means of Extended-NDT, 2nd International Symposium on NDT in Aerospace 2010 - Poster 10.

## **ANALYSIS OF GFRP PLATE – STIFFENING RIB JOINT WITH USE OF VIBROTHERMOGRAPHY**

### **S u m m a r y**

Due to the dynamic development of designing and manufacturing methods composite materials are becoming increasingly common in many industries branches. Composite materials can also be found in applications where construction safety is critical. Hence, the widespread use of composites as construction materials is accompanied by the continuous development of non-destructive methods for detecting defects and assessing the technical condition of structures.

The paper presents the preliminary results of laboratory tests aimed at evaluating the usefulness of the active thermography method in the study of adhesive bonding of the panel and the composite profile. The tests were performed on samples made of GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer). Based on the recorded thermogram sequences, a comparative analysis was carried out which enabled the defect to be effectively located.

**Keywords:** GFRP composites, non-destructive testing, vibrothermography

*Przesłano do redakcji: 01.04.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*



Roman LEWANDOWSKI<sup>1</sup>

## CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU KONSTRUKCJI Z UŁAMKOWYMI TŁUMIKAMI MAXWELLA

W pracy przedstawiono nową metodę numerycznego całkowania równań ruchu z lepko-sprężystymi tłumikami drgań. Tłumiki drgań są opisywane za pomocą ułamkowego modelu Maxwella. Do opisu tego modelu stosuje się pochodne ułamkowe (niecałkowitego rzędu). Podano podstawy teoretyczne proponowanej metody oraz omówiono wyniki przykładowych obliczeń.

**Słowa kluczowe:** dynamika, tłumiki drgań, zasada Boltzmana, drgania niestacjonarne

### 1. Wprowadzenie

Efektywną metodą zmniejszania drgań wszelkiego rodzaju konstrukcji jest instalowanie na niej różnego rodzaju tłumików. Często w tym celu stosuje się tzw. tłumiki lepko-sprężyste [1, 2]. Zasadniczym elementem tego rodzaju tłumików są warstwy wykonane z materiału o dużych możliwościach rozpraszania energii (bardzo często kopolimery). W lepko-sprężystych tłumikach cieczowych zasadniczym elementem są cieczy o dużej lepkości. Omówienie sposobów wbudowania tego rodzaju tłumików oraz ich zasad działania i konstrukcji można znaleźć w [1, 2]. Dynamiczne zachowanie tych tłumików opisuje się za pomocą różnych modeli reologicznych. Przegląd stosowanych w tym celu modeli reologicznych można znaleźć w monografii [1]. Najczęściej stosowanymi modelami to model wiskotyczny, Kelvina i model Maxwella. Jak wynika z prac [3, 4] modele te niezbyt precyzyjnie opisują zachowanie tłumików lepko-sprężystych, do poprawnego opisu wymagane jest zastosowanie np. uogólnionego modelu Maxwella o dużej liczbie parametrów. Prowadzi to do znacznego wzrostu liczby niewiadomych w równaniach ruchu konstrukcji z lepko-sprężystymi tłumikami drgań. Z tego powodu coraz częściej do opisu tych tłumików stosuje się tzw. ułamkowe modele reologiczne [1]. Modele te wierniej opisują zachowanie tłumików w szerokim zakresie częstości wymuszenia, a równocześnie zawierają

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Roman Lewandowski, Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; tel. 616652472; roman.lewandowski@put.poznan.pl



mniej parametrów. Równania różniczkowe opisujące ułamkowe modele reologiczne zawierają jednak pochodne ułamkowe; co komplikuje metody rozwiązania równań ruchu konstrukcji ponieważ w tych ostatnich występują także pochodne ułamkowe (porównaj [1]).

Istnieje jednak możliwość opisanie zachowania ułamkowych modeli reologicznych za pomocą równań całkowych wykorzystujących zasadę Boltzmana (porównaj [5]). W tym przypadku zachowanie konstrukcji jest opisywane macierzowym równaniem różniczkowo-całkowym. W równaniu tym nie występują pochodne ułamkowe, ale trzeba znać funkcje relaksacji modeli ułamkowych użytych do opisu tłumików. Funkcje te są znane, ale opisywane są za pomocą funkcji specjalnych (porównaj [6]). W przypadku ogólnym do rozwiązania omawianego równania stosuje się metody numerycznego całkowania. Zostały one opisane np. w pracach [7-10]. We wszystkich wspomnianych prace zastosowano pochodnych ułamkowe podane przez Grunwalda i użyto ich do sformułowania metody numerycznego całkowania. Metody te charakteryzują się tym, że we wszystkich przypadkach ruch konstrukcji z elementami lepko-sprężystymi (tłumikami lub warstwami) opisywano równaniami różniczkowymi.

W pracy rozpatruje się problem nieustalonych drgań wymuszonych konstrukcji sprężystych z wbudowanymi lepko-sprężystymi tłumikami drgań. W odróżnieniu od wyżej wymienionych prac do opisu rozpatrywanego układu używa się równania różniczkowo-całkowego. Rozwiązanie wyznacza się nową metodą numerycznego całkowania.

## 2. Równania ruchu

### 2.1. Równania ruchu tłumika drgań

Do opisu tłumików drgań stosuje się tzw. ułamkowy model Maxwella. Składa się on z połączonych szeregowo elementu sprężystego i tzw. elementu sprężysto-lepkiego (the spring-pot element) [1, 3]. Zachowanie elementu sprężysto-lepkiego opisuje zależność:

$$u(t) = c_d D_t^\alpha x(t) \quad (1)$$

gdzie  $u(t)$  jest siłą w tym elemencie,  $x(t)$  względnym przemieszczeniem końców omawianego elementu,  $c_d$  stałą elementu, a symbol  $D_t^\alpha x(t)$  oznacza pochodną ułamkową rzędu  $\alpha$  funkcji  $x(t)$  względem czasu  $t$ . W pracy używa się pochodnych ułamkowych Caputo [1, 3].

Zachowanie ułamkowego tłumika Maxwella opisuje równanie:

$$u(t) + \theta^\alpha D_t^\alpha u(t) = k_d \theta^\alpha D_t^\alpha x(t) \quad (2)$$

gdzie  $\theta$  jest czasem relaksacji,  $\theta^\alpha = c_d / k_d$ , a  $k_d$  jest współczynnikiem sztywności elementu sprężystego.

Po wykonaniu na równaniu (2) transformacji Laplace'a mamy:

$$\bar{u}(s) = k_d \frac{(s\theta)^\alpha}{1 + (s\theta)^\alpha} \bar{x}(s) \quad (3)$$

gdzie symbole  $\bar{u}(s)$  i  $\bar{x}(s)$  oznaczają odpowiednio transformaty Laplace'a  $u(t)$  i  $x(t)$ ,  $s$  jest zmienną Laplace'a.

Jeżeli  $x(t) = x_0 = const$  to

$$\bar{u}(s) = k_d \frac{1}{s} \frac{(s\theta)^\alpha}{1 + (s\theta)^\alpha} x_0, \quad (4)$$

a po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymuje się [6]:

$$u(t) = k_d E_\alpha \left( -(t/\theta)^\alpha \right) x_0 = G(t) x_0 \quad (5)$$

gdzie  $G(t)$  jest funkcją relaksacji ułamkowego modelu Maxwella. Symbol  $E_\alpha(-(t/\theta)^\alpha)$  oznacza jednoparametrową funkcję specjalną Mittag-Lefflera, która dla  $\alpha > 0$  jest zdefiniowana w następujący sposób (porównaj [3]):

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + 1) \quad (6)$$

gdzie  $\Gamma(x)$  jest funkcją gamma.

Jeżeli przemieszczenia względne ułamkowego tłumika Maxwella zmieniają się w sposób dowolny to korzystając z zasady superpozycji Boltzmana (porównaj [4]) można napisać:

$$u(t) = \int_0^t G(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \quad (7)$$

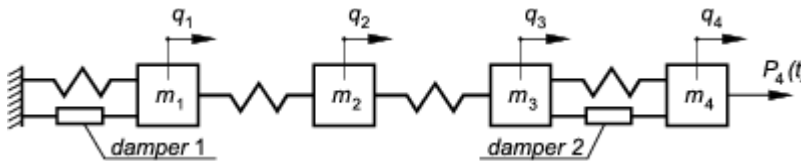
## 2.2. Równania ruchu konstrukcji z tłumikami drgań

Równanie ruchu konstrukcji sprężystej z ułamkowymi tłumikami Maxwella można zapisać w postaci poniższego równania różniczkowo-całkowego [5]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (8)$$

gdzie symbole  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ , oznaczają odpowiednio macierze bezwładności, tłumienia i sztywności konstrukcji,  $\mathbf{G}(t - \tau)$  jest macierzą funkcji relaksacji tłumików,  $\mathbf{q}(t)$  wektorem przemieszczeń konstrukcji, a  $\mathbf{P}(t)$  wektorem sił wymuszających. Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  jest macierzą tłumienia proporcjonalnego uwzględniającą właściwości tłumiące konstrukcji.

Schemat przykładowego układu z tłumikami drgań pokazano na rys. 1.



Rys. 2. Schemat rozpatrywanego układu

Fig. 2. Scheme of the considered system

Siły wywołane działaniem  $m$  tłumików można zapisać w postaci:

$$\int_0^t \mathbf{G}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{r=1}^m G_r(t - \tau) \mathbf{L}_r \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (9)$$

i wobec tego

$$\mathbf{G}(t - \tau) = \sum_{r=1}^m G_r(t - \tau) \mathbf{L}_r \quad (10)$$

gdzie  $G_r(t - \tau)$  jest funkcją relaksacji tłumika o numerze  $r$ , a  $\mathbf{L}_r$  macierzą alokacji wspomnianego tłumika.

### 3. Rozwiązanie równania ruchu

Rozwiązanie równania ruchu wyznacza się za pomocą metody średniego przyspieszenia Newmarka. Na osi czasu  $t$  obiera się szereg chwil  $t_n$  przy czym  $t_{n+1} = t_n + h$  gdzie  $h$  jest krokiem numerycznego całkowania. Wzory metody średniego przyspieszenia mają dobrze znaną postać (porównaj [1]):

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{h}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (11)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + h\mathbf{v}_n + \frac{h^2}{4} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (12)$$

gdzie  $\mathbf{d}_n = \mathbf{q}(t_n)$ ,  $\mathbf{v}_n = \dot{\mathbf{q}}(t_n)$ , a  $\mathbf{a}_n = \ddot{\mathbf{q}}(t_n)$ .

Do powyższych relacji należy dołączyć równanie ruchu (8) rozumiane jako warunek równowagi dynamicznej układu w chwili  $t_{n+1}$ , tzn.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \int_0^{t_{n+1}} \mathbf{G}(t_{n+1} - \tau)\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \quad (13)$$

Całki występujące w (13) oblicza się numerycznie korzystając z wartości funkcji podcałkowych w uprzednio obranych chwilach  $t_n$ . Zakłada się, że funkcje prędkości przemieszczeń  $v_j(\tau) = \dot{q}_j(\tau)$  można w typowym przedziale czasu  $(\tau_j, \tau_{j+1})$ ; przy czym  $\tau_{j+1} = \tau_j + h$ ; aproksymować prostymi. Jest to zgodne z aproksymacją wynikającą z metody średniego przyspieszenia Newmarka. Zmiany wartości funkcji  $G_r(t - \tau)$  dla małych wartości argumentu  $(t - \tau)$  są bardzo duże i dlatego w typowym przedziale czasu  $(\tau_j, \tau_{j+1})$  są one aproksymowane funkcjami wykładniczymi o tej samej postaci co funkcje relaksacji tłumika opisywanego klasycznym modelem Maxwella, tzn.

$$\tilde{G}_r(t_{n+1} - (\tau_j + \tilde{\tau})) = G_r(t_{n+1} - \tau_j)e^{-\tilde{\tau}/\tilde{\theta}_r} \quad (14)$$

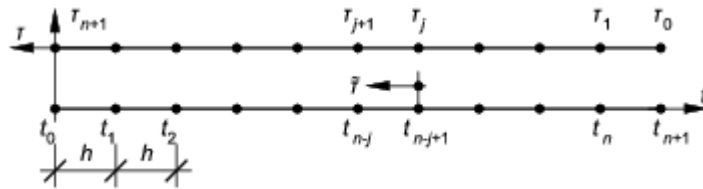
gdzie  $0 \leq \tilde{\tau} \leq h$  jest „lokalnym” czasem zaczynającym się w chwili  $\tau_j$ . „Lokalny” czas relaksacji  $\tilde{\theta}_r$  określony z warunku

$$\tilde{G}_r(t_{n+1} - \tau_j - h) = G_r(t_{n+1} - \tau_j)e^{-h/\tilde{\theta}_{r,j}} = G_r(t_{n+1} - \tau_{j+1}) \quad (15)$$

wyznacza się ze wzoru:

$$\tilde{\theta}_{r,j} = -h / \ln(G_{r,n-j} / G_{r,n-j+1}) \quad (16)$$

We wzorze (16) oznaczono  $G_{r,n-j} = G_r(t_{n+1} - \tau_{j+1})$ ,  $G_{r,n-j+1} = G_r(t_{n+1} - \tau_j)$ . Na rys. 2 pokazano oś czasu  $t$  oraz wspomniane powyżej osie  $\tau$  i  $\tilde{\tau}$ .



Rys. 2. Osie czasu używane w opisie teoretycznym

Fig. 2. The axis of time used in theoretical description

Rozpatrzmy typową całkę występującą w równaniu (13). Ma ona postać pokazaną poniżej i jest aproksymowana w następujący sposób:

$$\int_0^{t_{n+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) \dot{q}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^n \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau \quad (17)$$

a sumowanie dotyczy podprzedziałów na które podzielono przedział czasu  $(0, t_{n+1})$ .

Całkę występującą w (17) przekształca się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau &= \int_0^h G_r(t_{n+1} - (\tau_j + \tilde{\tau})) \frac{1}{h} [(h - \tilde{\tau})v_j + \tilde{\tau}v_{j+1}] d\tilde{\tau} = \\ &= \int_0^h G_{r,n-j+1} e^{-\tilde{\tau}/\tilde{\theta}_{r,j}} \frac{1}{h} [(h - \tilde{\tau})v_j + \tilde{\tau}v_{j+1}] d\tilde{\tau} = \\ &= \frac{1}{h} G_{r,n-j+1} \int_0^h e^{-\tilde{\tau}/\tilde{\theta}_{r,j}} [(h - \tilde{\tau})v_j + \tilde{\tau}v_{j+1}] d\tilde{\tau} \end{aligned} \quad (18)$$

Po obliczeniu powyższych całek można napisać:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau = \\ \frac{1}{h} [(G_{r,n-j}'' + hG_{r,n-j+1}' - G_{r,n-j+1}'')v_j + (hG_{r,n-j}' + G_{r,n-j}'' + G_{r,n-j+1}'')v_{j+1}] \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie oznaczono

$$\begin{aligned} G_{r,n-j}' &= G_{r,n-j} \tilde{\theta}_{r,j}, & G_{r,n-j}'' &= G_{r,n-j} \tilde{\theta}_{r,j}^2, \\ G_{r,n-j+1}' &= G_{r,n-j+1} \tilde{\theta}_{r,j}, & G_{r,n-j+1}'' &= G_{r,n-j+1} \tilde{\theta}_{r,j}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Jeżeli  $j = n$  to z (19) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau = \frac{1}{h} [(G_{r,0}'' + hG_{r,1}' - G_{r,1}'')v_n + \\ (hG_{r,0}' + G_{r,0}'' + G_{r,1}'')v_{n+1}] \end{aligned} \quad (21)$$

Po podstawieniu (19) do (17) i wydzieleniu składników zawierających  $v_{j+1}$  można zależność (17) przepisać w postaci:

$$\sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h} \left[ (G_{r,n-j}'' + hG_{r,n-j+1}' - G_{r,n-j+1}'') v_j + \right. \\ \left. (hG_{r,n-j}' + G_{r,n-j}'' + G_{r,n-j+1}'') v_{j+1} \right] + \\ \frac{1}{h} \left[ (G_{r,0}'' + hG_{r,1}' - G_{r,1}'') v_n + (hG_{r,0}' + G_{r,0}'' + G_{r,1}'') v_{n+1} \right] \quad (22)$$

Biorąc pod uwagę powyższy wynik można całkę występującą w (13) zapisać w następujący sposób:

$$\int_0^{t_{n+1}} \mathbf{G}(t_{n+1} - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = \mathbf{F}_{n+1} + \frac{1}{h} (h\mathbf{G}'_0 + \mathbf{G}''_0 + \mathbf{G}''_1) \mathbf{v}_{n+1} \quad (23)$$

gdzie

$$\mathbf{G}'_0 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n} G_{r,0} \mathbf{L}_r, \quad \mathbf{G}''_0 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n}^2 G_{r,0} \mathbf{L}_r \\ \mathbf{G}'_1 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n} G_{r,1} \mathbf{L}_r, \quad \tilde{\mathbf{G}}_1 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n}^2 G_{r,1} \mathbf{L}_r \\ \mathbf{F}_{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h} \left[ (\mathbf{G}_{r,n-j}'' + h\mathbf{G}_{r,n-j+1}' - \mathbf{G}_{r,n-j+1}'') \mathbf{v}_j + \right. \\ \left. (h\mathbf{G}_{r,n-j}' + \mathbf{G}_{r,n-j}'' + \mathbf{G}_{r,n-j+1}'') \mathbf{v}_{j+1} \right] + \\ \frac{1}{h} (\mathbf{G}_{r,0}'' + h\mathbf{G}_{r,1}' - \mathbf{G}_{r,1}'') \mathbf{v}_n \quad (24)$$

Ostatecznie równanie (13) zapisuje się w postaci:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \left[ \mathbf{C} + \frac{1}{h} (h\mathbf{G}'_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,1}) \right] \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{F}_{n+1} \quad (25)$$

Po podstawieniu zależności (11) i (12) do (25) można temu równanie nadać postać:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{d}_{n+1} = \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \quad (26)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{2}{h} \left( \frac{2}{h} \mathbf{M} + \mathbf{C} \right) + \frac{2}{h^2} (h\mathbf{G}'_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,1}) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} = & \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M} \left( \frac{4}{h^2} \mathbf{d}_n + \frac{4}{h} \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{C} \left( \frac{2}{h} \mathbf{d}_n + \mathbf{v}_n \right) - \\ & \frac{1}{h} \left( \mathbf{G}_0'' + h\mathbf{G}_1' - \mathbf{G}_1'' \right) \mathbf{v}_n + \frac{1}{h} \left( h\mathbf{G}_0' + \mathbf{G}_0'' + \mathbf{G}_1'' \right) \left( \frac{2}{h} \mathbf{d}_n + \mathbf{v}_n \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Z równania (26) można wyznaczyć wektor  $\mathbf{d}_{n+1}$  (przemieszczenia układu w chwili  $t_{n+1}$ ), a ze wzorów (11) i (12) prędkości i przyspieszenia w tej samej chwili.

Jeżeli w chwili początkowej  $t_0 = 0^+$  nie ma skoku sił wymuszających to równanie (13) rozumiane jako warunek równowagi w chwili  $t_0 = 0^+$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 + \mathbf{C}\mathbf{v}_0 + \mathbf{K}\mathbf{d}_0 = \mathbf{P}_0 \quad (29)$$

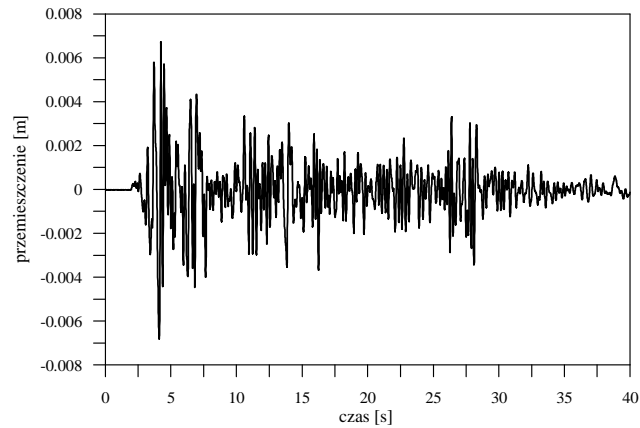
Z równania (29) można obliczyć wektor przyspieszeń w chwili początkowej  $\mathbf{a}_0$  wymagany w trakcie obliczania wektora  $\tilde{\mathbf{P}}_1$ .

Funkcje relaksacji  $\mathbf{G}(t - \tau)$  szybko i monotonicznie maleją zmierzając asymptotycznie do zera wraz ze wzrostem argumentu  $(t - \tau)$ . Można wobec tego bez większego błędu obliczać całkę występującą w równaniu (13) nie od  $\tau = 0$ , a od  $\tau = Jh$ , gdzie  $J$  jest liczbą kroków która można nie uwzględniać podczas obliczania wspomnianej całki.

#### 4. Wyniki przykładowych obliczeń

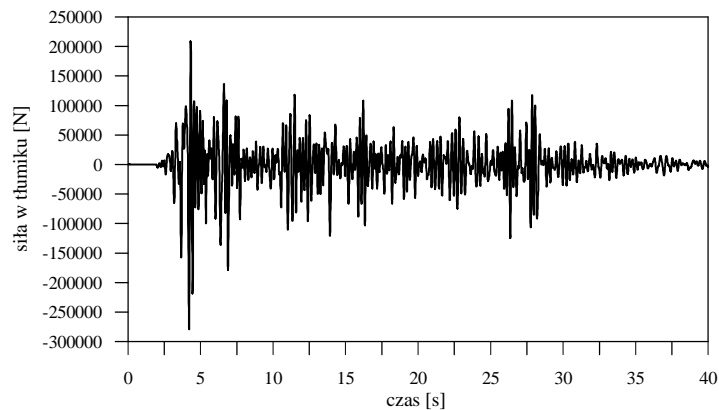
Wykonano przykładowe obliczenia dla układu składającego się z 3 mas i 2 tłumików. Tłumiki są umieszczone między pierwszą masą a podłożem (1 tłumik) oraz między drugą i trzecią masą. Przyjęto następujące dane do obliczeń:  $m_1 = m_2 = m_3 = 30000,0 \text{ kg}$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 90,0 \text{ MN/m}$ . Macierz tłumienia proporcjonalnego wyznaczono zakładając, że bezwymiarowe współczynniki tłumienia pierwszej i drugiej postaci drgań wynoszą 0,01. Przyjęto następujące wartości parametrów tłumików:  $c_d = 0,4 \text{ MNs}^\alpha/\text{m}$ ,  $k_d = 40,0 \text{ MN/m}$ ,  $\alpha = 1,0$ . Układ poddano działaniu sił wywołanych trzęsieniem ziemi zarejestrowanym w El Centro. Krok całkowania równań ruchu  $h = 0,004$ . W historii procesu pamiętano ostatnich 400 kroków.

Na rys. 3 pokazano przemieszczenia trzeciej masy wywołane wspomnianym trzęsieniem ziemi. Z kolei na rys. 4 pokazano w jaki sposób zmienia się w czasie siła w drugim tłumiku. W trakcie obliczeń sprawdzano bilans energii układu. Przeciętny błąd w spełnieniu równania bilansu energii wynosił około 2%. Oznacza to, że opracowana metoda jest wystarczająco dokładna.



Rys. 3. Zmiany przemieszczenia trzeciej masy w zależności od czasu

Fig. 3. Changes of the third mass versus time axis



Rys. 4. Zmiany w czasie siły w drugim tłumiku

Fig. 4. Changes of the force in the second damper versus time

## 5. Uwagi końcowe

W pracy omawia się nową metodę numerycznego całkowania równań ruchu opisywanych za pomocą równania różniczkowo-całkowego. Równanie to opisuje drgania konstrukcji sprężystej z zainstalowanymi tłumikami drgań opisywanymi za pomocą tzw. uławkowego modelu Maxwella. Zaproponowana metoda nie wymaga wprowadzenia tzw. zmiennych wewnętrznych co znacznie zmniejsza wymiar analizowanego problemu. Przykładowe obliczenia dowodzą, że jest to metoda efektywna.



### **Podziękowania**

*Praca została wykonana w ramach projektu Nr DEC/2013/09/B/ST8/01733 wykonywanego w latach 2014-2016 i wspieranego finansowo przez NCN.*

### **Literatura**

- [1] Lewandowski R., Redukcja drgań konstrukcji budowlanych, PWN, Warszawa 2014.
- [2] Soong T.T., Dargush G.F., Passive energy dissipation systems in structural engineering, Chichester, Wiley, Chichester 1999.
- [3] Park S.W., Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control, International Journal of Solids and Structures, vol. 38, pp.8065-8092, 2001.
- [4] Lewandowski, R., Bartkowiak, A., Maciejewski, H.: Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers: a comparison of damper models. Structural Engineering and Mechanics vol. 41, pp.113-137, 2012.
- [5] Adhikari, S., Structural Dynamics with Generalized Damping Models: Analysis, Wiley-ISTE, 2013.
- [6] Mainardi F., Spada G., creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology, The European Physical Journal, Special Topics, vol. 193, 2011, pp. 133-160.
- [7] Cortés, F., Elejabarrieta, M.J., Finite element formulations for transient dynamic analysis in structural systems with viscoelastic treatments containing fractional derivative models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 69, pp.2173-2195, 2007.
- [8] Singh M.P., Chang T.S., Nandan H., Algorithms for seismic analysis of MDOF systems with fractional derivatives, Engineering Structures, vol.33, pp.2371-2381, 2011.
- [9] Galucio A.C., Deu J.F., Ohayon R., Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. Computational Mechanics, vol. 33, pp. 282-291, 2004.
- [10] Schmidt A., Gaul L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. Nonlinear Dynamics; vol. 29 pp. 37-55, 2002.

## **NUMERICAL INTEGRATION OF EQUATION OF MOTION OF STRUCTURES WITH FRACTIONAL MAXWELL DAMPERS**

### **S u m m a r y**

The new numerical method of integration of equation of motion of structural systems with viscoelastic dampers is presented in the paper. Viscoelastic dampers are described with a help of the fractional rheological model of Maxwell type. The fractional derivatives are use in description of dampers. The theoretical basis of the proposed method are presented. Moreover, results of exemplary calculation are described and briefly discussed.

**Keywords:** dynamics, dampers, Boltzman's principle, transient vibration

*Przesłano do redakcji: 10.03.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Barbara MARKIEWICZ<sup>1</sup>  
Leonard ZIEMIAŃSKI<sup>2</sup>

## ANALIZA DYNAMICZNA KOMPOZYTOWYCH KONSTRUKCJI CIENKOŚCIENNYCH

W pracy przedstawiono analizę dynamiczną kompozytowej konstrukcji cienkościennej o przekroju zamkniętym prostokątnym, o różnych schematach statycznych. Do analizy wykorzystano modele powłokowe i odpowiadające im uproszczone modele prętowe. W modelach powłokowych uwzględniona została ortotropia materiału kompozytowego i różne warianty ułożenia włókien nośnych w poszczególnych warstwach. W modelach belkowych dokonano homogenizacji materiału uzyskując materiał izotropowy o średniej sztywności zastępczej. W analizie uwzględniono dodatkowe usztywnienia w postaci przepon wewnętrznych. Analizowano częstotliwości własne i odpowiadające im postacie drgań. Zbadano jaki wpływ na wyniki ma kąt orientacji włókien w warstwach, smukłość belki i schemat statyczny oraz porównano wyniki otrzymane dla modeli powłokowych z wynikami otrzymanymi dla uproszczonych modeli prętowych.

**Słowa kluczowe:** pręt kompozytowy, pręt cienkościenny, model prętowy, modelowanie MES, dynamika, częstotliwości drgań

### 1. Wprowadzenie

Zainteresowanie kompozytami wynika bezpośrednio z ich zalet tj. ich duża wytrzymałość przy niewielkim ciężarze, odporność na korozję i na działanie czynników zewnętrznych, łatwość formowania i uzyskiwania różnorodnych kształtów. To właśnie dzięki doskonałym parametrom kompozyty są od lat wykorzystywane w przemyśle lotniczym, samochodowym i stoczniowym, a od ok. 30 lat także coraz częściej w budownictwie. Najczęstsze przykłady konstrukcji z kompozytów to: maszty, turbiny wiatrowe, obiekty mostowe, kładki dla pieszych, ale istnieją również inne obiekty, których cała konstrukcja nośna wykonana jest z profili kompozytowych, jak budynek Eyecatcher w Szwajcarii [1].

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Barbara Markiewicz, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651618; bmarkiewicz@prz.edu.pl

<sup>2</sup> Leonard Ziemiański, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651353; ziele@prz.edu.pl

Wykorzystanie kompozytów pozwala na budowę konstrukcji smuklejszych i lżejszych niż dotychczas, ale równocześnie bardziej wrażliwych na działanie obciążeń dynamicznych. W skrajnych wypadkach obciążenia te mogą zagrażać bezpieczeństwu i trwałości konstrukcji. Konieczne jest zatem dobre zrozumienie dynamicznego zachowania konstrukcji i jej elementów, co oznacza wzrost udziału analizy dynamicznej w projektowaniu konstrukcji [2].

## 2. Analiza dynamiczna z wykorzystaniem modeli prętowych

Nie wszystkie parametry są niezbędne do modelowania danego zagadnienia, a ich zbyt duża ilość utrudnia ocenę modelu i znalezienie ewentualnych błędów. Ważne jest poznanie i zrozumienie analizowanego zjawiska czy zachowania obiektu na tyle, by móc wybrać tylko istotne do budowy modelu dane.

Pomimo, że każdy element jest trójwymiarowy to w praktyce inżynierskiej przyjęto uproszczenia modelu w zależności od dominujących wymiarów, np. belka, która ma dominujący jeden wymiar, modelowana jest jako element jednowymiarowy. Wielu autorów z powodzeniem do modelowania zagadnień trójwymiarowych, niekiedy nawet o skomplikowanej strukturze wewnętrznej, stosuje model jednowymiarowy w postaci pręta zginanego i skręcanego [3-5]. Podejście to stosuje się zarówno do modelowania konstrukcji cienkościennych [3,4], modelowania regularnych konstrukcji prętowych [5], jak i modelowania konstrukcji kompozytowych [9-14].

Wymieniając najbardziej powszechnie stosowane modele prętowe należy zacząć od klasycznej belki Eulera-Bernoulliego [6]. Stosuje się dla niej założenie płaskich przekrojów tj. przekrój płaski przed odkształceniem pozostaje płaski, tej samej długości i prostopadły do osi pręta po odkształceniu. Założenie to nie uwzględnia jednak wpływu siły poprzecznej i nie sprawdza się w przypadku opisu belek krępych.

Bardziej złożonym elementem jest belka Timoszenki [7], dla której uwzględnia się również wpływ odkształceń postaciowych i bezwładności obrotowej. W elemencie tym przekrój nie pozostaje prostopadły do osi belki. Założenia teorii Timoszenki sprawdzają się w przypadku belek krępych lub złożonych i są skuteczne przy przewidywaniu globalnych zachowań, natomiast nie uwzględniają zjawisk lokalnych tj. deplanacji.

Najbardziej ogólnym elementem belkowym jest belka Własowa [8]. Jej opis uwzględnia kolejny stopień swobody jakim jest deplanacja oraz siłę wewnętrzną w postaci bimomentu. Nie jest więc zachowana zasada płaskich przekrojów, która jest fundamentem opisu zginania pręta o przekroju zwartym. Stosowany jest głównie do przekrojów cienkościennych otwartych, w celu uwzględnienia lokalnych zjawisk, jak zwichrzenie czy utrata stateczności giętno-skrętnej. Charakterystycznym punktem przekroju cienkościennego jest środek ścinania, ponieważ nie musi się on pokrywać się ze środkiem ciężkości, następu-

je sprzężenie postaci drgań własnych. Wraz z uwzględnieniem teorii Timoszenki element Własowa stanowi uogólniony element belkowy (prętowy).

Należy jednak zwrócić uwagę na różnice w modelowaniu belek kompozytowych względem tradycyjnych modeli belkowych. Te wszystkie stosowane od lat zasady w tym przypadku nie są już aktualne, co bezpośrednio związane jest z anizotropią materiału.

Opracowanie modelu 1-D opisującego dynamiczne zachowanie cienkościennych elementów kompozytowych od lat jest tematem poruszonym i rozwijanym m.in. w publikacjach [9-14].

W artykułach [9,10] przedstawione są ogólne równania ruchu opisujące drgania podłużne, skrętne oraz giętne pionowe i poziome.

Następnie w pracach [11-14] budowany jest model analityczny cienkościennej belki kompozytowej o przekroju bisymetrycznym. Wykorzystując zasadę Hamiltona opisane są drgania własne [12]: podłużne, giętne, skrętne oraz uwzględniające wpływ bimomentu (deplanację).

W dalszych rozważaniach autorzy uwzględniają w swoich równaniach wpływ sił tnących [13]. Natomiast w artykule [14] otrzymano najbardziej ogólne równania ruchu dla belki kompozytowej uwzględniające wszystkie sprzężenia wynikające z anizotropii materiału. Równań jest 7, co wynika z liczby stopni swobody uwzględniającej deplanację.

### **3. Obliczenia częstotliwości drgań własnych układów prętowych o przekroju prostokątnym**

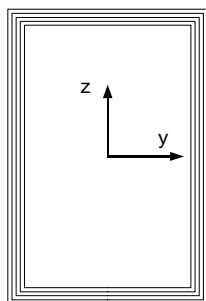
#### **3.1. Opis założeń**

Przeprowadzono obliczenia dla belki o przekroju cienkościennym zamkniętym typu skrzynkowego prostokątnego o wymiarach w przekroju 700mm x 1000mm. Wymiary przekroju przyjęto sugerując się dźwigarami istniejącego mostu kompozytowego w Białowej. Przekrój składa się z 4 warstw laminatu o grubości 4x4mm, o różnej orientacji włókien (Rys. 1). Analizę przeprowadzono dla różnych wariantów schematów statycznych: belka obustronnie utwierdzona, przegubowo podparta i wspornik, dla rozpiętości 12m i 24m. Dane materiałowe przyjęto dla przykładowego laminatu CFRP, na podstawie [14]:  $E_1=141,9$  GPa,  $E_2=9,78$  GPa,  $\nu_{12}=0,42$ ,  $G_{12}=6,13$  GPa i  $\rho=1445$  kg/m<sup>3</sup>.

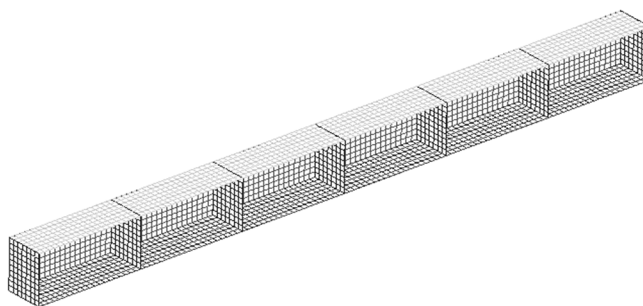
Zbudowano modele powłokowe i odpowiadające im modele prętowe. W modelach powłokowych uwzględniona została ortotropia warstw i ich różne warianty ułożenia:  $[0_4]$ ,  $[45_4]$ ,  $[0_2/45_2]$ ,  $[45_2/0_2]$ ,  $[0/45_2/0]$ ,  $[45/0_2/45]$ ,  $[0/45/0/45]$  i  $[45/0/45/0]$ , które definiowano bezpośrednio przez wprowadzenie kątów orientacji włókien. W modelach belkowych dokonano homogenizacji materiału ustalając materiał izotropowy o średniej sztywności. Dla orientacji włókien  $[0_4]$  był to średni moduł z dwóch kierunków tj.  $E_{12}=75,84$  GPa, dla  $[45_4]$  obliczono sztywność dla obróconych włókien korzystając ze wzorów w [15] i otrzymano

$E_1=E_2=15,02$  GPa, stąd średni moduł jest taki sam. Natomiast wszystkie pozostałe przypadki ułożenia warstw ze względu na to, że udziały powierzchniowe warstw o kącie orientacji włókien  $0^\circ$  i  $45^\circ$  są w przybliżeniu sobie równe, sprowadzono do jednego przypadku o uśrednionym  $E$  z poprzednich przykładów tj.  $E=45,43$  GPa.

Dodatkowo przeanalizowano tę samą belkę z usztywnieniami w postaci przepon wewnętrznych z laminatu o 4 warstwach  $[0_4]$  umieszczonych co 2 m na długości i na skrajach belki (Rys. 2). W przypadku modeli prętowych przepony uwzględniono w postaci miejscowej zmiany definicji przekroju na lity o grubości 16mm, dokładnie w miejscach ich wystąpienia.



Rys. 1. Przekrój belki  
Fig. 1. Beam cross section



Rys. 2. Model powłokowy belki z usztywnieniami (widok bez jednej ścianki)  
Fig. 2. Shell model of the beam with diaphragms (inside view)

Więzy podporowe dla modeli powłokowych zdefiniowane zostały na samej powłoce. Zrealizowano je blokując przesuw w wszystkich kierunkach xyz dla utwierdzeń na wszystkich skrajnych krawędziach, dla belki przegubowej w dolnych krawędziach. Dla modeli prętowych więzy zdefiniowano w osi, dla utwierdzeń zablokowano zarówno możliwości przesuwu, jak i obrotu w każdym kierunku, dla przegubów wszystkie możliwości przesuwu i obrót na kierunku  $x$ . Blokada obrotu  $x$  wynika z liniowego mocowania belki na jej szerokości.

## 3.2. Wyniki

### 3.2.1. Porównanie modeli dla różnych schematów statycznych

Dla tak zdefiniowanych modeli cienkościennych obliczono parametry dynamiczne dla różnych wariantów podparcia i różnych długości - obliczenia przeprowadzono systemem ADINA. Wyniki przedstawiono jako zestawione tabelarycznie częstotliwości drgań własnych i opisy ich dominujących postaci.

Tabela 1. Częstotliwości drgań własnych [Hz] belki o długości 12m i ułożeniu warstw [0<sub>4</sub>]

Table 1. Natural frequencies [Hz] of a 12m long beam with [0<sub>4</sub>] ply orientation

Model powłokowy							
	obustronnie utw.		przegubowo podp.		wspornik		
	bez	uszttyw.	bez	uszttyw.	bez	uszttyw.	
<b>1</b>	24,9	35,7	5,74	29,1	10,2	9,7	
<b>2</b>	25,6	39,3	24,5	38,7	13,5	12,7	
<b>3</b>	26,8	40,2	24,9	39,3	16,6	34,8	
<b>4</b>	28,11	42,2	25,3	40,2	24,7	38	
<b>5</b>	28,82	43,5	26,2	42,2	25,2	39,3	
Model prętowy							
<b>1</b>	52,1	50	23	22	8,2	7,7	
<b>2</b>	68,2	65,6	30,1	29	10,8	10,2	giętne xy
<b>3</b>	142,1	136,6	91,1	87,3	51	48,1	giętne xz
<b>4</b>	150	143	119	114	66,5	62,8	skrętne
<b>5</b>	185	178	150	143	75,1	73,3	drżania ścianek

Tabela 2. Częstotliwości drgań własnych [Hz] belki długości 24m i ułożeniu warstw [0<sub>4</sub>]

Table 2. Natural frequencies [Hz] of a 24m long beam with [0<sub>4</sub>] ply orientation

Model powłokowy							
	obustronnie utw.		przegubowo podp		wspornik		
	bez	uszttyw.	bez	uszttyw.	bez	uszttyw.	
<b>1</b>	14	13,8	4,3	10,4	2,8	2,6	
<b>2</b>	18,6	18	12,9	12,6	3,6	3,5	
<b>3</b>	18,7	30,5	14	27	14,3	14,4	
<b>4</b>	24,8	35	14,3	32,2	14,6	17,5	
<b>5</b>	24,9	39,1	17,7	33,2	18,6	18,8	
Model prętowy							
<b>1</b>	13,1	12,5	5,8	5,5	2,1	2	
<b>2</b>	17,1	16,5	7,6	7,2	2,7	2,6	giętne xy
<b>3</b>	35,9	34,4	23	22	12,8	12,2	giętne xz
<b>4</b>	47	45,1	30,1	28,9	16,8	16	skrętne
<b>5</b>	70,1	67,2	51,5	49,4	35,8	34	drżania ścianek

Analizę przeprowadzono w celu oceny wpływu schematu statycznego na częstotliwości drgań własnych belki (Tab. 1). Dla modeli powłokowych belek obustronnie utwierdzonej i przegubowo podpartej wśród pierwszych pięciu postaci drgań pojawiają się głównie formy drgań samych ścianek. Wprowadzenie

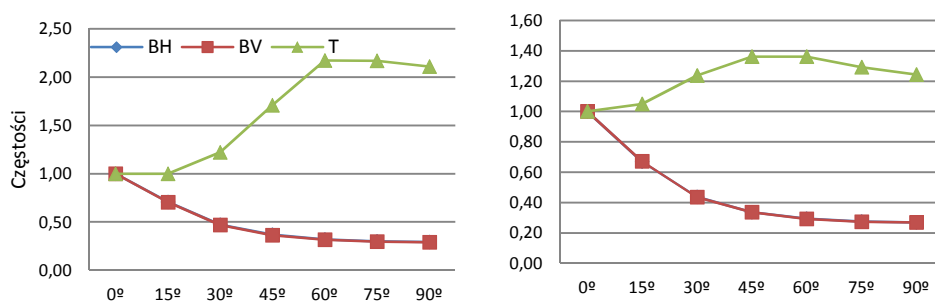
przepon powoduje zwiększenie częstotliwości drgań ścianek i drgań skrętnych, a obniżenie częstotliwości drgań giętnych, co można zaobserwować dla schematu wspornika.

Następnie przeprowadzono tę samą analizę dla belki dwa razy dłuższej o identycznych założeniach dotyczących przekroju, a tym samym smuklejszej (Tab. 2). Wśród pierwszych pięciu postaci rzadziej występowały postaci drgań samych ścianek (chyba, że w sprzężeniu z innymi formami), a wprowadzenie usztywnień miało mniejszy wpływ na zmianę ich częstotliwości niż w przypadku belki krępej.

### 3.2.2. Porównanie dla różnych kątów ułożenia warstw

Kolejnym krokiem była analiza wpływu kąta ułożenia włókien w ściankach przekroju na wartości częstotliwości drgań własnych. Poniżej (Rys. 3 a i b) przedstawiono przykładowe wykresy tych zależności dla dwóch belek o schemacie wspornika, o długości 12m i 24m. Postacie drgań oznaczono następująco: BH – drgania giętne poziome, BV – drgania giętne pionowe, T – drgania skrętne.

W obu przypadkach częstotliwości drgań giętnych pionowych i poziomych maleją w takim samym stosunku dla wartości kąta od 0 do 60 stopni do ok. 0,3 wartości początkowej. W zakresie od 60 do 90 stopni nie widać już istotnych zmian. Częstotliwości drgań skrętnych rosną zaś dla kąta od 0 do ok. 60 stopni. Następnie, w przedziale od 60 do 90 stopni maleją, ale łagodnie. Dla belki o długości 12m częstotliwość drgań skrętnych osiąga ponad dwukrotność swojej początkowej wartości, a w przypadku smuklejszej belki górna wartość nie przekracza 1,4.



Rys. 3. Wykres zależności częstotliwości unormowanych  $\frac{\omega_\alpha}{\omega_0}$  od kąta ułożenia włókien dla wspornika: a) 12m, b) 24m

Fig. 3. Variation of the normalized natural frequencies  $\frac{\omega_\alpha}{\omega_0}$  with respect to fiber angle change of a cantilever beam: a) 12m, b) 24m long

Widać tutaj jak duże znaczenie ma orientacja włókien nośnych w warstwach laminatu. Stąd kolejny etap analizy, którym było uwzględnienie różnych wariantów

tów ułożenia warstw. Jak już wspomniano w podpunkcie 3.1., dla modeli prętowych były jedynie trzy warianty: wszystkie warstwy o kącie orientacji  $0^\circ$  lub  $45^\circ$  oraz mieszane w stosunku 50:50. Dla modeli powłokowych kombinacji ułożenia warstw o przybliżonym stosunku powierzchni przekroju 50:50 było 6.

Tabela 3. Częstotliwości drgań własnych w zależności od orientacji włókien w warstwach [Hz]

Table 3. Natural frequencies for different stacking sequences [Hz]

Rozpiętość 12m										
	[45 <sub>2</sub> /0 <sub>2</sub> ]		[0 <sub>2</sub> /45 <sub>2</sub> ]		[0/45 <sub>2</sub> /0] i [45/0 <sub>2</sub> /45]		[0/45/0/45]		[45/0/45/0]	
	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.
1	8,2	7,8	8,1	7,7	8,3	7,8	8,2	7,8	8,3	7,8
2	10,8	10,2	10,7	10,1	10,9	10,2	10,8	10,2	10,9	10,2
3	20,1	37,8	20,1	37,3	28,6	40,2	23,6	39,2	23,6	39,5
4	32,2	45,5	32,1	45	40	47,8	37	47,9	37,4	47,5
5	32,9	45,7	32,9	45,2	42,3	53,7	38,2	52,9	37,7	53,2
Rozpiętość 24m										
1	2,1	2	2,1	2	2,1	2	2,1	2	2,1	2
2	2,8	2,6	2,8	2,6	2,8	2,6	2,8	2,6	2,8	2,6
3	12,6	12,1	12,4	11,9	12,7	12,1	12,6	12	12,7	12,1
4	16,6	15,8	16,4	15,6	16,6	15,8	16,5	15,7	16,6	15,8
5	18,7	23,7	18,7	24,1	23	24	21,2	24,1	21,2	23,9

Identyczne wyniki otrzymano dla orientacji włókien [0/45<sub>2</sub>/0] i [45/0<sub>2</sub>/45] w całym przekroju (Tab. 3). Drobne różnice (do 0,5 Hz) zanotowano dla przypadków [0/45/0/45] i [45/0/45/0] oraz [0<sub>2</sub>/45<sub>2</sub>] i [45<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>].

Dla belki o rozpiętości 12m dwie pierwsze częstotliwości są porównywalne dla wszystkich przypadków. Symetryczne ułożenie warstw w ściankach (przypadki [0/45<sub>2</sub>/0] i [45/0<sub>2</sub>/45]) zapewnia większą sztywność giętną samych ścianek, im bardziej warstwy są zróżnicowane względem osi ścianek tym ta sztywność jest mniejsza. Dla belki smuklejszej (24m) wszystkie analizowane częstotliwości drgań giętnych są bardzo podobne. Różnice widać w drganiach skrętnych, gdzie dla przekrojów ze ściankami o niesymetrycznym układzie warstw częstotliwości są niższe.

Porównano także częstotliwości drgań dla obu typów modeli w zależności od ułożenia warstw laminatu (Tab. 4), dla belek wspornikowych o długościach 12m i 24m.



Tabela 4. Porównanie częstotliwości drgań własnych [Hz] dla modeli powłokowych i prętowych belki kompozytowej o schemacie wspornika

Table 4. Comparison of natural frequencies [Hz] for shell and beam models of a cantilever composite beam

	Rozpiętość 12m				Rozpiętość 24m			
	model prętowy		model powłokowy		model prętowy		model powłokowy	
<b>wszystkie warstwy 0°</b>								
	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.
<b>1</b>	8,2	7,7	10,2	9,7	2,1	2	2,8	2,6
<b>2</b>	10,8	10,2	13,5	12,7	2,7	2,6	3,6	3,5
<b>3</b>	51	48,1	16,6	34,8	12,8	12,2	14,3	14,4
<b>4</b>	66,5	62,8	24,7	38	16,8	16	14,6	17,5
<b>5</b>	75,1	73,3	25,2	39,3	35,8	34	18,6	18,8
<b>wszystkie warstwy 45°</b>								
	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.
<b>1</b>	3,6	3,4	3,7	3,5	0,9	0,9	0,9	0,9
<b>2</b>	4,8	4,5	4,9	4,6	1,2	1,1	1,2	1,2
<b>3</b>	22,7	21,4	22,1	21,1	5,7	5,4	5,8	5,5
<b>4</b>	29,6	27,9	28,5	27,4	7,5	7,1	7,6	7,2
<b>5</b>	36	35,2	29	38,8	16	15,2	16	15,2
<b>dwie warstwy 0° i dwie warstwy 45°</b>								
	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.	bez	usztw.
<b>1</b>	6,2	5,9	8,3	7,8	1,6	1,5	2,1	2
<b>2</b>	8,2	7,7	10,9	10,2	2,1	2	2,8	2,6
<b>3</b>	38,8	36,6	28,6	40,2	9,8	9,3	12,7	12,1
<b>4</b>	50,7	47,8	40	47,8	12,8	12,2	16,6	15,8
<b>5</b>	59,8	58,4	42,3	53,7	27,3	26	23	24

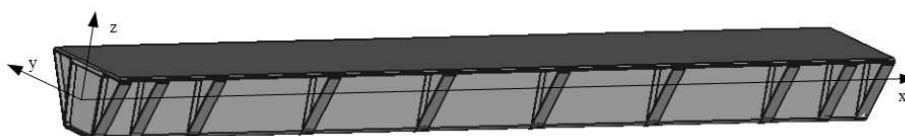
Obrócenie warstw o 45° powoduje obniżenie częstotliwości drgań giętych, a dodatkowo w przypadku modeli powłokowych zwiększenie sztywności na skręcanie. Z kolei w modelach prętowych  $G$  zależy od  $E$  wprost proporcjonalnie, a więc częstotliwości drgań skrętnych maleją. Porównując częstotliwości drgań giętych dla obu modeli można zauważyć największą zgodność. Wynika to z faktu, że przy włóknach obróconych o 45° stosunek  $E_1/E_2$  jest równy 1.

W przypadku mieszanych warstw ich układ dla modelu prętowego nie został wzięty pod uwagę. Do porównania przyjęto model z kodem orientacji  $[0/45_2/0]$  i  $[45/0_2/45]$ . Poziom zgodności jest porównywalny jak dla przypadku ze wszystkimi warstwami 0°.

Dla wszystkich układów warstw wyniki są bardziej zgodne dla belki smuklejszej.

#### 4. Analiza dynamiczna dźwigara kładki kompozytowej

Przedstawiono dodatkowo przykład analizy dynamicznej opisany w [16, 17]. Dotyczy on belki z kompozytu FRP (Rys.5), będącej fragmentem testowym dźwigara kładki dla pieszych. Składa się ona z dźwigara skrzynkowego, pomostu oraz usztywnień w postaci przepon i zewnętrznych żeberek. Belka wykonana jest głównie z naprzemiennie ułożonych laminatów szklanych i węglowych, a ścianki i pomost są częściowo wypełnione pianką. Dokładny opis belki znajduje się w [16].



Rys. 5. Widok belki testowej bez podparcia (wykonane w programie FreeCAD) [16]

Fig. 5. The tested beam without support (FreeCAD) [16]

W celu zbadania dynamicznego zachowania belki zbudowano ciąg modeli prętowych, a wybrany porównano z modelem powłokowym i z wynikami otrzymanymi na drodze badań, podanymi w [17].

W założeniach dotyczących modelu prętowego usztywnienia uwzględniono jako masy skupione i zmianę sztywności na odcinkach ich występowania, natomiast wypełnienie betonem stref nadpodporowych tylko jako masy skupione. Uwzględniono wpływ ścinania, a deplanację przekroju ze względu na zamknięty przekrój belki, duże zagęszczenie usztywnień oraz wypełnienie betonem stref podporowych wykluczono. Przyjęto schemat belki wolnopodpartej.

Tabela 5. Wyniki końcowe dla wszystkich czterech modeli, na podstawie [16]

Table 5. The final results for all four models, based on [16]

Częstotliwości [Hz] i postacie drgań własnych	materiał jednorodny Ex (1)	materiał jednorodny E <sub>xy</sub> (2)	materiał Ex, charakterystyki ważone (3)	materiał E <sub>xy</sub> , charakterystyki ważone (4)
1 giętna xz	20,1	16,5	13,8	13,8
1 giętna xy	22,5	18,4	16,0	15,5
1 skrętna	25,9	21,0	10,7	12,8
2 giętna xz	57,8	47,3	36,8	38,6
podłużna	72,2	59,1	57,4	56,3
2 skrętna	89,1	72,6	33,0	39,6

Dokonano homogenizacji materiału, a obliczenia przeprowadzono dla dwóch jego wariantów: z modułem Younga na podstawie modułów  $E_x$  tkanin i z modułem uśrednionym z  $E_x$  i  $E_y$ . Również charakterystyki przekroju obliczono na dwa sposoby: jak dla przekroju jednolitego i jak dla przekroju z dwóch różnych materiałów, tzw. charakterystyki ważone. Wyniki dla poszczególnych modeli zestawiono w postaci częstotliwości (Tab. 5).

Częstotliwości dla wariantu 2. stanowią ok. 82% wartości wyników dla wariantu 1. Dla modeli z ważonymi charakterystykami przekroju częstotliwości są niższe od tych z przyjętym uśrednionym materiałem jednorodnym. Ponadto zmienia się ich kolejność ze względu na obniżenie się częstotliwości drgań skrętnych względem giętnych. Wariant 4. ma większe wartości częstotliwości drgań skrętnych od wariantu 3., a pozostałe mniejsze.

Tabela 6. Porównanie obliczonych i zmierzonych częstotliwości, na podstawie [17]

Table 6. Comparison of calculated and measured frequencies, based on [17]

	Częst. mierzone [Hz]	Postać drgań	Częst. modelu powłokowego [Hz]	Postać drgań	Częst. modelu prętowego (2) [Hz]	Postać drgań
1	9,7	giętna - xy	16,3	giętna -	16,5	giętna - xz
2	16,1	giętna - xz	17,8	giętna -	18,4	giętna - xy
3	20,8	skrętna	26,8	skrętna	21,0	skrętna
4	26,2		30,2	skrętna	47,3	giętna - xz
5	31,0	skrętna	36,5	giętna -	59,1	podłużna
6	33,9	giętna - ukos	43,5	lokalna	72,6	skrętna

Najbliższe wartościom częstotliwości modelu powłokowego są te otrzymane dla uśrednionego  $E_{xy}$  i charakterystyk geometrycznych jak dla materiału jednorodnego (wariant 2.). Porównanie wyników dla tego modelu z modelem powłokowym i wartościami pomierzonymi przedstawiono w Tab. 6.

Wartości częstotliwości dla pierwszej postaci giętej w płaszczyźnie xz są porównywalne dla wszystkich przypadków. Natomiast dla pierwszej giętej w płaszczyźnie xy wartość pomierzona odbiega od częstotliwości dla obu modeli (możliwa różnica w podparciu). Częstotliwość pierwszej postaci skrętnej dla modelu 1D jest bliższa zmierzonej niż ta dla modelu powłokowego.

Kolejne wartości częstotliwości i postaci drgań znacznie się od siebie różnią.

## 5. Wnioski

Niekwestionowaną zaletą modeli prętowych jest możliwość przeanalizowania wpływu na wyniki poszczególnych parametrów modelu. Jednak dotychczasowo stosowane modele prętowe mają pewne ograniczenia w kontekście opisu

elementów cienkościennych wykonanych z materiału kompozytowego. W przypadku belek kompozytowych, nawet dla tych o zamkniętym przekroju bisymetrycznym występują sprzężenia postaci drgań. Znaczenie bowiem ma ułożenie warstw o danym kącie włókien nośnych, a więc o danych charakterystykach materiałowych, ale też stosunek sztywności na obu kierunkach (im bardziej zbliżony do 1, tym bardziej przypomina zachowanie tradycyjnej belki). Co więcej, właściwy środek ścinania dla takiego przekroju nie jest tożsamy z geometrycznym środkiem ścinania. Pod uwagę trzeba wziąć symetrię ułożenia warstw w ściankach względem osi symetrii przekroju, jak i osi samych ścianek. W artykule [14] przedstawiono sprzężenie sześciu postaci drgań: giętnych na obu kierunkach, skrętnej, wpływy ścinania na obu kierunkach i deplanację, pomimo tego, że przekrój jest zamknięty, a belka utwierdzona na obu końcach. Przykład ten pokazuje, że deplanacja w takim przypadku nie może być pominięta. Podobnie z wpływami ścinania, nawet dla smukłych belek ich uwzględnienie wpływa na zmniejszenie wartości otrzymanych częstości własnych, o czym wspomniano również w [16, 17].

Podsumowując, wystarczającym do opisu belek smukłych o przekroju usztywnionym zdawałaby się belka Eulera-Bernoulliego, dla której wpływy ścinania są pomijalnie małe, a deplanacja nie występuje. Jednak, co widać w powyższych przykładach, w przypadku belek z materiałów kompozytowych dotychczasowo kształtowana intuicja inżynierska zawodzi i koniecznym jest opracowanie nowego modelu 1-D opisującego dynamiczne zachowanie cienkościennych elementów kompozytowych, co od lat jest tematem poruszonym i rozwijanym m.in. w publikacjach [9-14].

## Literatura

- [1] [http://www.nbi.com.pl/assets/NBI-pdf/2015/3\\_60\\_2015/PDF/23\\_Wykorzystanie\\_kompozytow\\_w\\_budownictwie.pdf](http://www.nbi.com.pl/assets/NBI-pdf/2015/3_60_2015/PDF/23_Wykorzystanie_kompozytow_w_budownictwie.pdf), dostęp 27-02-2017.
- [2] Lewandowski R. Dynamika konstrukcji budowlanych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006.
- [3] Gjelsvik A.: The theory of thin walled bars, John Wiley&Sons, New York, 1981.
- [4] Doyle J.F.: Nonlinear analysis of thin-walled structures, Springer, New York, 2001.
- [5] Stojek Z., Sobol K., Ziemiański L.: Makromodele kontynualne w analizie wpływów dynamicznych na poziome drgania wielokondygnacyjnych konstrukcji ramowych, Wpływ wibracji na otoczenie – Wibrotechnika, Kraków-Janowice 1986, 135-145.
- [6] Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. London 1921, Philosophical Magazine Series 6, vol. 41, no. 245, pp. 744-746.
- [7] Timoshenko S. P. History of strength of materials. McGraw-Hill New York, 1953.
- [8] Vlasov, V. Z. Thin-Walled Elastic Beams. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961.

- [9] Armanios EA, Badir AM.: Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams. *AIAA J* 1995, 33(10):1905-10.
- [10] Dancila DS, Armanios EA. The influence of coupling on the free vibration of anisotropic thin-walled closed-section beams. *Int J Solids Struct* 1998, 35(23):3105-19.
- [11] Vo TP, Lee J. Flexural-torsional behavior of thin-walled composite box beams using shear-deformable beam theory. *Engineering Structures* 2008, 30(7):1958-68.
- [12] Vo TP, Lee J. Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams. *Engineering Structures* 2007, 29(8):1774-82.
- [13] Vo TP, Lee J. Free vibration of thin-walled composite box beams. *Composite Structures* 2007, 84(1):11-20.
- [14] Vo TP, Lee J and Ahn N.: On six fold coupled vibrations of thin-walled composite box beams. *Composite Structures* 2009, 89, pp. 524-535.
- [15] German J. *Podstawy Mechaniki Kompozytów Włóknistych*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej. Kraków 1996.
- [16] Markiewicz B., Ziemiański L.: Numerical modal analysis of the FRP composite beam, *Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury – Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture, JCEEA*, tom XXXII 62 (4/2015), pp. 281-292, DOI: 10.7862/rb.2015.195.
- [17] Markiewicz B., Ziemiański L., Kulpa M.: Calculated and measured dynamic properties of the FRP composite beam, *PCM-CMM 2015 Book of Short Papers*, Wyd. PTMTS, Gdańsk 2015, Vol. 1, pp. 401-402.

## DYNAMIC ANALYSIS OF THIN-WALLED COMPOSITE STRUCTURES

### Summary

The paper presents a dynamic analysis of closed thin-walled (CTW) section composite structures with different boundary conditions. Analysis is carried out with a use of shell models and corresponding simplified beam models.

The shell models include orthotropy of the composite material and different fiber orientation angles in laminas. In the beam models the material is homogenized and treated as isotropic with mean material properties. The numerical analysis is also performed for the same beam with added internal diaphragms.

The results are presented in the form of natural frequencies and corresponding mode shapes. The effects of the boundary conditions, fiber angle and slenderness are studied. The results obtained for the shell models are compared with those for the simplified beam models.

**Keywords:** composite beam, thin-walled beam, beam element, FEM modeling, natural frequencies

*Przesłano do redakcji: 20.03.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Grzegorz PIĄTKOWSKI<sup>1</sup>  
Leonard ZIEMIAŃSKI<sup>2</sup>

## EKSPERYMENTALNA ANALIZA MODALNA DŹWIGARA KOMPOZYTOWEGO FRP Z KOMPOZYTOWĄ PŁYTĄ POMOSTOWĄ

Celem przeprowadzonych badań było ustalenie parametrów dynamicznych dźwigara kompozytowego z kompozytową płytą pomostową, tj. ustalenie częstotliwości drgań rezonansowych, postaci drgań i współczynników tłumienia. Zastosowana eksperymentalna analiza modalna polegała na pomiarze siły wymuszającej oraz rejestracji odpowiedzi konstrukcji w postaci sygnałów przyspieszeń w wybranych punktach. Posłużono się metodą SIMO (single input – multiple output), tj. wzbudzenie drgań w jednym punkcie, z jednoczesnym pomiarem przyspieszeń w wielu punktach. W badaniach zastosowano wymuszenie harmoniczne zrealizowane za pomocą wzbudnika modalnego.

**Słowa kluczowe:** eksperymentalna analiza modalna, dźwigar mostowy, dźwigar kompozytowy, pomost kompozytowy, kompozyty FRP

### 1. Wprowadzenie

Badana belka została zaprojektowana jako element nośny do mostu drogowego o rozpiętości teoretycznej w osiach podpór 10,0 m i całkowitej długości 10,7 m. Belka składa się z dwóch zasadniczych elementów: skrzynkowego dźwigara kompozytowego oraz kompozytowego pomostu. Oba elementy zostały zespolone ze sobą warstwą kleju epoksydowego.

Dźwigar kompozytowy FRP jest niejednorodnym elementem o przekroju skrzynkowym. Dźwigar tworzą pasy górne, dwa środniki i pas dolny. Elementy składowe dźwigara zostały wykonane z wielu warstw tkanin szklanych o różnej gramaturze i o różnej orientacji włókien. Panel pomostu został wykonany jako warstwowy typu „sandwich”, na który składają się wielowarstwowe laminaty zewnętrzne oraz wewnętrzna pianka poliuretanowa. Dźwigar został usztywniony

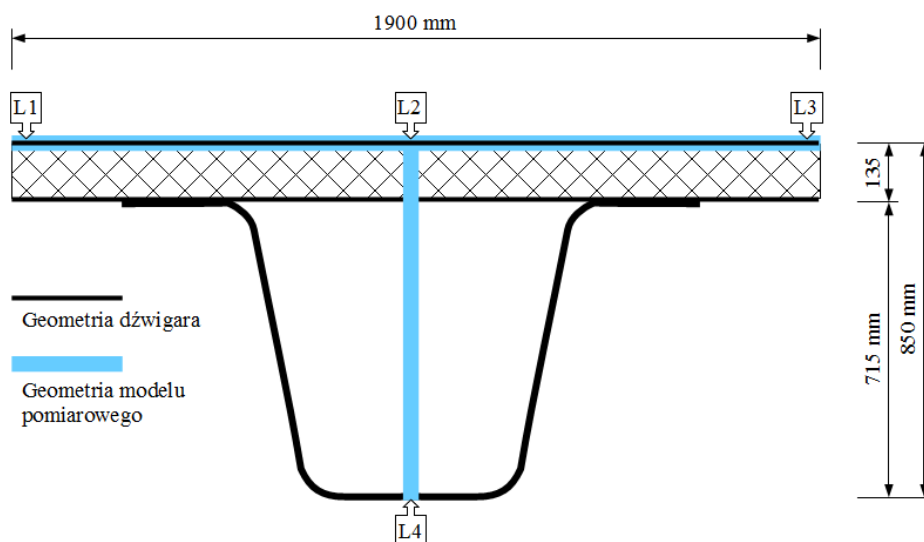
---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Grzegorz Piątkowski, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651323; pgrzes@prz.edu.pl

<sup>2</sup> Leonard Ziemiański, Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów; tel. 178651327; ziele@prz.edu.pl

przeponami wewnętrznymi. Dwie z tych przepon były w miejscach oparcia belki na łożyskach. Dwie kolejne to przepony zamykające przekrój skrzynkowy.

Rys. 1. przedstawia kształt i wymiary przekroju poprzecznego badanego dźwigara FRP zespolonego z pomostem kompozytowym, jak również przekrój uproszczonego modelu geometrycznego użytego do badań modalnych.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny badanego dźwigara

Fig. 1. Cross-section of the test girder

## 2. Opis badań

Podstawowy program badań dynamicznych był realizowany przed realizacją badań statyczno-wytrzymałościowych, gdyż miał na celu ustalenie początkowych charakterystyk dynamicznych testowanej belki.

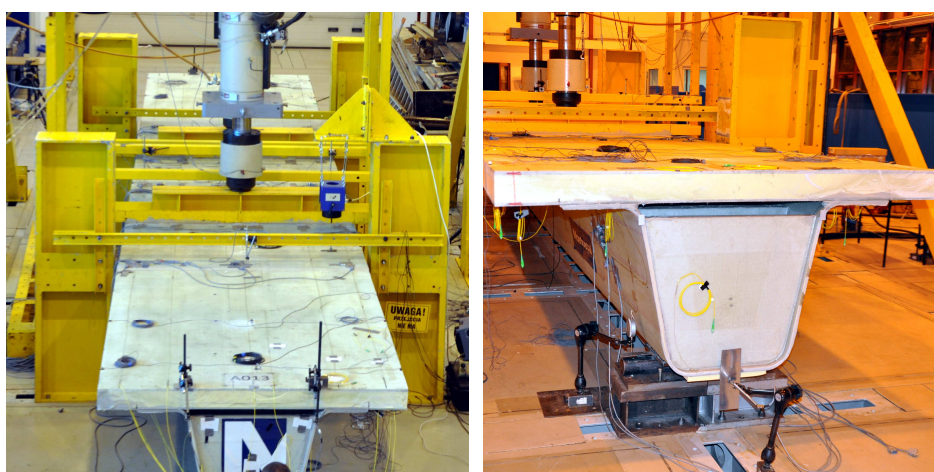
W badaniach posłużono się techniką SIMO (Single Input – Multiple Output) jako jedną z metod realizowania eksperymentalnej analizy modalnej. W metodzie SIMO poprzez zastosowanie wzbudnika elektrodynamicznego jako generatora sygnału wejściowego (Single Input) możliwy jest jednoczesny pomiar przyspieszeń w wielu punktach pomiarowych (Multiple Output) rozmieszczonych na badanej strukturze [1].

### 2.1. Wymuszenie

Wymuszenie siłą zmienną w czasie realizowane było za pomocą elektrodynamicznego wzbudnika modalnego. Posłużono się wzbudnikiem firmy ModalShop, model 2100E11. Wzbudnik został umocowany do stanowiska badawczego poprzez cztery linki stalowe. Wzbudnik był sterowany sygnałem napię-

ciowym bezpośrednio z analizatora pomiarowego. Stosowano wymuszenie białym szumem losowym generowanym w zakresie 0 – 64 Hz lub w zakresie 0 – 128 Hz.

Wymuszenie realizowane było na kierunku pionowym Z poprzez ciągną, które z jednej strony zostało umocowane do czujnika siły przytwierdzonego do górnej powierzchni pomostu badanej belki, a z drugiej strony poprzez zacisk zostało połączone z armaturą wzbudnika. Wzbudnik jest widoczny na rys. 2., natomiast lokalizację punktu wymuszenia pokazano na rys. 3.



Rys. 2. Stanowisko badawcze do testów statycznych. Wzbudnik modalny

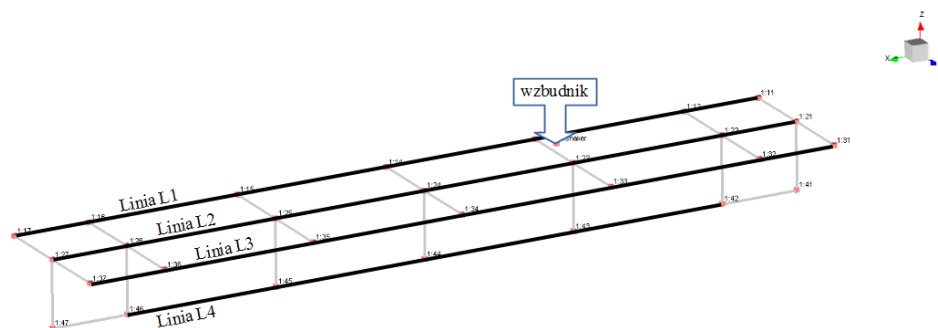
Fig. 2. Research stand for static testing. Modal exciter

## 2.2. Pomiar odpowiedzi

Drgania badanej belki zostały zmierzone poprzez jednoczesną rejestrację przyspieszeń w 28 punktach. Punkty pomiarowe, w których umieszczono akcelerometry piezoelektryczne były rozmieszczone w trzech liniach na górnej powierzchni pomostu (linie L1, L2, L3) oraz wzdłuż jednej linii na dolnej powierzchni pasa dolnego belki (linia L4), co pokazują rys. 1 i rys. 3. Akcelerometry tworzące linie pomiarowe L1 i L3 mierzyły przyspieszenia drgań w kierunku pionowym Z. W punktach leżących wzdłuż linii L2 rejestrowane były sygnały przyspieszeń w dwóch kierunkach, w kierunku poziomym Y i w kierunku Z. Natomiast dla punktów pomiarowych wzdłuż linii L4 rejestrowano drgania w kierunku Y.

W celu dokładnego zobrazowania form drgań stopnie swobody dynamicznej pomiędzy poszczególnymi punktami zostały powiązane ze sobą wzajemnie.





Rys. 3. Rozmieszczenie punktów pomiarowych. Lokalizacja punktu wymuszenia

Fig. 3. Placement of measurement points. Location of excitation point

### 3. Wyniki analizy modalnej

Przeprowadzono eksperymentalną analizę modalną posługując się oprogramowaniem Siemens PLM Software LMS Test.Lab. Zastosowane oprogramowanie rejestrowało sygnały przyspieszeń i jednocześnie obliczało widmowe funkcje przejścia (ang. Frequency Response Function, FRF).

Zastosowano takie nastawy pomiarowe (szerokość pasma wymuszenia, częstotliwość próbkowania), że uzyskano funkcje FRF dla zakresu 0 – 64 Hz i w innym wariancie dla zakresu 0 – 128 Hz, o rozdzielczości częstotliwościowej 0,125 Hz.

Na podstawie funkcji przejścia FRF uzyskano diagramy stabilizacyjne poprzez zastosowanie algorytmu PolyMAX [2]. Z diagramów stabilizacyjnych wybrano do analizy bieguny pokrywające się z charakterystyką widmową na diagramie dla określonych częstotliwości drgań własnych [3].

Nie wszystkie bieguny stabilizacji wskazywane przez algorytm PolyMAX są rzeczywistymi biegunami, część z nich nie występuje w obiekcie rzeczywistym. Dlatego zastosowano również funkcje Mode Indicator Functions (MIFs) jako dodatkowe kryterium. Funkcje MIFs są definiowane w domenie częstotliwościowej i wykazują lokalne minima przy częstotliwościach odpowiadających rzeczywistym postaciom drgań własnych [3].

Doprowadziło to do uzyskania parametrów modelu modalnego w postaci: częstotliwości drgań własnych, współczynników tłumienia i postaci drgań własnych. Otrzymane z analizy pasma 0 – 64 Hz częstotliwości oraz współczynniki tłumienia zawarte są w tab. 1. Wykorzystanie funkcji FRF uzyskanych dla pasma 0 – 128 Hz dało wyniki zawarte w tab. 2. Częstotliwości przedstawione w tab. 1 i w tab. 2, to zaokrąglone do wielokrotności 0,125 Hz wyniki uzyskane z algorytmu PolyMAX. Wyniki przedstawione w tab. 2, otrzymane z analizy funkcji FRF w paśmie 0 – 128 Hz, zostały ograniczone do zakresu 0 – 64 Hz celem porównania z wynikami przedstawionymi w tab. 1. Można zauważyć mi-

nimalne rozbieżności, wynoszące 0,125 Hz, w określeniu szóstej i siódmej zidentyfikowanej częstotliwości. Są to różnice na poziomie przyjętej dokładności funkcji FRF. Większe różnice względne sięgające 12% stwierdzono w otrzymanych współczynnikach tłumienia.

Do walidacji zidentyfikowanych form drgań własnych wykorzystano wskaźnik Auto-MAC (Auto Modal Assurance Criterion) [3]. Oczekiwany wynikiem uzyskanym z analizy współczynnika Auto-MAC są wartości 100% na przekątnej głównej i jednocześnie wartości 0% po przekątnej. Przyjmuje się, że wartości współczynnika poniżej 60% wskazują na to, że poszczególne postacie drgań własnych są od siebie niezależne [4]. Macierz obliczonych wartości wskaźnika Auto-MAC zawarta jest w tab. 3.

Tabela 1. Parametry modelu modalnego, pasmo 0 – 64 Hz

Table 1. Parameters of the modal model, 0 – 64 Hz band

	$f_i$ [Hz]	$\xi$ [%]
1	9,875	0,67
2	10,625	1,05
3	26,500	0,59
4	28,750	0,73
5	39,000	0,87
6	52,375	1,07
7	58,000	1,45

Tabela 2. Parametry modelu modalnego, pasmo 0 – 128 Hz

Table 2. Parameters of the modal model, 0 – 128 Hz band

	$f_i$ [Hz]	$\xi$ [%]
1	9,875	0,59
2	10,625	1,11
3	26,500	0,56
4	28,750	0,69
5	39,000	0,88
6	52,250	1,17
7	57,875	1,51

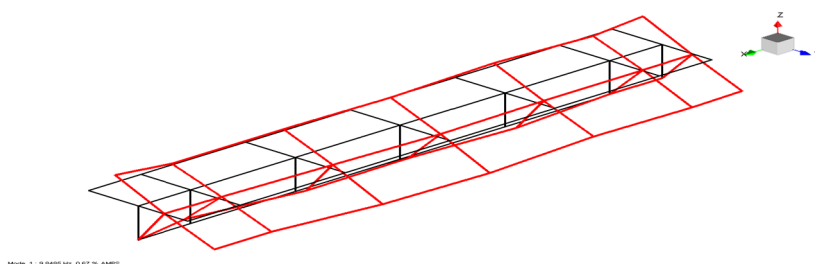
Tabela 3. Kryterium Auto-MAC dla zidentyfikowanych form

Table 3. The Auto-MAC criterion for the identified mode shapes

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$f_1$	100	0	27	0	0	19	0
$f_2$	0	100	0	0	0	1	0
$f_3$	27	0	100	0	0	7	0
$f_4$	0	0	0	100	0	0	1
$f_5$	0	0	0	0	100	1	0
$f_6$	19	1	7	0	1	100	4
$f_7$	0	0	0	1	0	4	100

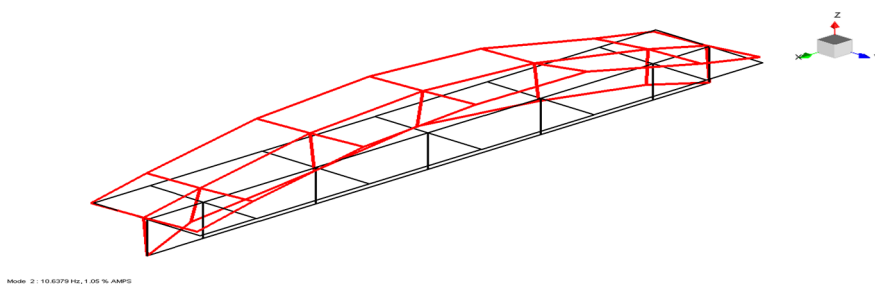
Zauważalne jest niewielkie sprzężenie pomiędzy pierwszą a trzecią formą. Współczynniki dla pozostałych form wynoszą poniżej 20%.

Forma drgań odpowiadająca pierwszej zidentyfikowanej częstotliwości mająca charakter drgań bryły sztywnej przedstawiona została na rys. 4. Można zauważyć, że belka doznaje rotacji względem osi X, a deformacje są bardzo małe. Taka forma drgań była możliwa ze względu na sposób podparcia belki. Oparcie pasa dolnego dźwigara na dwóch łożyskach stalowych, przesuwnych i nieprzesuwnych, zapewniało swobodę obrotu wokół osi Y. Oparcie belki na wałku łożyska zostało zrealizowane pośrednio przez płytę stalową przyklejoną do kompozytu. W efekcie uzyskano podparcie liniowe z więzami jednostronnymi. Przyjęto, że pierwsza forma drgań przedstawiona na rys. 4 jest konsekwencją braku dokładnego przygotowania powierzchni płyty i wałka łożyska. Forma drgań odpowiadająca drugiej zidentyfikowanej częstotliwości ma charakter drgań giętych belki swobodnie podparte. W tej formie dominujące są składowe pionowe, co odpowiada zginaniu w płaszczyźnie XZ. Formę przedstawiono na rys. 5.



Rys. 4. Pierwsza zidentyfikowana forma drgań

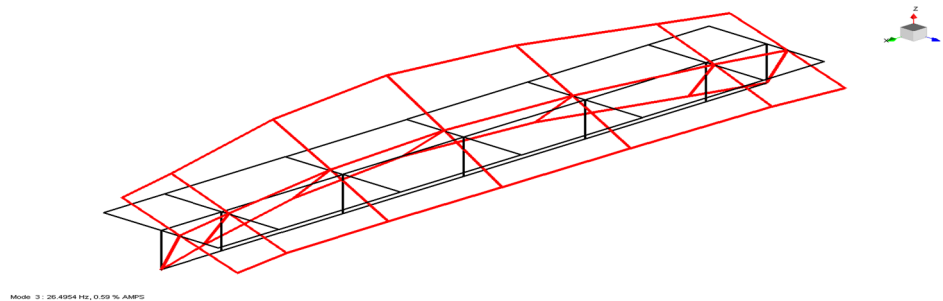
Fig. 4. The first identified mode shape



Rys. 5. Druga zidentyfikowana forma drgań

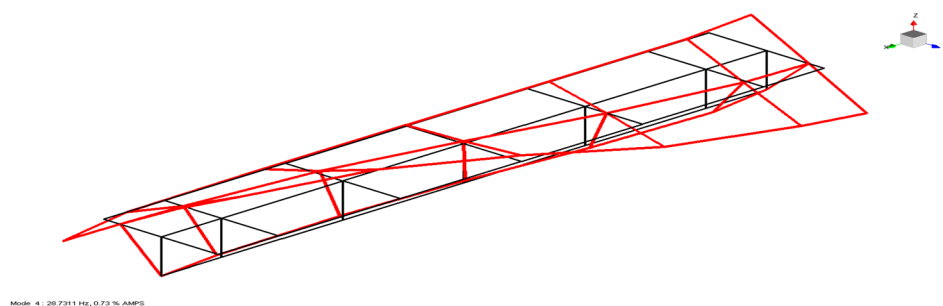
Fig. 5. The second identified mode shape

Kolejna zidentyfikowana forma odpowiadająca  $f_3$  została przedstawiona na rys. 6. Forma ta wydaje się być formą drgań giętych w drugiej płaszczyźnie zginania. Formy pierwsza i trzecia są ze sobą sprzężone w 27% jak wynika to z kryterium Auto-MAC przedstawionego w tab. 3.



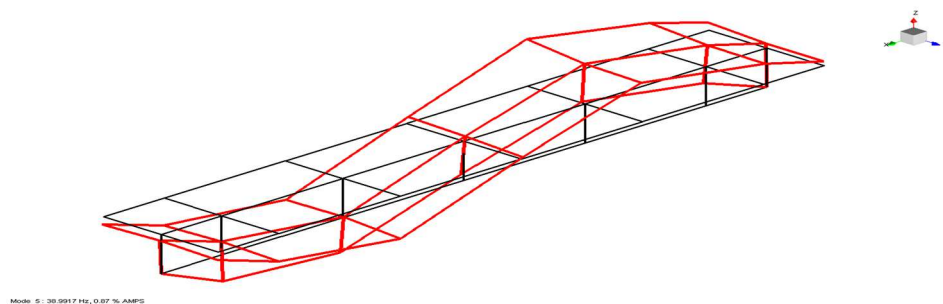
Rys. 6. Trzecia zidentyfikowana forma drgań

Fig. 6. The third identified mode shape



Rys. 7. Czwarta zidentyfikowana forma drgań

Fig. 7. The fourth identified mode shape



Rys. 8. Piąta zidentyfikowana forma drgań

Fig. 8. The fifth identified mode shape

Czwarta forma odpowiada drganiom skrętnym belki. Forma ta przedstawiona jest na rys. 7. Wyraźnie widoczny jest na środku belki węzeł formy.

Druga forma drgań giętych w płaszczyźnie XZ to kolejna, piąta zidentyfikowana forma. Położenia węzła widoczne na rys. 8. odpowiada prawie dokładnie połowie rozpiętości belki.

#### 4. Uwagi końcowe

Zastosowana eksperymentalna analiza modalna pozwoliła na zidentyfikowanie podstawowych częstotliwości i form drgań rezonansowych badanej belki kompozytowej. Otrzymane parametry modalne uzyskano stosując algorytm PolyMAX, który pozwolił także na wyznaczenie współczynników tłumienia krytycznego. Wyniki pomiarów wskazują, że w badanym dźwigarze kompozytowym występują sprzężenia pomiędzy niektórymi postaciami drgań (pierwsza, trzecia i szósta postać), które prawdopodobnie wynika z nieidealnych warunków podparcia dźwigara.

#### Literatura

- [1] Ewins D.J. Modal Testing: Theory, Practice and Application. Research Studies Press Ltd., England, 2000.
- [2] Peeters B, Van der Auweraera H, Guillaume P., Leuridan J, The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?, Shock and Vibration 11 (2004) 395-409.
- [3] LMS Test.Lab Modal Analysis User Manual. Siemens Industry Software NV. 2015.
- [4] Uhl T. Komputerowo wspomaganą identyfikacja modeli konstrukcji mechanicznych. Warszawa: WNT, 1997.

#### EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS OF A FRP COMPOSITE GIRDER WITH A COMPOSITE DECK PANEL

##### Summary

The purpose of the study was to estimate modal parameters of the composite girder with a composite deck panel. Experimental modal analysis with a SIMO test was used. Dynamic response of the beam to harmonic excitation was measured with numerous of piezoelectric acceleration sensors. The basic frequencies, vibration modes and damping coefficients were found.

**Keywords:** experimental modal analysis, bridge girder, composite girder, composite deck panel, FRP composites

*Przesłano do redakcji: 19.04.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

Agnieszka GONTASZEWSKA-PIEKARZ<sup>1</sup>  
Jerzy KŁOSIŃSKI<sup>2</sup>

## GEOLOGICAL AND SEISMIC INVESTIGATION OF FORMER LIGNITE MINING AREA IN ZIELONA GÓRA – TWO CASE STUDIES

The article presents two case studies of investigation carried out on plots of land, intended for multi-family residential development, lying on a former lignite mining area in Zielona Góra. It was underground mining, operating in the years 1840-1948. Lignite deposits were extracted with the room and pillar method, i.e. with an overlayer collapse, causing deformations on the surface of the ground. In the first case study, there was no detailed mining data. In order to identify the geological structure under the planned seven-floor multi-family building, seismic surveys were performed with the technique of multichannel analysis of surface waves (MASW). Three seismic profiles were performed. They revealed the presence of several zones where S-waves had smaller velocity values. In order to verify whether the zones with the smaller values of velocity correspond to e.g. lower soil density resulting from collapsed exploitation room, some drillings were undertaken to the depth indicated in geophysical investigation. Additionally, the CPT and dynamic probing were also performed. The data obtained allowed to determine the soil parameters necessary for the safe design and foundation of the building. In the second case study, a historical mining map with the marked location of the shaft and the main galleries was used. Formerly, geological and engineering documentation for construction works had been prepared, based on 30-meter drillings and soundings with a heavy probe. The mining maps and the contemporary maps were mapped one on another carefully and accurately, calibrated with historic buildings. Thus, the accuracy of 5 m was obtained. Additionally, investigation with the MASW technique was performed. Ten seismic profiles were performed, and then verified by drillings. Also, dynamic probing in the vicinity of the expected location of the shaft was performed. Neither the MASW investigation nor the dynamic probing did not reveal any alterations in the soil condition, which would suggest the presence of the properly liquidated shaft. Thus, based exclusively on the cartographic material, the area comprising the liquidated and backfilled shaft was established. The area was excluded from the plans for the intended building erection.

**Keywords:** lignite mining, Zielona Góra, seismic investigation, multichannel analysis of surface waves MASW, seismic estimation SPT (N30)

---

<sup>1</sup> Corresponding author / autor do korespondencji: Agnieszka Gontaszewska-Piekarz, Instytut Budownictwa, Uniwersytet Zielonogórski, ul. Prof. Szafrana 1, 65-001 Zielona Góra, a.gontaszewska@ib.uz.zgora.pl

<sup>2</sup> Jerzy Kłosiński, Geospectrum S.c. Kraków, klosinski@geospectrum.pl

## 1. Introduction

The underground lignite mining was a rare phenomenon in Poland and was restricted to Western Poland, mainly to Lubusz Land and Lower Silesia, although the bibliography describes mines in Greater Poland [12,15]. There are few works which considered the issues of hazards arising from this exploitation. They focused mainly on the inventory of the existing deformations and the analysis of archival materials [2,13]. It was not until the twenty first century that the areas of the former lignite mining became objects of interest, mainly due to the expansion of residential construction onto the suburbs. Sinkholes, which occur from time to time, forced the owners or the local authority to undertake geological and geophysical investigations. Such a situation occurred in the area of Tuchola [12] and Zielona Góra. In recent years, there have been at least 4 sinkholes there, of which 2 are attributed to the presence of shafts (ventilation shaft and an inconsiderable descending gallery), and the genesis of the other has not been fully explained [7,17].

The first deformations of the ground surface in the region of Zielona Góra are as old as the lignite extraction. However, because it was conducted primarily in the woodlands and on agricultural lands, they did not constitute any threat. In the case of extraction in built-up areas, protective pillars were designed under individual buildings. There is no information about any construction disasters related to mining.

Until the 1990s, the post-mining areas (their range was known) remained undeveloped. Currently, they have been turned into land intended for construction, which particularly refers to the suburban areas. Recently, comprehensive geological and geophysical surveys have been carried by authors in several premises within the town area in relation to the planned erection of buildings.

The investigations aimed at determination whether the subsoil for the planned buildings did not contain voids (old workings), or any layers with smaller density resulting from void-collapses.

## 2. Lignite mining in Zielona Góra

Lignite was discovered in the surroundings of Zielona Góra (south to the city) in 1838. On 24th of November 1840, a lignite mining enterprise was founded. It was named "Friedrich Wilhelm". The enterprise was then transformed into a company "Consolidierte Grünberger Gruben". The extraction, from shaft "Emilie" was commenced in October, 1841 [6,14]. Lignite production amounted to approximately 1 million hectoliters (100 000 tones) per year until World War II. The lignite was primarily used in steam engines in the factories and the spinning mills of Zielona Góra. After the Second World War, the production was resumed, but in 1948 the mine was closed down. Lignite of "Consolidierte Grünberger Gruben" was mined on the area which now lies within the

Zielona Góra borders, and then it was systematically shifted to the west, toward the village of Wilkanowo and Słone. In the 1920th, the extraction was concentrated between the present streets Wojska Polskiego and Łużycka. In the subsequent years, the lignite deposits were exploited mainly to the south of the present Łużycka Street. In the 1930th, lignite was mined beyond the borders of Zielona Góra (Fig. 1). The history of Zielona Góra lignite mining was described in details by the author in, inter alia, [6]. Apart from „Consolidierte Grünberger Gruben” company, there were a dozen smaller mines operating mainly in the 19th century.

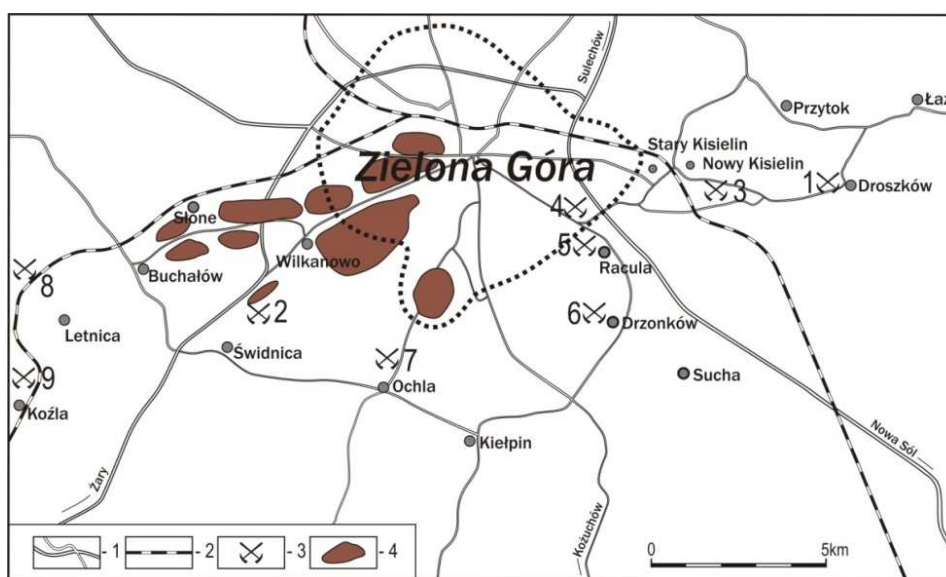


Fig. 1. Lignite mines near Zielona Góra – 1 – roads, 2 – railways, 3 – mine, 4 – exploitation area of “Consolidierte Grünberger Gruben”. Other mines: 1-Ferdinand, 2-Zukunft, 3- Langerschnt-Glück, 4- Mathilde, 5- Förster, 6- Johann Carl, 7- Glückauf, 8-Consolidierte Carl, 9-Cosel [5]

Rys. 1. Kopalnie węgla brunatnego w okolicy Zielonej Góry – 1 – drogi, 2 – kolej, 3 – kopalnie, 4 – tereny eksploatacji „Consolidierte Grünberger Gruben”. Inne kopalnie: 1-Ferdinand, 2-Zukunft, 3- Langerschnt-Glück, 4- Mathilde, 5- Förster, 6- Johann Carl, 7- Glückauf, 8-Cons. Carl, 9-Cosel [5]

The majority of lignite deposits, which were exploited before the war, was found in glaciotectionic disturbed structures. In the case of Zielona Góra, the lignite deposits occur within the moraine formed during the Warta glaciation, called Wał Zielonogórski. Glaciotectionic structure was of a prior importance for the availability of the deposits. Before the war, lignite was mainly extracted from glaciotectionic disturbed structures, where the deposits, originally occurring at considerable depths, were “squeezed” towards the surface in a form of anticlines or saddles. The subject of the mining operation was the layer called “1. śródkowopolski”, also called in Western Poland as “Henryk” layer, and in the



pre-war German literature – “Oberflöz”. The overburden of the layer consists prevail clays of Poznań formation. Their characteristic feature is the discontinuity of their layers, varying volume and declines (up to vertical). The volume of the Zielona Góra deposits amounts not more than 3 – 4 m.

The deposit was accessed through shafts, slopes or horizontal galleries which were later used to transport the excavated material onto the surface. In the Zielona Góra mines, the shafts (vertical) were usually built in the highest points of the saddles and then they were adjusted to the geological structure of the particular deposit. The shafts were of square or rectangular cross-sections, with the area of up to 20 m<sup>2</sup>. The applied casings were made of brick, concrete or wood (where only short, several-year exploitation was envisaged). Next, shaft sump and transportation galleries were performed. The galleries were built in the bed floor every 20-30 m [3]. Due to the frequent occurrence of saturated sands, both in the ceiling and the footwall of the deposit, lignite was avoided to be broken through. The lignite deposit was divided into respective fields. The extraction of the deposit started at the border of the field and then moved backwards to the main gallery.

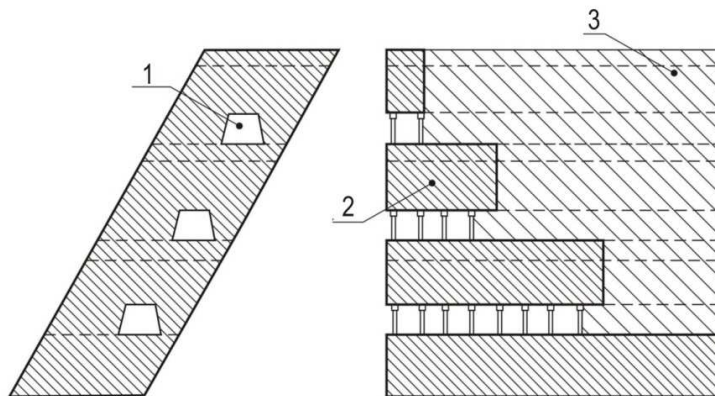


Fig. 2. Exploitation in steep layer with small thickness (based on [8]); 1-exploitation gallery, 2 –lignite, 3-collapsed space

Rys. 2. Eksploatacja w stromym pokładzie o niewielkiej grubości (na podstawie [8])

Lignite was extracted with the room and pillar method [4]. In this method, the lignite is extracted in rooms where protective pillars of unextracted lignite are left behind [8,12]. Where lignite deposits are steeply sloped, the galleries were constructed one over another (Fig. 2), and the extraction was carried downwards. Such galleries were interconnected with shafts in which the extracted lignite was dumped down, and then to the main gallery along which the extracted lignite was transported to the shaft sump. The volume of exploitation in a room did not usually exceed 5 m, and the room itself was as big as 3x4 up to 4x5

m, and it nearly reached the size of 30m<sup>2</sup>. During the extraction process, the roof was protected with a wooden casing (with roof bars, stands and cladding). After the extraction process was terminated, the wood was robbed, which caused the collapse of roof layer. When it was necessary, the room was blocked with flood protection dams, especially in the case of the occurrence of saturated sands at the top of the seam. After the collapse of the roof layer followed by fragmented rock mass collapse, the extraction was continued [8,10]. However, it may be assumed that some remaining of the wooden casing might have been left over in the old rooms, and they might have persisted until today in favorable conditions (under water) [12].

### 3. Methodology

Due to inconsiderable sizes of galleries and exploitation rooms, it was impossible to determine their layout in the subsoil with drillings. It was necessary to use geophysics methods. The authors decided to use the MASW technique.

The multichannel analysis of surface waves (MASW) method is one of the seismic survey methods evaluating the elastic condition (stiffness) of the ground for geotechnical engineering purposes. MASW first measures seismic surface waves generated from various types of seismic sources (such as sledge hammer) analyzes the propagation velocities of those surface waves, and then finally deduces shear-wave velocity ( $V_s$ ) variations below the surveyed area that is most responsible for the analyzed propagation velocity pattern of surface waves. Shear-wave velocity ( $V_s$ ) is one of the elastic constants and closely related to Young's modulus. Under most circumstances,  $V_s$  is a direct indicator of the ground strength (stiffness) and therefore commonly used to derive load-bearing capacity. After a relatively simple procedure, final  $V_s$  information is provided in 1-D or 2-D.

MASW is one of the modern and the easiest near-surface shallow seismic methods that provides highly favorable and competent results. Data acquisition is significantly more tolerant in parameter selection than any other seismic methods because of the highest signal-to-noise ratio (S/N) easily achieved. This most favorable S/N is due to the fact that seismic surface waves are the strongest seismic waves generated that can travel much longer distance than body waves without suffering from noise contamination. Additionally MASW discriminates useful signal from harmful noise, then assures an increased resolution when extracting signal in the midst of noise that can be anything from natural or cultural activities to other types of inherent seismic waves generated simultaneously (higher-mode surface waves, body waves, bounced waves, etc.)

#### 4. Investigation of post-mining areas – case study 1

On a plot in Prosta Street in Zielona Góra (Fig. 3), three multi-family, 4-floor buildings are planned to be erected. The maximum depth of foundation is planned at -5,02 m, and the expected load for soil  $q_{fn} = 210$  kPa.

The southern part of the plot (now forested) was the area of a former underground lignite extraction. The exploitation took place within 1878-1884 with the following shafts: Schacht 23, Förderschacht and Versuchschacht. No data relating the layout of the galleries has remained. However, the area of lignite extraction is known from maps from the 1930s (Fig. 4). The detailed locations of the shafts have not been established, despite the numerous trials to calibrate the maps. The failure to properly calibrate the maps was due to the fact that there were no other buildings in the considered area – the mine was situated outside the former borders of the town. It may be inferred from both the careful analysis of the mining maps and the remained cross-sections (Fig. 5), that lignite deposit was mined from the saddle situated in the (c.a.) east – west direction. The southern wing went downward under a slight angle, whereas the northern wing was almost vertical. The shafts were located to the north from this wing or directly in it. Thus, it may be assumed that the location of the shafts suggests the northern reach of the exploitation. The deepest exploitation gallery was located on the level of 88.33 m a.s.l. (depth of about 50 m).



Fig. 3. Surface topography of Prosta Street from laser scanning (LIDAR). 1 – exploitation area, 2 – investigated area. Seismic profiles are marked. Map source: [geoportal.gov.pl](http://geoportal.gov.pl)

Rys. 3. Powierzchni terenu okolic ul. Prostej w obrazie skaningu laserowego (LIDAR). 1 – zasięg eksploatacji, 2 – badany teren, zaznaczono linie profili sejsmicznych. źródło mapy: [geoportal.gov.pl](http://geoportal.gov.pl)

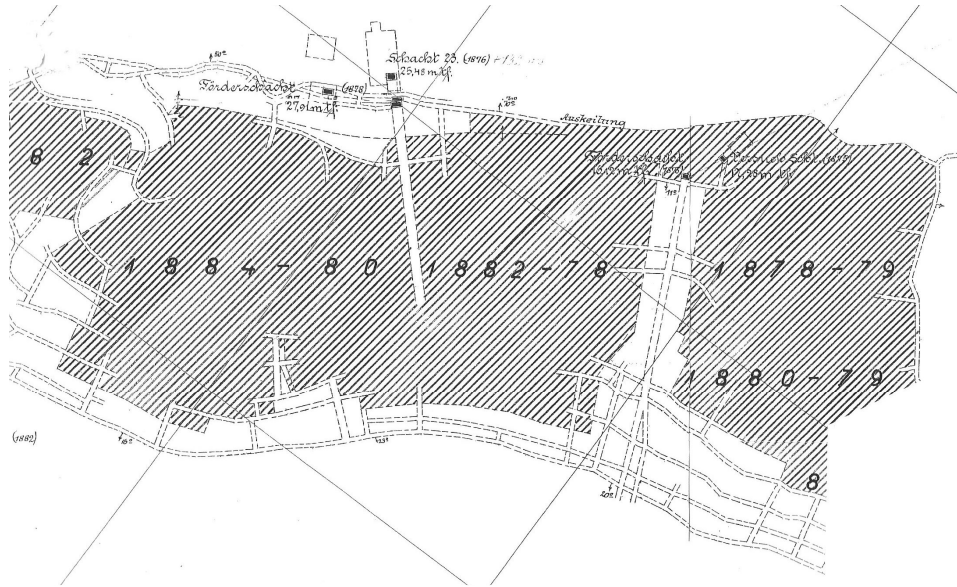


Fig. 4. Mining map, scale 1:1000. Shafts (with its depth), main mine galleries and exploitation dates are marked

Rys. 4. Fragment mapy górniczej w skali 1:1000. Zaznaczono szyby wydobywcze wraz głębokością, główne chodniki oraz lata eksploatacji

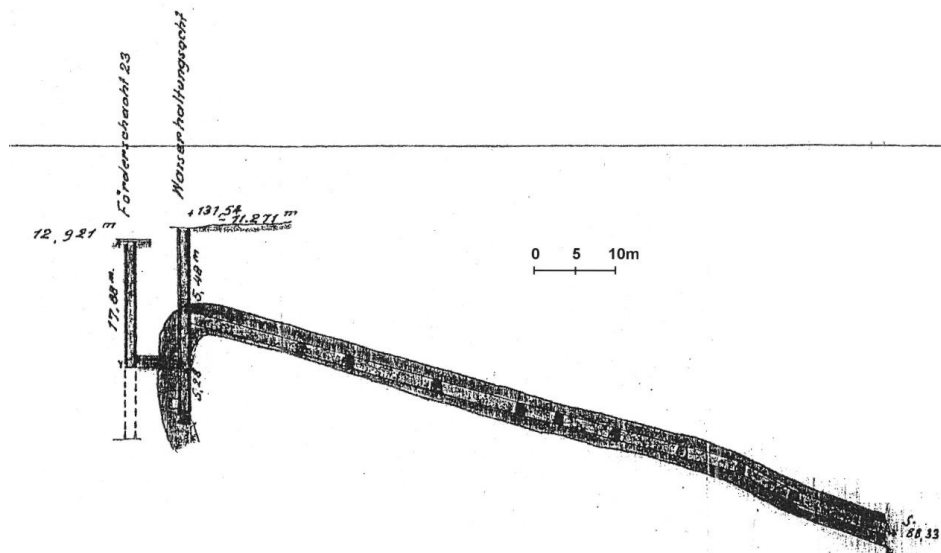


Fig. 5. Schematic cross-section of Shaft 23 and its lignite layer

Rys. 5. Przekrój przez szyb 23 oraz pokład eksploatowany tym szybem

Directly to the south from the area intended for the buildings, a considerable number of deformations are found, mainly of a circular shape, with the diameter of about 2 – 4 m and the approximate depth of 1 m. They can be perfectly seen in the laser scanning image (Fig. 3). The most important objective of the investigation was to establish the northern border of the exploitation area. In order to do so, the following actions were performed: ten drillings to the depth of 10 – 20 m, dynamic probing and static probing down to the depth of 13 – 21 m.

The drillings and the CPT probing allowed a detailed identification of the geological structure of the area. The following was found: the occurrence of fine sands (mainly in the top of the layer) and medium sands (partly mixed with gravel), in a compacted state. The thickness of the sands amounts, at least, 10 – 20 m, their (probable) floor was reached only in one point, at the depth of 17.5 m. In two points, sandy clay or loamy sand interbeddings were found. Beneath the clays, Miocene sediments should be found, lignite including, but the performed drillings did not reach their roof. The CPT probing did not reveal any zones of poorer compaction which could be correlated with the loosened soil over the workings. A free surface of the water table was found at the depth of 12.5 – 17.0 m under the ground, accompanied by the flow of underground water in the southern direction.

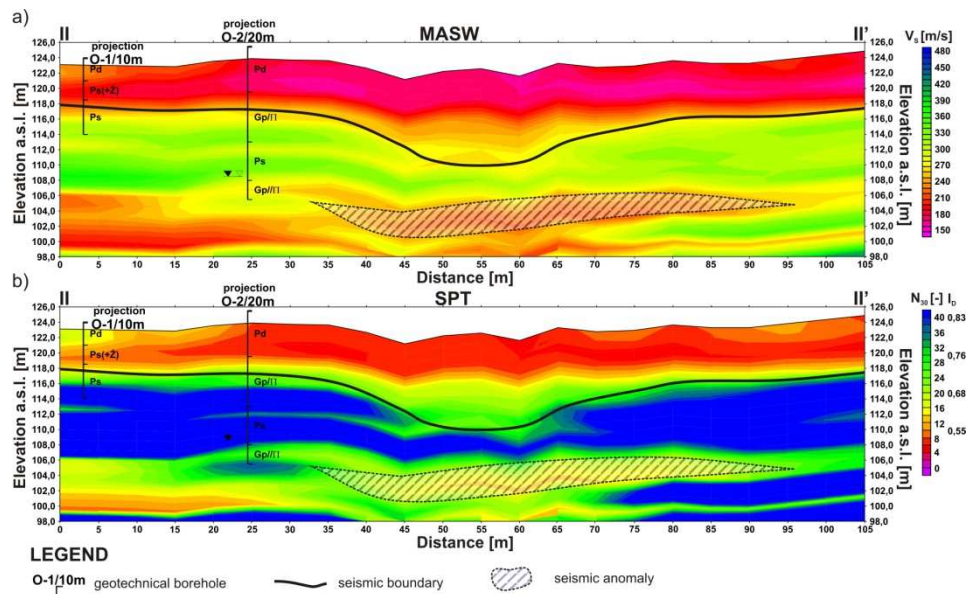


Fig. 6 a) Seismic profile II-II' and b) SPT N30 estimation profile

Rys. 6 a) Profil sejsmiczny II-II' b) estymacja SPT N30

To supply the geological recognition with more details, seismic surveys were performed with the use of the multi-channel surface wave analysis MASW [1, 16]. The scope of the survey included the formation of three seismic profiles of the total length of 345 m. Parameters of acquisition were: source type: seismograph Geode-24CH, 10kg sledge hammer, stacking = 10, line length = 115 m, source interval = 5 m, number of shotpoints = 25; 4,5Hz vertical geophones, geophone interval = 5m, sampling=0,25 ms, record length = 3 sec.

The MASW cross-sections revealed that the wave field was variable. The interpretation allowed establishing the seismic boundary which responds to a footwall of a poorly compacted layer. Seismic cross-section II-II' (Fig. 6.) shows a typical zone revealing the occurrence of unfavorable phenomena. In the central part of the cross-section, the depth of seismic boundary is lowered. In addition, seismic anomaly zone in this area has been marked. This anomaly zone can be related with areas of decreased S-wave velocities. Additionally, in the indicated zone, on the surface of the ground, there are a number of discontinuous deformations in a form of sinkholes.

Moreover, on the basis of the MASW cross-sections, a seismic estimation of the SPT (N30) probing was carried out, which allowed rough evaluation of the alterations in the state of soil compaction [9]. The assessment applies the following relation:

$$V_s = 97 \cdot N_{30}^{0,314} \quad (1)$$

where:  $V_s$  – the S-wave velocity,

$N_{30}$  – the estimated number of hits with the cylindrical probe SPT (to achieve a 30-cm progress).

The performed investigation allowed the determination of the boundary of former exploitation area. Generally, it overlaps the area of deformations visible on the surface of the ground. The investigations (drillings and CPT probing) performed a several meters apart from the edges of the sinkholes did not reveal any decompaction of soil down to 20 m below the surface, which is much deeper than the expected impact range of the planned buildings (ca. 12 m). The seismic anomaly occurring in one of the cross-sections, (Fig. 6), complies with the layout and depth of the exploitation galleries.

## 5. Investigation of the post-mining area – case study 2

Three multi-family, 4-floor, buildings (provided with cellars) are planned to be built in a plot in Godlewskiego Street in Zielona Góra. In 1923 – 1927, lignite deposit was extracted in the south half of the plot, with the use of Friedrich Ost I shaft.

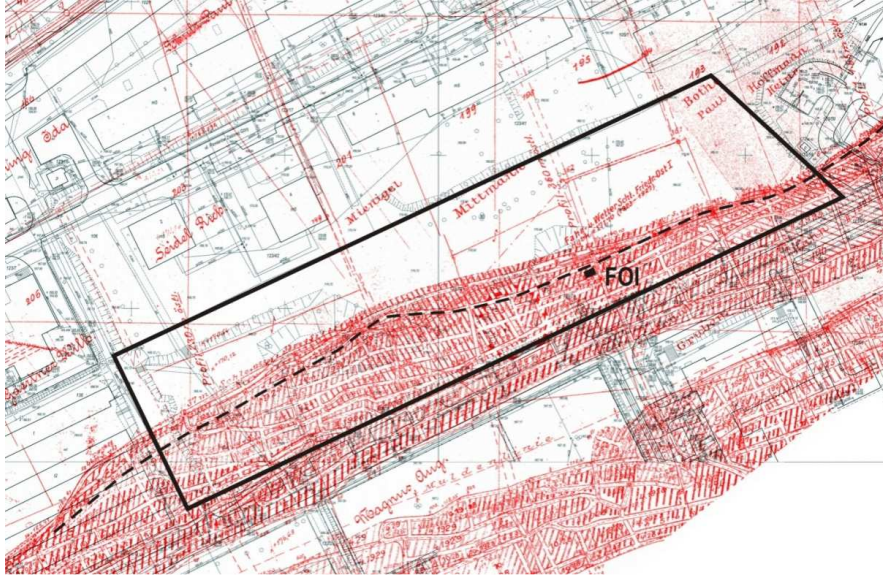


Fig. 7. Overlapped maps: present (black) and old mining (red). Investigated area, hinge line of lignite saddle and Friedrich Ost I shaft (FOI) were marked

Rys. 7. Nałożone mapy: współczesna zasadnicza (czarna) oraz historyczna górnicza (czerwona). Zaznaczono badany teren, przegub siodła oraz szyb Friedrich Ost I (FOI)

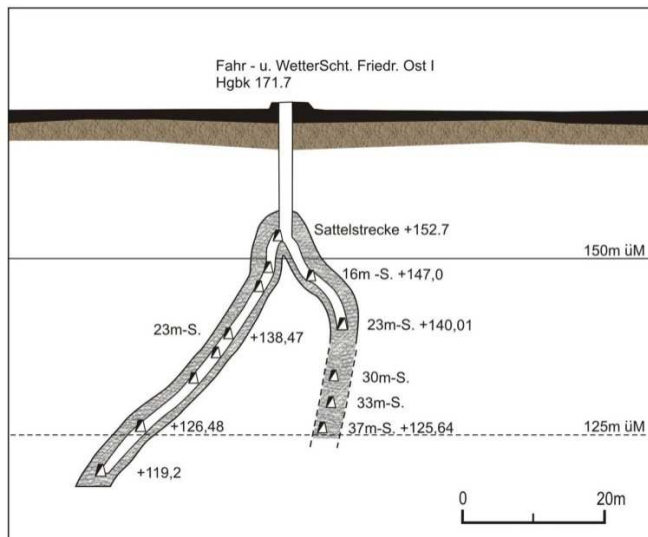


Fig. 8. Cross-section of lignite layer in Friedrich Ost I shaft in Zielona Góra. Explanations: 16 m-S – gallery in the depth of 16 m, üM – asl, Hgbk – set ordinate [5]

Rys. 8. Przekrój przez siodło węgla eksploatowane szybem Friedrich Ost I w Zielonej Górze. Objasnienia: 42 m-S – chodnik na głębokości 42 m, üM – n.p.m. Hgbk – rzędna nadszybia wg [5]

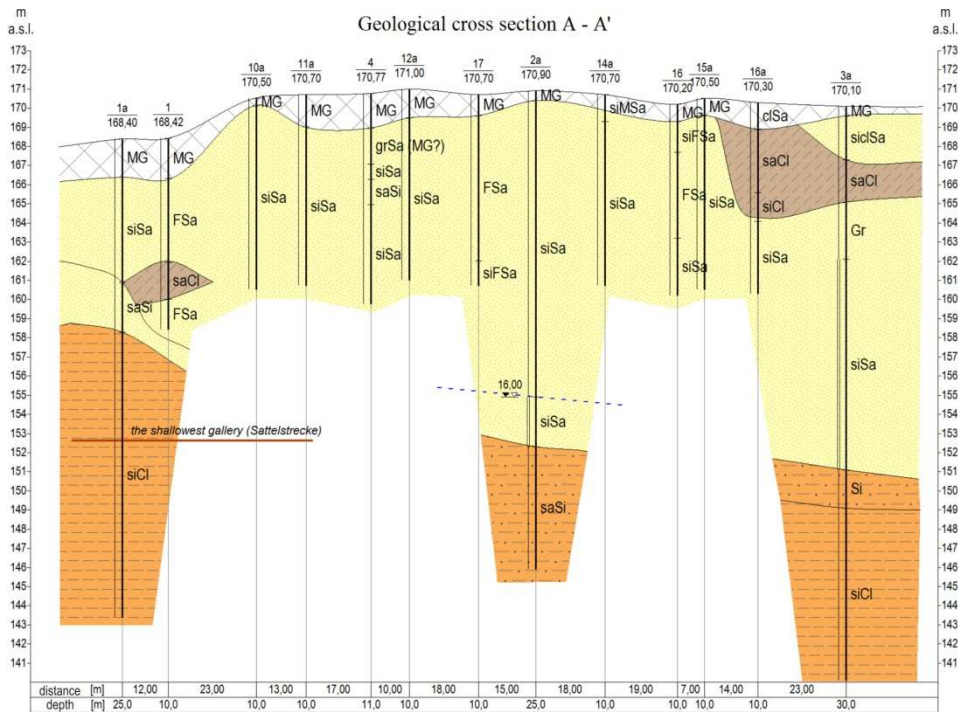


Fig. 9. W-E cross-section of lignite layer in Friedrich Ost I shaft in Zielona Góra

Rys. 9. Przekrój W-E przez siódło węgla eksploatowane szybem Friedrich Ost I w Zielonej Górze

The shallowest gallery (Sattelstrecke), was situated at the depth of ca. 16 m, and the deepest – at 52 m (beyond the boundaries of the investigated plot). An old mining map (in the scale 1:1000) remained to the present times as well as a cross-section running through the shaft (Fig. 8). A lignite saddle was exploited along the direction SW-NE, and the neighbouring saddle was situated directly to the south. The mining map was calibrated with the contemporary map basing on the pre-war buildings. It allowed to locate a exploitation shaft with the accuracy of app. 5 m.

Geological documentation, prepared in 2006 and based on 22 drillings down to the depth of 10-30 m, questioned whether lignite exploitation took place since the investigation did not find any evidence proving it. However, the remained mining maps (of which the author of the documentation had not known) do not allow such statement. The surface of the area has been strongly changed in the post-war years, there are no characteristic deformations. In 2015, in order to clarify the geological and engineering conditions, MASW survey was carried out, followed by additional drillings and dynamic probing. The subsoil includes embankments, mainly sandy, with thickness up to 7.5 m. Beneath, there are mainly silty sands, fine or medium size, medium-compacted, more than 20 m



thick. There are places where boulder clay interbeddings can be found, up to 7 m thick. Under the Pleistocene sediments, there are Miocene sediments – silts and clays. The deposits form the mentioned before saddles in the SW – NE direction, no lignite was found in any of the drillings (Fig. 9). The table of the underground water occurs at the depth of 13-16 m below the ground surface.

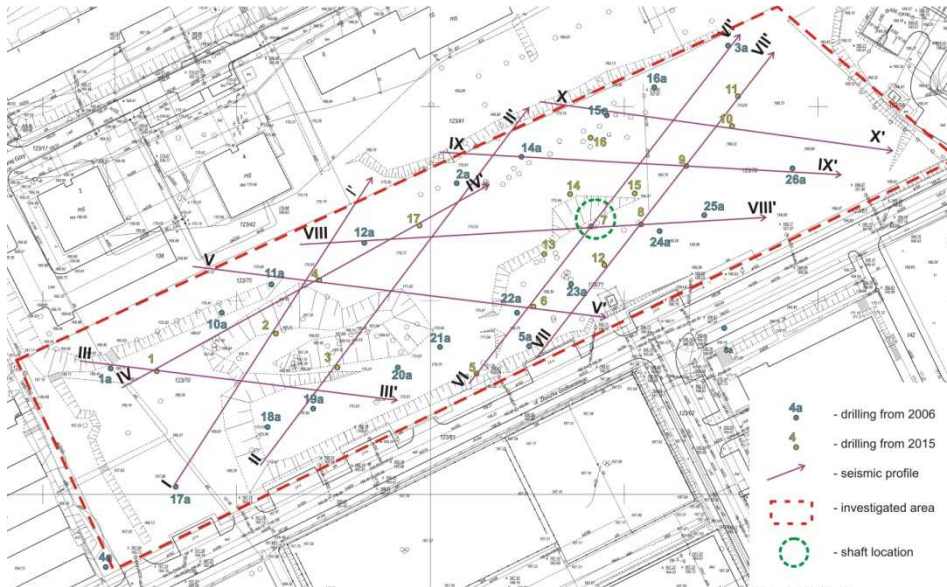


Fig. 10. Location of seismic lines

Rys. 10. Lokalizacja linii profile sejsmicznych

The scope of the seismic surveys (MASW) for the whole investigated area included 10 seismic profiles of the total length of 1150m (Fig. 10). Parameters of acquisition were: source type: seismograph Geode-24CH, 10kg sledge hammer, stacking = 10, line length = 115 m, source interval = 5 m, number of shotpoints = 25; 4,5Hz vertical geophones, geophone interval = 5m, sampling = 0,25 ms, record length = 3 sec.

The scope of the geophysical survey included the recognition of the possible presence of voids (old workings) or zones of smaller soil density in the subsoil of planned buildings. Its objective was also to verify the location of shaft Friedrich Ost I. The location was initially determined on the basis of archive materials (Fig. 7) to avoid constructing the planned multi-family houses in the vicinity of the shaft.

In the neighbourhood of the expected location of shaft Friedrich Ost I, two seismic profiles (crossing each other) were performed. Both for profile VIII-VIII' (Fig. 11) and VII-VII', no disturbances were found in the soil structure. In order to verify the investigation results, a borehole (O-8) was drilled down to the

depth of 14 m at the intersection of the profiles (assumed location of the shaft). The investigation, too, did not confirm the presence of the shaft in this location. However, the boreholes performed closest to the expected location of the shaft revealed artificial sediments up to 7 m thick. Due to the lack of precise information on the location of the shaft, a safety zone was established on the bases of cartographic data. The zone was excluded from development.

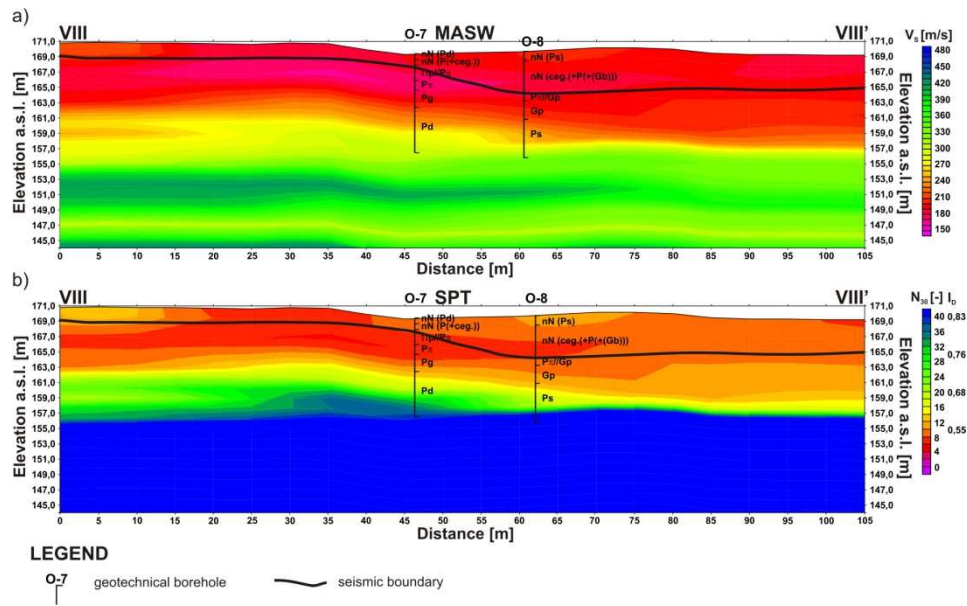


Fig. 11. a) Seismic profile VIII – VIII' and b) SPT N30 estimation profile

Rys. 11. a) Profil sejsmiczny VII-VIII', b) estymacja SPT N30

The excavations for foundations revealed the occurrence of area subsidence to the depth of more than 6 m. They were filled with debris and other waste from previous building sites (from the 1970s). The subsidence may be of a post-mining origin.

### 6. Summary

The post-mining areas in Zielona Góra are located in the centre of the town, and until recently they were mainly wastelands. Currently, they are intended to be turned into housing estate areas, which makes it necessary to determine the geological – engineering conditions, in order to safely plan the erection of the buildings. There are neither elaborated procedures for such investigations nor are any comparisons of the effectiveness of various geophysical methods in such geologic conditions (mining of glaciotectonic disturbed lignite deposits). After

wooden casings had been removed, an immediate collapse of the soil took place, followed by the flooding of the remained void by saturated sands. After almost 100 years since the termination of exploitation, almost all the gobbs have been squeezed, and the deformations of the surface of the area have ceased. However, sinkholes, which have appeared in the last few years, prove explicitly that the process has not ceased everywhere. Most probably, the wooden casing might have not been removed everywhere, which was proved by the results of drillings (wooden remaining were found in some tested wells) [17]. The occurrence of sinkholes after such a long time of the exploitation termination can be explained by considerable compression strength of the casing (the load of the overburden) and the absence of the atmospheric oxygen (causing timber decay) due to the fact that the workings were flooded.

The seismic method (MASW), applied in the described case studies, did not always confirmed the expected results. Its effectiveness is conditioned by e.g. type of soil or by the prior identification of the location of the shaft (since it determines the precise location of the seismic profiles). It should be noted that the assumed location of shaft Friedrich Ost I (discussed in the second case study) was marked on the map in the process of recalculation of the ordinates from the old maps which were in different geodetic coordinates. It could cause some inaccuracies in establishing the real location of the shaft, and thus resulted in its "omission" by seismic profiles. However, the seismic survey aimed at recognition of the subsoil of the whole investigated area, and were not restricted to the shaft searching.

The factor hindering the geological – engineering recognition is also the level (depth) at which the exploitation took place. It sometimes exceeded 50 – 70 m below the ground. There is no sense to proceed drillings at such depths because of width of exploitation gallery (with rooms) – ca. 5 meters.

The described geological – engineering investigations did not answer to all the questions. However, they allowed determination of the soil parameters necessary for designing the planned buildings. Some of the buildings are being erected at the moment.

## Literature

- [1] Billington N. et al.: 2D MASW surveys to evaluate subsurface stiffness. Presentation at 7th Annual Technical Forum. Schnabel Engineering. 2007, presentation, <https://pl.scribd.com/document/303382235/04-Billington-Geohazard-2007-NEW>.
- [2] Chrastek J.: Możliwość oddziaływania starych wyrobisk górniczych Dolnego Śląska na zagospodarowanie powierzchni terenu. Prace Naukowe Ośrodka Badań Progностycznych Politechniki Wrocławskiej Nr 3, Wrocław. 1974.
- [3] Czechowski M.: Gospodarcze i techniczne zagadnienia związane z węglem brunatnym [W:] Węgiel brunatny w Zachodniej Polsce, Katowice. 1949.
- [4] Gontaszewska A. Podziemna eksploatacja węgla brunatnego na Ziemi Lubuskiej - dawne górnictwo, współczesny problem. Przegląd Górniczy 10, 2015, pp. 1-8.

- [5] Gontaszewska A.: Rozpoznanie geologiczno-inżynierskie na terenie dawnej podziemnej eksploatacji węgla brunatnego - przykład Zielonej Góry. *Bezpieczeństwo Pracy i Ochrona Środowiska w Górnictwie* 6, 2016, pp. 7-16.
- [6] Gontaszewska A., Kraiński A.: „Consolidierte Grünberger Gruben” – zarys historii [W:] *Dzieje górnictwa - element europejskiego dziedzictwa kultury*, t.3, Wrocław, 2010, pp. 111-122.
- [7] Gontaszewska A., Kraiński A.: Deformacje powierzchni terenu na obszarze dawnego podziemnego górnictwa węgla brunatnego w okolicy Zielonej Góry [W:] *Wybrane problemy badań geologicznych i hydrogeologicznych dla górnictwa i energetyki*, GIG Katowice. 2012, pp. 108-119.
- [8] Gumprecht A.: *Zasady górnictwa węgla brunatnego*, Państw. Wyd. Tech., Katowice. 1952.
- [9] Imai T., Tonouchi, K.: Correlation of N-value with S-wave velocity and shear modulus, *Proceedings of the Second European Symposium on Penetration Testing Amsterdam*. 1982, pp. 67-72.
- [10] Klein J.: *Handbuch für den deutschen Braunkohlenbergbau*, I Band, 1927, Halle.
- [11] Kohl J.: Die Entwicklung eines neues Verfahrens für den Abbau der Braunkohlenflöze in Felderbereich der Gewerkschaft „Bach“ in Ziebingen, *Braunkohle* 46, 1936, pp. 832-837.
- [12] Kotyrba A., Frolik A., Protas Ł., Siwek S.: Zagrożenia pogórniczne na terenach dawnych podziemnych kopalń węgla brunatnego w rejonie Piły - Młyna (województwo Kujawsko-Pomorskie, *Przegląd Górniczy* 7, 2012, pp. 58-66.
- [13] Kozacki L.: *Przeobrażenia środowiska geograficznego spowodowane wgłębnym górnictwem węgla brunatnego na obszarze Środkowego Pododrza*, Seria Geografia nr 21, UAM, Poznań, 1980.
- [14] Peugler H. (red): *Die alten fünf Bergwünsche. 100 Jahre Grünberger Braunkohlengruben*. Grünberger Verlags-Druckerei Paul Keppler, Grünberg, 1940.
- [15] Skoczylas J.: Z dziejów poszukiwań i prób eksploatacji węgla brunatnego w Jerce (Wielkopolska). *Przegląd Górniczy* 2, 2011, pp. 82-87.
- [16] Stokoe K.H. II Rix G.J., Nazarian S.,: *In Situ Seismic Testing with Surface Waves*, *Proceedings, 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Rio de Janeiro, 1989, pp. 331-334.
- [17] Szajna W., Gontaszewska A.: Shallow site investigation of Quaternary sands in side and in the vicinity of a sinkhole in the former lignite mining area in Zielona Góra (western Poland), *Geological Quarterly* 59 (2), 2015, pp. 347-357.

## **BADANIA GEOLOGICZNO-INŻYNIERSKIE ORAZ SEJSMICZNE NA OBSZARACH DAWNEGO GÓRNICCTWA WĘGLA BRUNATNEGO – DWA PRZYPADKI Z TERENU ZIELONEJ GÓRY**

### **Summary**

Artykuł przedstawia badania, jakie przeprowadzono na dwóch przykładowych działkach przeznaczonych dla zabudowy wielorodzinnej leżących na terenie dawnego górnictwa węgla brunatnego w Zielonej Górze. Było to górnictwo podziemne, działające w latach 1840-1948. Węgiel

brunatny eksploatowany był metodą filarowo – komorową, na zawał, powodując powstawania na powierzchni deformacji terenu. Dla niektórych fragmentów miasta zachowały się mapy górnicze.

W pierwszym przypadku brak było szczegółowych danych górniczych. W celu rozpoznania budowy geologicznej pod projektowany budynek wielorodzinny, 7-kondygnacyjny wykonano geofizyczne badania sejsmiczne techniką wielokanałowej analizy fal powierzchniowych MASW. Wykonano 3 profile sejsmiczne. Wykazały one kilka niewielkich stref cechujących się niższymi wartościami prędkości fal sejsmicznych poprzecznych S. W celu weryfikacji, czy strefy obniżeń prędkości związane są np. z obniżonym zagęszczeniem gruntu wskutek zawału stropu nad komorami eksploatacyjnymi wykonano odwierty do głębokości wskazanej badaniami geofizycznymi. Wykonano także sondowania sondą CPTu oraz sondowania dynamiczne. Uzyskane dane pozwoliły na określenie parametrów podłoża koniecznych do bezpiecznego zaprojektowania posadowienia budynku. W drugim przypadku dostępna była mapa górnicza z lokalizacją szybu oraz głównych chodników.

**Keywords:** górnictwo węgla brunatnego, Zielona Góra, badania sejsmiczne, wielokanałowa analiza fal powierzchniowych, MASW, sejsmiczna estymacja SPT (N30)

*Przesłano do redakcji: 11.04.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*

## Informacje dodatkowe

1. Lista recenzentów współpracujących będzie opublikowana w czwartym numerze *Czasopisma Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury*: 64(4/17) oraz na stronie internetowej:  
[www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/)  
(dotychczasowa nazwa: *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Budownictwo i Inżynieria Środowiska*), strona internetowa:  
[www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/budownictwo-i/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/budownictwo-i/)
2. Zasady recenzowania są udostępnione na stronie internetowej:  
[www.oficyna.prz.edu.pl/zasady-recenzowania/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/zasady-recenzowania/)
3. Informacje dla autorów artykułów są udostępnione na stronie internetowej:  
[oficyna.prz.edu.pl/informacje-dla-autorów/](http://oficyna.prz.edu.pl/informacje-dla-autorow/)
4. Formularz recenzji jest udostępniony na stronie internetowej:  
[www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/)
5. Instrukcja dla autorów omawiająca szczegółowo strukturę artykułu, jego układ, sposób przygotowywania materiału ilustracyjnego i piśmiennictwa jest zamieszczona na stronie internetowej:  
[www.oficyna.prz.edu.pl/pl/instrukcja-dla-autorów/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/instrukcja-dla-autorow/)  
oraz  
[www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/) w zakładce „Instrukcja dla autorów”
6. Dane kontaktowe do redakcji czasopisma, adresy pocztowe i e-mail do przesyłania artykułów oraz dane kontaktowe do wydawcy są podane na stronie internetowej (Komitet Redakcyjny):  
[www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/)

Zasady recenzowania, informacje dla autorów, formularz recenzji, instrukcja dla autorów i dane kontaktowe do redakcji czasopisma i wydawcy będą również opublikowane w czwartym numerze *Czasopisma Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury*, z. 64 (4/2017).