

JCEE

---

Czasopismo  
Inżynierii Lądowej,  
Środowiska  
i Architektury

---

Journal of Civil  
Engineering,  
Environment  
and Architecture

---

Kwartalnik  
tom XXXI  
zeszyt 61 (nr 2/2014)  
kwiecień-czerwiec

(e-ISSN 2300-8903)

Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury jest kontynuacją  
Zeszytów Naukowych Politechniki Rzeszowskiej - Budownictwo i Inżynieria Środowiska.

Wydano za zgodą Rektora

**R e d a k t o r n a c z e l n y**  
Wydawnictw Politechniki Rzeszowskiej  
prof. dr hab. inż. Leonard ZIEMIAŃSKI

**R a d a N a u k o w a**  
prof. Mohamed Eid (Francja), prof. David Valis (Czechy)  
prof. Nadežda Številová (Słowacja)  
prof. Antonio João Carvalho de Albuquerque (Portugalia)  
prof. Volodymyr V. Cherniuk (Ukraina)  
prof. João Antonio Saraiva Pires da Fonseca (Portugalia)  
prof. Dušan Katunsky (Słowacja), prof. Vincent Kvočák (Słowacja)  
prof. Zinoviy Blikharsky (Ukraina), prof. Tomasz Winnicki (Polska)  
prof. Czesława Rosik-Dulewska (Polska), prof. Krzysztof Knapik (Polska)  
prof. Janusz A. Tomaszek (Polska), prof. Jerzy Ziółko (Polska)  
prof. Ryszard L. Kowalczyk (Polska), prof. Stanisław Kuś (Polska)

**K o m i t e t R e d a k c y j n y**  
(afiliacja: Polska)

*redaktor naczelny*

dr hab. inż. Piotr KOSZELNIK, prof. PRz

*redaktorzy tematyczni (naukowi)*

prof. dr hab. inż. Aleksander KOZŁOWSKI, prof. dr hab. inż. Janusz RAK

*redaktor statystyczny*

dr hab. inż. Szczepan WOLIŃSKI, prof. PRz

*sekretarz redakcji*

dr inż. Katarzyna PIETRUCHA-URBANIK

*członkowie*

dr inż. Renata GRUCA-ROKOSZ, dr inż. arch. Anna SIKORA

dr inż. Zdzisław PISAREK, dr inż. Lucjan ŚLĘCZKA

**P r z y g o t o w a n i e m a t r y c**  
Piotr NAZARKO

p-ISSN 2300-5130  
e-ISSN 2300-8903

Wersja drukowana Kwartalnika jest wersją pierwotną.

Redakcja czasopisma: Politechnika Rzeszowska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska,  
al. Powstańców Warszawy 6, 35-959 Rzeszów, [www.oficyna.portal.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.portal.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/) (e-mail: [kpiet@prz.edu.pl](mailto:kpiet@prz.edu.pl))

Wydawca: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 12,  
35-959 Rzeszów, [www.oficyna.portal.prz.edu.pl](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl) (e-mail: [oficyna1@prz.edu.pl](mailto:oficyna1@prz.edu.pl))

Informacje dodatkowe i stopka – str. 221

## SPIS TREŚCI

Bartłomiej BLACHOWSKI, Witold GUTKOWSKI: Minimum weight design of composite floors under human induced vibrations.....	5
Danuta BRYJA, Ryszard HOŁUBOWSKI: Wpływ dużych prędkości w analizie stochastycznych drgań mostu kolejowego z losowo zmienną sztywnością podsypki .....	15
Jacek JAWORSKI, Olga SZLACHETKA: Drgania własne słupów w kształcie ściętego stożka.....	33
Marcin KAMIŃSKI, Jacek SZAFRAN: Stochastyczna analiza drgań wymuszonych stalowych wież telekomunikacyjnych.....	43
Janusz KAWECKI, Krzysztof KOZIOŁ, Krzysztof STYPUŁA: Weryfikacja modeli dynamicznych na podstawie wyników pomiarów „tła dynamicznego” .....	57
Krystyna KUŹNIAR, Edward MACIĄG, Tadeusz TATARA: Unormowane spektra odpowiedzi od drgań powierzchniowych wzbudzanych wstrząsami górnictwymi .....	69
Roman LEWANDOWSKI, Mieczysław SŁOWIK: Modelowanie mechanicznego zachowania cieczy używanej w tłumikach drgań.....	81
Bogusław ŁADECKI, Sławomir BADURA: Analiza dynamiczna mostu przeladunkowego o konstrukcji powłokowej.....	95
Waldemar ŁATAS: Optimal tuning of the tunable translational-rotational dynamic absorbers in global vibration control problems in beams.....	107

Katarzyna MISIUREK, Paweł ŚNIADY: Stochastyczne drgania belki sandwiczowej wywołane obciążeniem ruchomym. Analiza korelacyjna.....	119
Stanisław NOGA: Vibration analysis of a thin ring interacting with the annular plate treated as an elastic foundation .....	131
Karol PERETA: Wpływ bramy wjazdowej na skuteczność ekranu akustycznego .....	139
Dariusz SZYBICKI, Krzysztof KURC, Magdalena MUSZYŃSKA, Mirosław SOBASZEK: Dynamika gąsienicowego robota inspekcyjnego.....	149
Dariusz SZYBICKI, Łukasz RYKAŁA, Magdalena MUSZYŃSKA: Wyrównoważanie mas w ruchu obrotowym .....	161
Józef SZYBIŃSKI, Piotr RUTA: Analiza drgań swobodnych niepryzmatycznego pręta cienkościennego .....	173
Paweł ŚNIADY, Filip ZAKĘŚ: Drgania wieloprzęstowych ciągłych belek przyzmatycznych wywołane siłą ruchomą.....	185
Marcin TEKIELI, Łukasz MICHALSKI: Badania dynamiczne obiektów mostowych niepodlegających obciążeniom próbnym w kontekście monitoringu stanu konstrukcji.....	197
Stanisław WOLNY, Sławomir BADURA: Ocena wpływu obciążeń eksploatacyjnych na stan naprężenia w elementach nośnych konstrukcji basztowej wieży szybowej w świetle przeprowadzonych eksperymentów .....	209

Bartłomiej BLACHOWSKI<sup>1</sup>

Witold GUTKOWSKI<sup>2</sup>

## MINIMUM WEIGHT DESIGN OF COMPOSITE FLOORS UNDER HUMAN INDUCED VIBRATIONS

The paper is concerned with a minimum weight design of composite floors subjected to dynamic loading, deriving from the rhythmic activity of a group of people. The floor structure consists of concrete slab cast, on thick trapezoidal deck, which is supported by a grid of steel beams. The structure is vibration-prone and exhibits a number of natural frequencies, which are within a range of loading function. Mini-mum weight design consists in assigning, from catalogues of prefabricated plates and beams appropriate elements assuring fulfillment of imposed constraints on dis-placements and accelerations. Applied, practical discrete optimization method is based on graph theory and finite element analysis. Efficiency of the proposed de-sign is demonstrated in an example of real-world engineering structure.

**Keywords:** structural optimization, discrete optimization, structural vibrations, composite floor structure

### 1. Introduction

Recent trends in building design exhibit large open spaces, with significant spans between columns, reaching even 9m [6]. On the other hand, there are increasing demands for saving of the structural material and fast erection processes. This is reflected in application of new technologies in construction industry. As a result of this, designers have to minimize the structural weight, verifying not only their static behavior, but also assuring required level of serviceability with respect to vibrations. Such a situation was observed on lightweight, London's Millennium Footbridge.

Another example of vibration-prone structure is a composite floor, which consists of a concrete slab cast on a trapezoidal deck, supported by steel beams.

---

<sup>1</sup> Bartłomiej Blachowski, Institute of Fundamental Technological Research, Pawinskiego 5b, 02-106 Warsaw, Poland, bblach@ippt.gov.pl

<sup>2</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Witold Gutkowski, Institute of Mechanised Construction and Rock Mining, Racjonalizacji 6/8, 02-673 Warsaw, Poland, wgutkow@ippt.gov.pl

Nowadays, the composite floors are more frequently applied in public and office buildings as well as in hospitals and sport facilities. The above issues were the main reason for new updated recommendations and guidelines for engineers [6], dealing with dynamic problems in structures. Additionally, some standards oblige designers to verify not only the value of natural frequency of the considered structure, but indicate vibration levels, which are acceptable for humans [4, 5].

Traditional approach to structural design was an iterative approach, relying mostly on experience of the designer. Currently, design process can be significantly simplified and automated, allowing obtaining a solution by means of optimization procedures. The optimality criteria can be related to the weight of a structure or its cost. Optimization process takes into account several constraints. These constraints are required by structural codes on strength of material, but can be related also to displacement or accelerations.

Among many discrete optimization methods, there are methods, like genetic or evolutionary optimizations. However such methods are time consuming and require a number of parameters, which has to be tuned, in order to obtain an optimal solution. In this paper, an alternative approach has been proposed. It is based on graph representation of the structural optimization problem and is described in detail in previous authors' papers [2, 3].

The proposed solution is verified by an example of discrete optimization of composite floor subjected to rhythmic crowd activity.

## 2. Vibration response of composite floors

Dynamic response of a composite floor (Fig.1) is calculated applying Finite Element Method. The vector equations of motion of  $N$ -degree of freedom system have the following form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (1)$$

where

- $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  are mass, damping and stiffness matrices respectively
- $\ddot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t)$  are accelerations, velocities and displacements vectors respectively
- $\mathbf{p}(t)$  is external force vector

The stiffness matrix contains orthotropic properties of the slab, together with offset between mid-plane of the slab and principal axis of the steel beams.

Applying modal transformation the structural displacement vector  $\mathbf{q}(t)$  can be transformed into

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t) \quad (2)$$

where  $\mathbf{\Phi}$  is matrix whose columns represent mode shapes of the system. First mode shape for typical composite floor is presented on Fig.2.

Substituting (2) in (1) we get

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + 2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{p}(t) \quad (3)$$

where

- $\mathbf{Z}$  is modal damping matrix
- $\boldsymbol{\Omega}^2 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$  is the matrix with squares of natural frequencies on its diagonal.

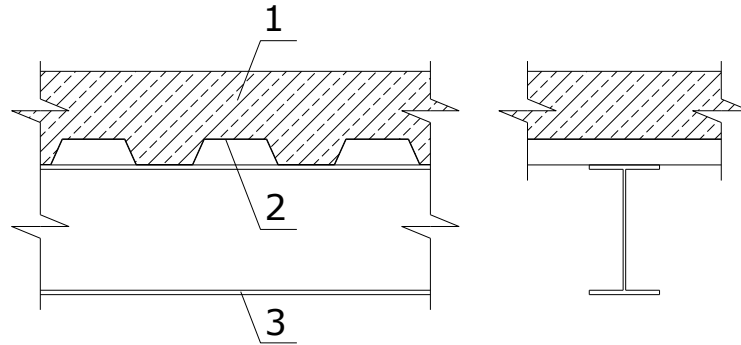


Fig. 1. Steel-concrete composite floor (1-RC slab, 2-trapezoidal steel sheet, 3-steel beam)

Rys. 1. Zespólny strop stalowo-betonowy (1-strop żelbetowy, 2-blacha trapezowa, 3-belka stalowa)

Right hand side of the equation (1) represents time varying load, coming from synchronized human activity. This load can be expanded into Fourier series as follows [6]

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{B} \left\{ 1 + \sum_{h=1}^H \alpha_h \sin(2h\pi f_p t + \theta_h) \right\} \quad (4)$$

where

- $\mathbf{B}$  is load pattern vector with components equal to the human weight.
- $H$  is the number of harmonics considered
- $f_p$  is frequency corresponding to the first harmonic
- $\alpha_h$  is the  $h$ -th Fourier coefficient
- $\theta_h$  is the  $h$ -th phase lag

Fourier coefficient in the above equation are determined experimentally [1].

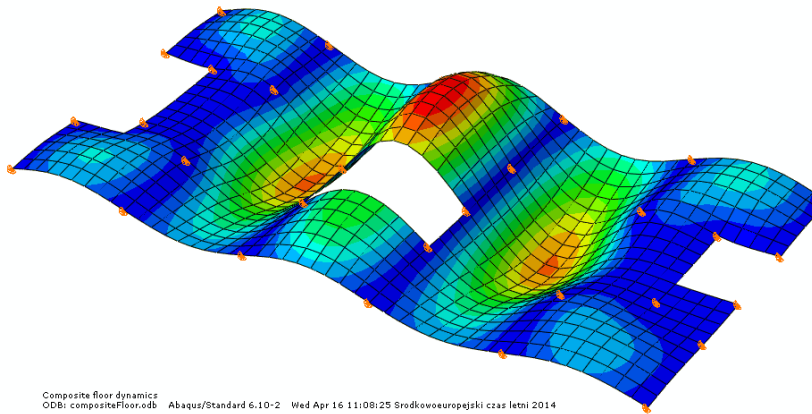


Fig. 2. 1st mode shape of steel-concrete composite floor

Rys. 2. Pierwsza postać drgań stalowo-betonowego stropu zespolonego

Having system matrices and loading vector one can determine vibration response of the composite floor in one of two following ways. In the first approach numerical integration of equation of motion is conducted using one of well-established methods (for example Newmark method). Then, having time history of acceleration one can determine root-mean-square (RMS) of acceleration at a given period of time. Example of loading function time history and corresponding acceleration of selected point of composite floor and presented in Fig.3.

The second approach, which is much more computationally efficient, assumes that RMS value of acceleration can be estimated from summation of indi-



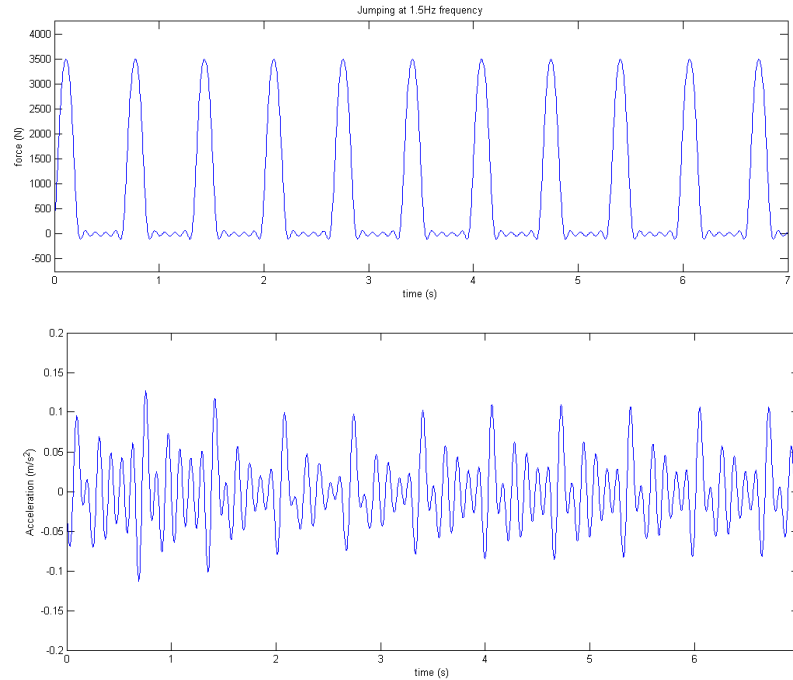


Fig. 3. Time history of loading function (above) and corresponding acceleration of composite floor (below)

Rys. 3. Przebiegi czasowe funkcji wymuszającej (powyżej) oraz odpowiadającej jej wartości przyspieszenia stropu (poniżej)

vidual harmonics for individual mode shapes. This approach can be expressed in the following form

$$\ddot{q}_{j,h}^{RMS} = \phi_r^{(j)} \phi_e^{(j)} \frac{\alpha_h G}{\sqrt{2}} D_h^{(j)} \quad (5)$$

where

- $\phi_r^{(j)}$  is  $r$ -th component of  $j$ -th mode shape component corresponding to the point at which response is evaluated
- $\phi_e^{(j)}$  is  $e$ -th component of  $j$ -th mode shape corresponding to the point at which excitation is applied
- $G$  is weight of the human body (kg)

$$D_h^{(j)} = \frac{(hf_p / f^{(j)})^2}{\sqrt{(1 - (hf_p / f^{(j)})^2)^2 + (2h\zeta_f / f^{(j)})^2}} \quad \text{is dynamic amplification factor}$$

The RMS of acceleration can be found from summation

$$\ddot{q}^{RMS} = \sum_{j=1}^{N_{\text{modes}}} \sum_{h=1}^H \ddot{q}_{j,h}^{RMS} \quad (6)$$

### 3. Graph based discrete structural optimization

The applied here minimizing approach is called discrete optimization method. It consists in searching optimal solution among all combinations arising from number of design variables and number of available prefabricated elements listed in a catalogue. From the mathematical point of view this is a combinatorial problem whose computational complexity can be evaluated with aid of the following formula

$$\prod_{j=1}^n m_j \quad (7)$$

where

- $n$  is a number of design variables
- $m_j$  is a number of catalogue values for  $j$ -th design variable.

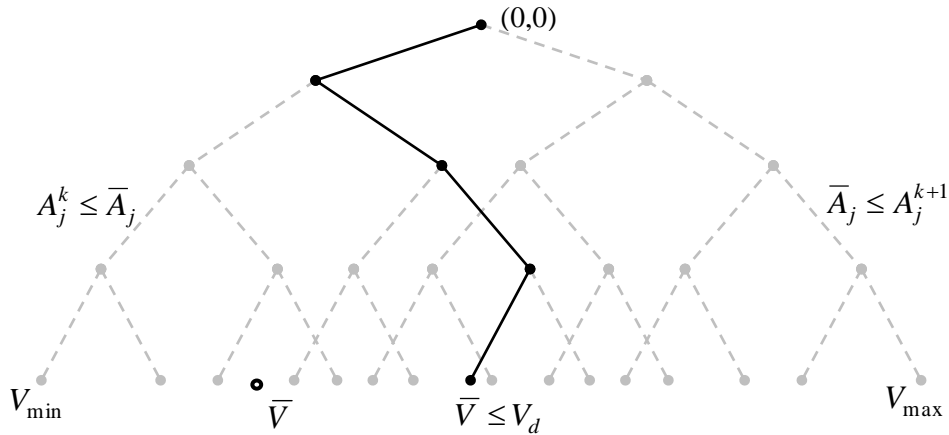


Fig. 4. Graph representation of structural volume

Rys. 4. Objętość konstrukcji reprezentowana przez graf

From the equation (7), one can easily conclude, that even in a relatively simple problem, which 10 design variables with 10 catalogue available values there are  $10^{10}$  combinations. Such a large number of combinations is quite demanding even for modern PC computers. That's why an approximate, heuristic method has to be used. Most common discrete optimization methods are evolutionary algorithms. However, they rely on a numbers of parameters, which have to be found experimentally.

Graph based discrete optimization method is a simpler, alternative for evolutionary algorithms. It relies only on a continuous optimum and graph representation of the cost function. Each of two branches of the tree graph (Fig.4) is created from a set of numbers representing round-down, and round-up values of the continuous solution, as follows:

$$A_j^k \leq \bar{A}_j \leq A_j^{k+1} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

where  $\bar{A}_j$  is  $j$ -th design variable obtained in continuous optimization process.

Assuming that discrete solution cannot be smaller than continuous one, a large number of combination is removed from further consideration.

$$\bar{V} \leq V_d \quad (9)$$

Where  $V_d = \sum_{j=1}^n A_j^{m_j} l_j$  is volume of the structure for discrete values of design variables and  $l_j$  is a length of  $j$ -th design variable.

Details of the graph based discrete optimization are presented in previous authors' papers [2, 3].

#### 4. Numerical example

The presented example deals with the discrete optimization of a composite floor subjected to synchronized crowd activity. The floor under consideration is composed of a concrete slab and a grid of supporting beams (Fig.5). The data for the structure are taken from the paper by Smith et al. [6]. The concrete slab is cast on top of 0.9 mm trapezoidal steel deck. The slab is supported by 9m secondary steel beams, which, in turn, are supported by primary beams. The beams are selected from British Universal Beams Catalogue, containing 55 different sets of I-beams with cross section areas ranging from  $16.5 \text{ cm}^2$  to  $228.1 \text{ cm}^2$ . The thickness of the RC slab can be selected from 5 different values [0.10; 0.12; 0.14; 0.16; 0.18; 0.20] m. Slab thickness together with 5 cross sectional areas of steel beams are taken, as 6 design variables in the problem, which gives 5 times  $55^5$  possible combinations.

All mode shapes below 20 Hz have been found. Modal damping for all modes is 1% of critical damping. Constraints were imposed on stresses, displacement and accelerations.

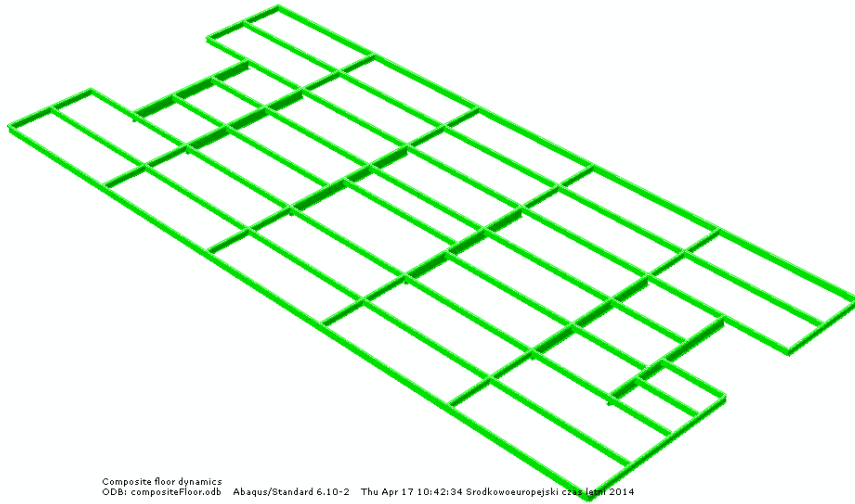


Fig. 5. Grid of steel beams supporting concrete slab

Rys. 5. Ruszt belek stalowych stanowiących podporę dla płyty żelbetowej

According to the algorithm presented in paper [3], in order to find minimum weight of the composite floor the following steps have been proceeded:

Step 1. The weight of all 6 structural components (design variables) are obtained from continuous optimization. They are presented in Table 1.

Step 2. The list of two closest catalogue values to continuous ones are also listed in Table 1.

Step 3. Three graphs are created for different order of design variables.

Step 4. Based on the 3 graphs from previous step, 3 different weights of the total structure are found [252178; 252282; 291980] kg.

Verifying static and dynamic constraints for all three cases, we found that the lowest weight solution doesn't fulfill imposed constraints. Then, the solution with weight equal to 252282 kg has been selected as the discrete optimal solution. The corresponding cross section areas and slab thickness are presented in Table 1.

Table 1. Optimal cross section areas of the beams and RC slab thickness

Tabela 1. Optymalne przekroje i grubość płyty żelbetowej

Linking group	Continuous solution	Two-branch graph for beams and plate	Discrete solution
1 (concrete plate)	250.00	{ 250.00, 300.00 }	250.00 (Slab thickness = <b>10 cm</b> )
2 (9m secondary beams)	58.88	{ 56.99, 59.82 }	59.82 ( <b>UB 457x152x60</b> )
3 (9m primary beams)	164.07	{ 149.15, 179.06 }	179.06 ( <b>UB 610x305x179</b> )
4 (6m primary beams)	108.33	{ 101.19, 109.04 }	109.04 ( <b>UB 533x210x109</b> )
5 (9m perimeter beams)	65.94	{ 60.05, 67.12 }	60.05 ( <b>UB 533x210x60</b> )
Structural weight (kg)	251780	{ 249330, 295570 }	252282

## 5. Conclusions

Minimum discrete weight of the composite floor, under constraints imposed on displacement and accelerations is found. The considered structure was subjected to dynamic loading induced by rhythmic crowd activity. Discrete optimum is calculated for a set of three different graphs. Solution procedure is relatively simple, comparing with other discrete optimization methods.

## References

- [1] Bachmann H. and Amman W.: Vibrations In Structures: Induced by Man and Machines, IABSE, 1987.
- [2] Blachowski B., Gutkowski W.: A hybrid continuous-discrete approach to large discrete structural optimization problems, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 41, Issue 6, 2010, pp.965-977.
- [3] Blachowski B., Gutkowski W.: Graph based discrete optimization in structural dynamics, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, Vol. 62, No. 1, 2014, pp.91-102.
- [4] BS 6472:1992 Guide to evaluation of human exposure to vibration In building (1 Hz to 80 Hz), British Standards Institution, 1992.
- [5] ISO 10137 Bases for design of structures – Serviceability of buildings against vibration, International Organisation for Standardization, 2007.

- [6] Smith A.L., Hicks S.J., Devine P.J., Design of floors for vibration: A new approach, Revised Edition, SCI Publication P354, 2009.

## **DYSKRETNA OPTYMALIZACJA STROPÓW ZESPOLONYCH PODDANYCH DRGANIOM WYWOŁANYCH PRZEZ LUDZI**

### **Streszczenie**

W pracy przedstawiono optymalizację ze względu na minimum ciężaru stropów zespolonych poddanych dynamicznym obciążeniom wywołanym przez rytmicznie poruszającą się grupę ludzi (np. podczas ćwiczeń). Rozpatrywana konstrukcja stropu składa się z płyty żelbetowej wylewanej na szalunku traconym w postaci blachy trapezowej, która z kolei oparta jest na kształtownikach stalowych. Taka konstrukcja stropu jest podatna na drgania i posiada wiele częstotliwości własnych znajdujących się w zakresie wymuszeń dynamicznych. Proponowana w pracy minimalizacja ciężaru polega na doborze grubości płyty żelbetowej z określonego zestawu grubości oraz doborze belek stalowych z katalogu profili walcowanych, całość przy spełnieniu nałożonych ograniczeń na naprężenia, przemieszczenia i przyspieszenia. Efektywność metody została zaprezentowana na przykładzie rzeczywistej konstrukcji inżynierskiej tego typu.

**Słowa kluczowe:** optymalizacja konstrukcji, dyskretna optymalizacja, drgania, stalowo-betonowe stropy zespolone

DOI:10.7862/rb.2014.25

*Przesłano do redakcji: 24.04.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Danuta BRYJA<sup>1</sup>  
Ryszard HOŁUBOWSKI<sup>2</sup>

## WPŁYW DUŻYCH PRĘDKOŚCI W ANALIZIE STOCHASTYCZNYCH DRGAŃ MOSTU KOLEJOWEGO Z LOSOWO ZMIENNĄ SZTYWNOŚCIĄ PODSYPKI

Przedmiotem pracy jest analiza drgań belkowego mostu kolejowego z nawierzchnią podsypkową, obciążonego przejazdami pociągu z dużymi prędkościami. W analizie uwzględniono losowe zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru kolejowego. Przedstawiono dynamiczny model pociągu, składający się z pojazdów szynowych o 6 stopniach swobody i wyprowadzono równania drgań układu: dźwigar mostowy – nawierzchnia podsypkowa – pociąg. Stosując metodę Monte Carlo wyznaczono przebiegi czasowe wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych, do-tyczących przemieszczeń i przyspieszeń drgań. Przedstawiono wykresy ilustrujące zależność maksymalnych wartości badanych charakterystyk probabilistycznych od prędkości pociągów. Na podstawie analizy wyników obliczeń sformułowano wnioski dotyczące oceny wpływu dużych prędkości na: a) wartości oczekiwane ugięć i przyspieszeń toru i dźwigara, b) odchylenia standardowe jako miary rozrzutu drgań, spowodowanego losowymi zmianami sztywności podsypki.

**Słowa kluczowe:** mosty kolejowe, drgania losowe, symulacje Monte Carlo, charakterystyki probabilistyczne, analiza przemieszczeń, analiza przyspieszeń

### 1. Wprowadzenie

Obecnie obserwuje się na świecie intensywny rozwój sieci szybkich połączeń kolejowych. W wielu krajach są rozbudowywane trasy kolejowe przystosowane do dużych prędkości, budowane są linie nowe i modernizowane są linie istniejące. Także w Polsce są opracowywane plany budowy Kolei Dużych Prędkości. Najnowsza koncepcja KDP w Polsce przewiduje budowę tzw. linii Y,

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Danuta Bryja, Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Wroclawska, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. (71) 320 2332, e-mail: danuta.bryja@pwr.edu.pl

<sup>2</sup> Ryszard Hołubowski, Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Wroclawska, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. (71) 320 4899, e-mail: ryszard.holubowski@pwr.edu.pl

czyli trasy kolejowej, która połączy Warszawę, Łódź, Poznań i Wrocław, zapewniając rozwinięcie prędkości ok. 300 km/h.

Zwiększenie prędkości taboru szynowego powoduje wzrost dynamicznych oddziaływań pojazdów na nawierzchnie kolejowe oraz obiekty inżynierskie, w tym mosty kolejowe [11], co jest niekorzystne z punktu widzenia trwałości konstrukcji, komfortu jazdy a nawet bezpieczeństwa użytkownika. Stąd, duże znaczenie mają badania umożliwiające prognozę i ocenę drgań w kontekście dużych prędkości i wpływu różnych warunków eksploatacyjnych.

Efekty dynamiczne obciążenia ruchem kolejowym w dużym stopniu zależą od nieregularności nawierzchni kolejowej, geometrycznych i materiałowych, które pojawiają się w trakcie eksploatacji – nawet na liniach dużych prędkości o wysokim standardzie technicznym [8]. W literaturze można znaleźć wiele publikacji, w których autorzy uwzględniają nierówności geometryczne szyn w analizie drgań mostów kolejowych (np. [2], [12]), natomiast efekty spowodowane zmiennością cech podsypki tłuczniowej są zazwyczaj pomijane. To podejście nie wydaje się właściwe, jeśli weźmiemy pod uwagę wyniki analiz drgań toru podsypkowego położonego na podtorzu gruntowym [1]. Według Dahlberga [8], zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru kolejowego mogą znacząco wpływać na oddziaływania dynamiczne między pojazdem i torem, a ich wpływ jest podobny do wpływu nierówności szyn.

Wobec powyższego, efekty zmian sztywności podsypki nie powinny być pomijane a priori w analizie drgań mostów kolejowych, szczególnie w przypadku ruchu pociągów z dużymi prędkościami. Stąd, jako cel niniejszej pracy przyjęto ocenę tych efektów w zależności od prędkości ruchu pociągów. Zagadnienie będzie rozważane w ujęciu losowym, przy założeniu, że zmiany sztywności podsypki występujące na liniach dużych prędkości są niewielkie, przypadkowe, spowodowane działaniem wielu różnych niezależnych czynników, takich jak np. wpływy eksploatacyjne, środowiskowe, zabiegi utrzymaniowe, nierównomierne zagęszczenie. Badane będą przemieszczenia dynamiczne i przyspieszenia drgań mostu z nawierzchnią podsypkową, w której sztywność podsypki oscyluje losowo na długości toru, wokół stałej wartości średniej. Zmiany sztywności podsypki będą opisane funkcją losową o zadanej autokorelacji, zależną od zmiennej przestrzennej mierzonej wzdłuż osi toru [5]. Wpływ zmian sztywności będzie oszacowany na podstawie analizy charakterystyk probabilistycznych drgań spowodowanych przejazdem pociągu z dużymi prędkościami.

Wzięto pod uwagę fakt, że drgania mostu są niestacjonarnymi procesami stochastycznymi, które wyznacza się na podstawie rozwiązania równań ruchu o zmiennych współczynnikach. Stąd, do wyznaczenia badanych charakterystyk, czyli wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych, zastosowano metodę symulacyjną Monte Carlo. W analizach numerycznych wykorzystano metodykę i wnioski z wcześniejszych badań autorów, opisanych w publikacjach [4]-[7]. Badania te wykazały między innymi, że odchylenia standardowe drgań, szczególnie przyspieszeń, istotnie zależą od sposobu modelowania pojazdu szynowe-



go [7]. W związku z tym, przyjęto do obliczeń bardziej realistyczny model obciążenia ruchem taboru kolejowego niż w pracach poprzednich, gdzie rozważano obciążenie w postaci układu ruchomych nieresorowanych mas skupionych. Rozbudowano wcześniej stosowany model obliczeniowy mostu kolejowego poprzez wprowadzenie dodatkowego podukładu dynamicznego o własnych stopniach swobody, który reprezentuje pojazd szynowy.

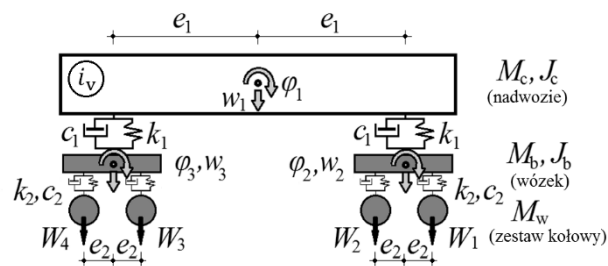
## 2. Model obliczeniowy układu most – tor – pociąg

### 2.1. Dynamiczny model pociągu

W pracy przyjęto powszechnie stosowany w literaturze model dynamiczny pociągu, w postaci zespołu  $N_v$  powtarzalnych pojazdów (jednostek napędowych) na dwuosiowych wózkach jezdnych z dwustopniowym układem zawieszenia (por. [3]). Założono, że każdy pojazd składa się z nadwozia, dwóch wózków jezdnych oraz czterech zestawów kołowych, połączonych ze sobą układem więzi sprężysto-tłumiących modelujących pierwszy i drugi stopień zawieszenia – rys. 1. Nadwozie oraz dwa wózki jezdne są traktowane jako sztywne tarcze masyowe, posiadające dwa niezależne dynamiczne stopnie swobody: przemieszczenie pionowe  $w_i$  oraz obrót  $\varphi_i$ , gdzie  $i = 1, 2, 3$ . Masy i centralne biegunowe momenty bezwładności masy nadwozia i wózków jezdnych oznaczono kolejno symbolami:  $M_c, J_c$  oraz  $M_b, J_b$ . Parametry sztywności i tłumienia zawiesznień wynoszą odpowiednio:  $k_1, c_1$  oraz  $k_2, c_2$ .

Przyjęto, że zestawy kołowe o masie  $M_w$  pozostają w pełnym kontakcie z szyną podczas ruchu pociągu, stąd ich pionowe przemieszczenia  $W_1 \dots W_4$  są równocześnie ugięciami szyny w punktach kontaktu. W ten sposób, drgania każdego pojazdu są opisane przez 6 wewnętrznych stopni swobody zebranych w wektorze  $\mathbf{w}_v$  oraz 4 przemieszczenia pionowe szyny śledzące położenie osi zestawów kołowych, zebrane w wektorze  $\mathbf{W}_v$ , gdzie

$$\mathbf{w}_v = [w_1, w_2, w_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T, \quad \mathbf{W}_v = [W_1, W_2, W_3, W_4]^T \quad (1)$$



Rys. 1. Dynamiczny model pojazdu szynowego

Fig. 1. Dynamic model of a single vehicle

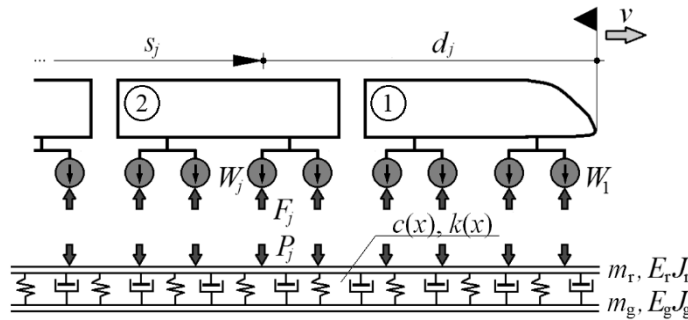
Po sporządzeniu bilansu energetycznego i wykorzystaniu równań Lagrange'a otrzymuje się równanie drgań pojazdu, które można zapisać w następującej postaci ogólnej

$$\mathbf{B}_v \ddot{\mathbf{w}}_{i_v} + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{w}}_{i_v} + \mathbf{K}_v \mathbf{w}_{i_v} = \mathbf{F}_{i_v}, \quad \text{gdzie } \mathbf{w}_{i_v} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_v \\ \mathbf{W}_v \end{bmatrix}_{i_v} \quad (2)$$

Indeks „ $i_v$ ” oznacza numer pojazdu liczony od czoła pociągu (por. rys. 2). Macierze: bezwładności  $\mathbf{B}_v$ , tłumienia  $\mathbf{C}_v$  i sztywności  $\mathbf{K}_v$  mają wymiar  $10 \times 10$  i są jednakowe dla wszystkich pojazdów. Wektor sił wzbudzających o wymiarze  $10 \times 1$  jest wektorem blokowym o postaci

$$\mathbf{F}_{i_v} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ -\mathbf{F}_v \end{bmatrix}_{i_v}, \quad \text{gdzie } \mathbf{F}_v = [F_1(t), F_2(t), F_3(t), F_4(t)]^T \quad (3)$$

Siły  $F_1(t) \dots F_4(t)$  są dynamicznymi oddziaływaniami toru na zestawy kołowe. Dodatkowo zwroty sił pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Ogólny model pociągu i mostu oraz ich wzajemne oddziaływania  
Fig. 2. General model of the train and bridge and their interactions

Równania (2) dotyczące kolejnych pojazdów  $i_v = 1, 2, \dots, N_v$  zapisano dalej w sposób łączny tworząc wektory  $\mathbf{w}_t = \text{col}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{N_v})$ ,  $\mathbf{F}_t = \text{col}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_v})$  i macierze blokowo-diagonalne typu  $\mathbf{B}_t = \text{diag}((\mathbf{B}_v)_1, \dots, (\mathbf{B}_v)_{N_v})$ . Symbol „col” oznacza tu macierz kolumnową (wektor). Następnie zmieniono uporządkowanie równań, grupując równania związane z wewnętrznymi stopniami swobody kolejnych pojazdów. Przemieszczenia odpowiadające wewnętrznym stopniom swobody zestawiono w wektor  $\mathbf{w}_T = \text{col}((\mathbf{w}_v)_1, \dots, (\mathbf{w}_v)_{N_v})$ , który zawiera  $6N_v$  elementów. Pozostałe równania tworzą drugą grupę związaną z przemieszczeniami zestawów kołowych, które tworzą wektor zawierający  $4N_v$  elementów:  $\mathbf{w}_R = \text{col}((\mathbf{W}_v)_1, \dots, (\mathbf{W}_v)_{N_v})$ .

Zmianę uporządkowania równań zrealizowano przez podstawienie relacji  $\mathbf{w}_t = \mathbf{A}_t \text{col}(\mathbf{w}_T, \mathbf{w}_R)$  do układu zblokowanych równań (2), gdzie  $\mathbf{A}_t$  jest macierzą przekształcenia polegającego na zmianie uporządkowania przemieszczeń. Po lewostronnym pomnożeniu przez macierz  $\mathbf{A}_t^T$ , otrzymuje się finalną postać równań opisujących drgania całego składu pociągu, z podziałem na dwie sprzężone grupy według wcześniej opisanego schematu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{TT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_T \\ \ddot{\mathbf{w}}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TT} & \mathbf{C}_{TR} \\ \mathbf{C}_{RT} & \mathbf{C}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_T \\ \dot{\mathbf{w}}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{TR} \\ \mathbf{K}_{RT} & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_T \\ \mathbf{w}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Warto zauważyć, że macierze  $\mathbf{B}_{RR}$ ,  $\mathbf{C}_{RR}$  i  $\mathbf{K}_{RR}$  są diagonalne. Ponadto, kolejne przemieszczenia zestawów kołowych, zawarte w wektorze  $\mathbf{w}_R$ , są równocześnie ugięciami dynamicznymi szyny w punktach kontaktu, w chwili  $t$ .

Rozwinięcie równania (4) według pierwszego wiersza i przeniesienie na prawą stronę wyrazów zawierających człony sprzęgające prowadzi do równania

$$\mathbf{B}_{TT}\ddot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{C}_{TT}\dot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{K}_{TT}\mathbf{w}_T = -(\mathbf{C}_{TR}\dot{\mathbf{w}}_R + \mathbf{K}_{TR}\mathbf{w}_R) = \mathbf{F}_T \quad (5)$$

które opisuje drgania pociągu wzbudzone kinematycznie drganiami szyn. Wynikiem rozwinięcia według drugiego wiersza jest natomiast formuła

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{C}_{RT}\dot{\mathbf{w}}_T + \mathbf{K}_{RT}\mathbf{w}_T) - (\mathbf{B}_{RR}\ddot{\mathbf{w}}_R + \mathbf{C}_{RR}\dot{\mathbf{w}}_R + \mathbf{K}_{RR}\mathbf{w}_R) \quad (6)$$

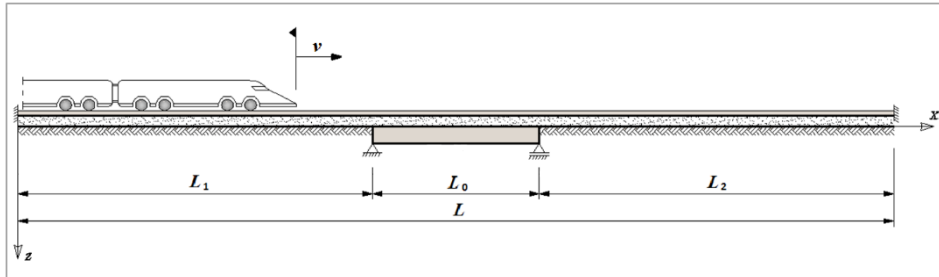
która określa dynamiczne oddziaływania szyny na zestawy kołowe:  $F_j(t)$ , gdzie  $j = 1, \dots, N$  oraz  $N = 4N_v$ . Według zasady oddziaływań wzajemnych, są to równocześnie dynamiczne naciski zestawów kołowych na szynę, przy czym całkowite siły nacisku  $P_j(t) = G_j + F_j(t)$ , pokazane na rys.2, składają się z nacisków statycznych  $G_j = (0,25M_c + 0,5M_b + M_w)g$  oraz dynamicznych  $F_j(t)$ .

## 2.2. Równania ruchu układu most – tor – pociąg

W pracy [4] autorzy przedstawili oryginalny, płaski model obliczeniowy układu: dźwigar mostowy – tor podsypkowy, którego obciążeniem jest zbiór ruchomych, nieresorowanych mas skupionych. Model ten wykorzystamy do sformułowania równań ruchu układu złożonego z trzech sprzężonych podukładów: dźwigara mostowego, toru podsypkowego i pociągu. Schemat rozważanego układu jest pokazany na rys. 3.

Kluczową ideą modelu opisanego szczegółowo w pracy [4] jest założenie, że warstwa podsypki stanowi ciągłe, nieinercyjne podłoże sprężysto-tłumiące typu Winklera, o charakterystykach liniowych  $k(x)$  i  $c(x)$  zmiennych na długości toru. Uwzględniono strefy dojazdowe, usytuowane przed i za przeprawą mostową, dostatecznie długie, aby wziąć pod uwagę efekt propagacji drgań spowodowanych nadjeżdżającym pociągiem. Przyjęto zatem, że tor podsypkowy składa się z trzech odcinków: odcinka centralnego o rozpiętości  $L_0$  – opartego na dźwigarze mostu oraz dwóch stref dojazdowych o długościach  $L_1$  i  $L_2$ , spoczywają-

cych na nieodkształcalnym podtorzu. Równania ruchu dźwigara mostowego i trzech odcinków toru wyprowadzono metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkinia, przy czym zarówno dźwigar jak i zespół dwóch szyn tworzących tor potraktowano jako pryzmatyczne belki Eulera z ciągłym rozkładem masy. Wyprowadzone równania ruchu połączone za pomocą tzw. techniki podstruktur, opisanej przez Biondiego [3].



Rys. 3. Schemat układu: most – tor – pociąg z uwzględnieniem stref dojazdowych  
Fig. 3. A bridge – track – train system and two approach track sections

Finalne równania ruchu zostały sformułowane w pracy [4] przy założeniu, że obciążeniem toru jest układ ruchomych, nieresorowanych mas skupionych modelujących pociąg. Skutkiem tego założenia było pojawienie się w równaniach współczynników zmiennych w czasie. Po ich pominięciu otrzymuje się układ dwóch równań macierzowych zapisanych łącznie w następującej postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{rr} & -\mathbf{C}_{rg} \\ -\mathbf{C}_{gr} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & -\mathbf{K}_{rg} \\ -\mathbf{K}_{gr} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Wszystkie oznaczenia użyte w równaniu (7), z wyłączeniem wektora  $\mathbf{F}_r$ , są zdefiniowane w pracy [4]. Nadpisane kropki oznaczają pochodne po czasie, indeks „g” odnosi się do dźwigara mostowego, indeks „r” oznacza tor (zespół dwóch szyn). Równania (7) stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań.

Wektor  $\mathbf{F}_r$ , który reprezentuje obciążenie toru przejazdem pociągu, wymaga szczegółowego zdefiniowania. Znana jest ogólna formuła jego agregacji ([4])

$$\mathbf{F}_r = \sum_{i=0}^2 \mathbf{A}_i^T \left( \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{A}_{ki}^T \mathbf{F}_{ki} \right) \quad (8)$$

na podstawie wektorów  $\mathbf{F}_{ki}$  zawierających równoważniki obciążenia działającego na  $k$ -ty element skończony, wyodrębniony w  $i$ -tej strefie toru. Indeks  $i$  określa odcinek toru: centralny  $i = 0$ , strefę dojazdową przed mostem  $i = 1$  i strefę za przeprawą mostową  $i = 2$ . Symbol  $n_i$  oznacza liczbę elementów, na które podzielono strefę  $i$ . Macierze  $\mathbf{A}_{ki}$  i  $\mathbf{A}_i$  realizują transformacje przemieszczeń wę-

złowych, polegające na wyborze konkretnego podzbioru i określone wzorami

$$\mathbf{W}_{ki} = \mathbf{A}_{ki} \mathbf{q}_{ri}, \quad \mathbf{q}_{ri} = \mathbf{A}_i \mathbf{q}_r \quad (9)$$

gdzie:  $\mathbf{W}_{ki}$  – wektor przemieszczeń brzegowych elementu  $k$  w strefie toru  $i$ ,

$\mathbf{q}_{ri}$  – wektor przemieszczeń węzłowych w strefie toru  $i$ ,

$\mathbf{q}_r$  – pełny zbiór przemieszczeń węzłowych toru (trzech stref), z wyłączeniem utwierdzonych węzłów skrajnych.

Rozkład przemieszczeń na długości elementu skończonego  $l_{ki}$  jest aproksymowany typowymi sześciennymi wielomianami Hermite'a, które tworzą wektor funkcji kształtu  $\mathbf{N}_{ki}(\xi)$ , gdzie  $\xi = (x/l)_{ki}$  i  $0 \leq \xi \leq 1$ , zatem

$$w_{ki}(\xi, t) = \mathbf{N}_{ki}^T(\xi) \mathbf{W}_{ki}(t) \quad (10)$$

Jak pokazano na rys. 2, tor jest obciążony zbiorem ruchomych sił skupionych  $P_j(t)$ , gdzie  $P_j(t) = G_j + F_j(t)$ . Przyjęto, że pociąg porusza się ze stałą prędkością  $v$ , wtedy położenie  $j$ -tej siły na torze w chwili  $t$  opisuje funkcja  $s_j(t) = vt - d_j$ , gdzie  $d_j$  oznacza odległość siły od czoła pociągu, które w chwili początkowej  $t = 0$  znajduje się na początku lewej strefy dojazdowej toru.

Obciążenie  $k$ -tego elementu skończonego szyny znajdującego się w obrębie  $i$ -tego odcinka toru, mierzone na jednostkę długości, można zapisać następującym wzorem wyrażonym z użyciem funkcji delta Diraca  $\delta(\cdot)$ :

$$p_{ki}(x_{ki}, t) = \sum_{j=1}^N P_j(t) \delta(x_{ki} - s_{ki}^{P_j}(t)), \quad s_{ki}^{P_j}(t) = s_j(t) - (k-1)l_{ki} - a_i \quad (11)$$

gdzie  $a_0 = L_1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = L_1 + L_0$  są rozpiętościami poprzedzających odcinków toru oraz  $N = 4N_v$ . Wektor równoważników obciążenia ma wówczas postać

$$\mathbf{F}_{ki} = l_{ki} \int_0^1 \mathbf{N}_{ki} p_{ki}(\xi, t) d\xi = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_j} P_j(t) \quad (12)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_j} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_j}(t) = \begin{cases} \mathbf{N}_{ki}[\xi_{ki}^{P_j}(t)] & \text{gdy } \xi_{ki}^{P_j} \in (0; 1] \\ 0 & \text{gdy } \xi_{ki}^{P_j} \notin (0; 1] \end{cases} \quad (13)$$

jest wektorem funkcji kształtu o argumentie  $\xi_{ki}^{P_j} = s_{ki}^{P_j}(t)/l_{ki}$ , zależnym od czasu, śledzącym położenie siły  $P_j(t)$  względem danego elementu skończonego. Zestawiając naciski zestawów kołowych pociągu w wektorach:  $\mathbf{G}$  (naciski statyczne  $G_j$ ),  $\mathbf{F}$  (naciski dynamiczne  $F_j(t)$ ) i  $\mathbf{P}$  (naciski łączne  $P_j(t)$ ), oraz wektory funkcji kształtu (13) w kolumnach macierzy  $\tilde{\mathbf{N}}_{ki}$ , w uporządkowaniu od  $j = 1$  do

$j = N$ , otrzymujemy na podstawie wzoru (12)

$$\mathbf{F}_{ki} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki} (\mathbf{G} + \mathbf{F}), \text{ gdzie } \tilde{\mathbf{N}}_{ki} = [\tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_1} \quad \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^{P_2} \quad \dots] \quad (14)$$

Dynamiczne naciski zestawów kołowych  $\mathbf{F}(t)$  są określone wzorem (6), w którym występują przemieszczenia zestawów kołowych  $W_j(t)$  zebrane w wektorze  $\mathbf{w}_R$ , a także ich prędkości i przyspieszenia. Przemieszczenia zestawów kołowych są równe ugięciom szyny śledzącym położenie sił  $P_j(t)$ , mamy zatem

$$W_j(t) = w_{ki}[\xi_{ki}^{P_j}(t), t] = \mathbf{N}_{ki}^T[\xi_{ki}^{P_j}(t)] \mathbf{W}_{ki}(t) \quad (15)$$

jeśli siła  $P_j$  znajduje się na  $k$ -tym elemencie w  $i$ -tej strefie toru. Uwzględniając definicję (13) otrzymujemy po wykonaniu obliczeń

$$\mathbf{w}_R = \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{W}_{ki}, \quad \dot{\mathbf{w}}_R = \frac{v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{W}_{ki} + \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \dot{\mathbf{W}}_{ki} \quad (16)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_R = \frac{v^2}{l_{ki}^2} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{W}_{ki} + \frac{2v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \dot{\mathbf{W}}_{ki} + \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \ddot{\mathbf{W}}_{ki} \quad (17)$$

gdzie  $(\cdot)' = d/d\xi$ . Podstawienie zależności (16) i (17) do wzoru (6), a następnie wzoru (6) do (14) daje wynik

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{ki} &= \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{G} - \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RT} \dot{\mathbf{w}}_T - \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{K}_{RT} \mathbf{w}_T - \\ &\quad \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \ddot{\mathbf{W}}_{ki} - \left( \frac{2v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T + \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \dot{\mathbf{W}}_{ki} - \\ &\quad \left( \frac{v^2}{l_{ki}^2} \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T + \frac{v}{l_{ki}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T + \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{K}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{W}_{ki} \end{aligned} \quad (18)$$

który na podstawie (8) i (9) prowadzi do następującej, ostatecznej postaci wektora obciążenia toru

$$\mathbf{F}_r = \tilde{\mathbf{F}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{rT} \dot{\mathbf{w}}_T - \tilde{\mathbf{K}}_{rT} \mathbf{w}_T - \tilde{\mathbf{B}}_{rr} \ddot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{C}}_{rr} \dot{\mathbf{q}}_r - \tilde{\mathbf{K}}_{rr} \mathbf{q}_r \quad (19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_r &= \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{G}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{rT} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{C}_{RT}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{rT} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{K}_{RT}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{rr} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \mathbf{B}_{RR} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}_{\text{rr}} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \left( \frac{2v}{l_{ki}} \mathbf{B}_{\text{RR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{C}_{\text{RR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\text{rr}} &= \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{ki}^T \tilde{\mathbf{N}}_{ki} \left( \frac{v^2}{l_{ki}^2} \mathbf{B}_{\text{RR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \frac{v}{l_{ki}} \mathbf{C}_{\text{RR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T + \mathbf{K}_{\text{RR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i.\end{aligned}$$

Zdefiniowany w równaniu (5) wektor wymuszenia kinematycznego drgań pociągu, po podstawieniu zależności (16) i zsumowaniu po wszystkich elementach szyny, przyjmuje postać

$$\mathbf{F}_{\text{T}} = - \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{C}_{\text{TR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \dot{\mathbf{W}}_{ki} - \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \left( \frac{v}{l_{ki}} \mathbf{C}_{\text{TR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{K}_{\text{TR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{W}_{ki} \quad (20)$$

którą po uwzględnieniu relacji (9) zapisano ostatecznie w formie

$$\mathbf{F}_{\text{T}} = -\tilde{\mathbf{C}}_{\text{Tr}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}} - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{Tr}} \mathbf{q}_{\text{r}} \quad (21)$$

w której wprowadzono oznaczenia

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{Tr}} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \left( \frac{v}{l_{ki}} \mathbf{C}_{\text{TR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}'^T + \mathbf{K}_{\text{TR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \right) \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{\text{Tr}} = \sum_{i=0}^2 \sum_{k=1}^{n_{ri}} \mathbf{C}_{\text{TR}} \tilde{\mathbf{N}}_{ki}^T \mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_i.$$

Drgania sprzężonego układu dźwigar mostowy – tor podsypkowy – pociąg są ostatecznie opisane układem trzech równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\text{TT}} \ddot{\mathbf{w}}_{\text{T}} + \mathbf{C}_{\text{TT}} \dot{\mathbf{w}}_{\text{T}} + \mathbf{K}_{\text{TT}} \mathbf{w}_{\text{T}} &= \mathbf{F}_{\text{T}} \\ \mathbf{B}_{\text{rr}} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{r}} + \mathbf{C}_{\text{rr}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}} + \mathbf{K}_{\text{rr}} \mathbf{q}_{\text{r}} - \mathbf{C}_{\text{rg}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{g}} - \mathbf{K}_{\text{rg}} \mathbf{q}_{\text{g}} &= \mathbf{F}_{\text{r}} \\ \mathbf{B}_{\text{gg}} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{g}} + \mathbf{C}_{\text{gg}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{g}} + \mathbf{K}_{\text{gg}} \mathbf{q}_{\text{g}} - \mathbf{C}_{\text{gr}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{r}} - \mathbf{K}_{\text{gr}} \mathbf{q}_{\text{r}} &= \mathbf{0}\end{aligned} \quad (22)$$

na które składa się równanie (5) opisujące drgania pociągu, wzbudzone kinematycznie drganiami toru, oraz równania drgań toru i dźwigara mostowego (7). Po podstawieniu formuł (19) i (21) do równań (22) i przeniesieniu na lewą stronę składników, które zależą od przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń drgań, układ równań (22) można zapisać w następującej postaci, dogodnej do bezpośredniego całkowania numerycznego:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{TT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{rr} + \tilde{\mathbf{B}}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_T \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TT} & \tilde{\mathbf{C}}_{Tr} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{rT} & \mathbf{C}_{rr} + \tilde{\mathbf{C}}_{rr} & -\mathbf{C}_{rg} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{gr} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_T \\ \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_g \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \tilde{\mathbf{K}}_{Tr} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{rT} & \mathbf{K}_{rr} + \tilde{\mathbf{K}}_{rr} & -\mathbf{K}_{rg} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{gr} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_T \\ \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (23)
\end{aligned}$$

W równaniach (23) ujawniają się sprzężenia drgań rozważanego układu. Sprzężenie drgań pociągu i toru kolejowego jest konsekwencją założenia, że przemieszczenia pionowe zestawów kołowych pojazdu są jednocześnie ugięciami szyny w punktach styku, natomiast za sprzężenie drgań toru i dźwigara mostowego odpowiedzialna jest warstwa podsypki tłuczniowej.

### 2.3. Symulacja losowych zmian sztywności podsypki

Warstwa podsypki w przyjętym modelu obliczeniowym mostu kolejowego stanowi podłoże sprężysto-tłumiące typu Winklera, o zmiennych parametrach  $k(x)$  i  $c(x)$ . Jak pokazano w pracach [5] i [6], to założenie umożliwia wprowadzenie do modelu obliczeniowego funkcji losowej, która opisuje niewielkie, przypadkowe zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru kolejowego, możliwe na liniach dużych prędkości. Przyjęto, że sztywność podsypki  $k(x) = \bar{k} + \tilde{k}(x)$  jest sumą stałej wartości średniej  $\bar{k}$  i losowej fluktuacji  $\tilde{k}(x)$  o zerowej wartości oczekiwanej i znanej funkcji korelacyjnej. Biorąc pod uwagę fakt, że zmiany sztywności podsypki wynikają z działania wielu niezależnych czynników, założono zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, że fluktuacja sztywności wokół wartości średniej stanowi stacjonarny proces Gaussa. Symulacje numeryczne takiego procesu można stosunkowo łatwo przeprowadzić wykorzystując znaną w literaturze aproksymację spektralną procesu stacjonarnego (por. [4], [6]), pod warunkiem, że znana jest funkcja gęstości widmowej procesu.

W niniejszej pracy przyjęto funkcję gęstości widmowej o postaci

$$S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega) = \frac{\sigma_k^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega^2 + \theta^2}{(\alpha^2 - \omega^2 + \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2} \quad (24)$$

która odpowiada dwuparametrowej funkcji korelacyjnej

$$K_{\tilde{k}\tilde{k}}(\zeta) = \sigma_k^2 e^{(-\alpha|\zeta|)} \cos(\theta\zeta) \quad (25)$$

pulsującej harmonicznie z częstością  $\theta$  [rad/m] i zanikającej wykładniczo wraz ze wzrostem odległości  $\zeta = x_1 - x_2$  między dwoma punktami  $x_1, x_2$  położonymi na



osi toru kolejowego. Parametr  $\alpha > 0$  odpowiada za szybkość zanikania korelacji, symbol  $\sigma_k^2 = K_{\tilde{k}\tilde{k}}(0)$  oznacza wariancję procesu.

Funkcja gęstości widmowej (24) osiąga maksymalne wartości w otoczeniu częstości  $\theta = 2\pi/T_\theta$ , gdzie  $T_\theta$  oznacza dominującą długość fali procesu  $\tilde{k}(x)$ , który opisuje zmiany sztywności podsypki wzdłuż toru. W dalszych analizach za  $T_\theta$  będzie podstawiany osiowy rozstaw podkładów, co oznacza przyjęcie założenia, że zasadnicze zmiany sztywności podsypki zachodzą cyklicznie, z częstością odpowiadającą rozstawowi podkładów kolejowych. To założenie, zgodne z intuicją inżynierską, zostało potwierdzone doświadczalnie. Wyniki badań eksperymentalnych, opublikowane przez Dahlberga w pracy [8], wskazują bowiem jednoznacznie na występowanie pewnej charakterystycznej częstości zmian sztywności toru kolejowego, wynikającej z istnienia podkładów.

### 3. Badania numeryczne

#### 3.1. Charakterystyki probabilistyczne drgań mostu

Do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych drgań zastosowano metodę symulacyjną Monte Carlo. Symulację numeryczną stacjonarnego procesu Gaussa, opisującego zmiany sztywności podsypki, przeprowadzono stosując wspomnianą wcześniej aproksymację spektralną procesu, określoną wzorami

$$\tilde{k}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{N_\omega} a_n \cos(\omega_n x + \varphi_n), \quad a_n = \sqrt{2S_{\tilde{k}\tilde{k}}(\omega_n)\Delta\omega} \quad (26)$$

podanymi między innymi w monografii Sobczyka i Spencera [10]. Przesunięcia fazowe  $\varphi_n$  we wzorze (26) są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym w przedziale od 0 do  $2\pi$ , z gęstością  $1/2\pi$ . Amplitudy  $a_n$  oraz częstości  $\omega_n = \omega_l + (n - 0,5)\Delta\omega$  [rad/m] składowych harmonicznym szeregu (26) są powiązane z liczbą wyrazów szeregu  $N_\omega$ , która dzieli przedział częstości  $(\omega_l, \omega_u)$  na odcinki  $\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N_\omega$ , gdzie  $\omega_l$  i  $\omega_u$  określają dolną i górną granicę przedziału częstości uznanego za istotny.

Każdej symulacji procesu zmian sztywności podsypki, obliczonej według wzoru (26), odpowiada konkretna realizacja drgań mostu, spowodowanych przejazdem pociągu. Po wykonaniu  $N$  symulacji, związanych każdorazowo z numerycznym wyznaczeniem przebiegów drgań, otrzymuje się zbiór realizacji drgań losowych. Na ich podstawie można wyznaczyć charakterystyki probabilistyczne drgań – zmienne w czasie, ponieważ drgania mostu są niestacjonarnymi procesami stochastycznymi. W niniejszej pracy ograniczono obliczenia do wartości oczekiwanych  $E[\cdot]$  i wariancji  $\text{Var}[\cdot]$ , które w kolejnych chwilach  $t$  są określone znanymi wzorami

$$E[R(t)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i(t), \quad \text{Var}[R(t)] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i(t) - E[R(t)])^2 \quad (27)$$

gdzie  $R(t)$  oznacza badany proces odpowiedzi mostu a  $R_i(t)$  jego realizację. Na podstawie wariancji obliczono odchylenia standardowe  $\sigma_{R(t)} = \text{Var}[R(t)]^{1/2}$ .

### 3.2. Obiekt badań

Jako obiekt badań przyjęto swobodnie podparty, jednotorowy, belkowy most kolejowy o rozpiętości  $L_0 = 30,0$  m. Sztywność giętna żelbetowego dźwigara mostu wynosi  $E_g I_g = 1,0703358 \cdot 10^{11}$  Nm<sup>2</sup>. Masę warstwy podsypki tłuczniowej oraz podkładów kolejowych wliczono do równomiernie rozłożonej masy dźwigara  $m_g = 3,3147 \cdot 10^4$  kg/m. Przyjęto, że parametr tłumienia podsypki jest stały i wynosi  $c(x) = c = 2,8667 \cdot 10^5$  Ns/m<sup>2</sup>, natomiast sztywność podsypki zmienia się losowo wzdłuż toru oscylując wokół wartości średniej  $\bar{k} = 1,1 \cdot 10^8$  N/m<sup>2</sup>. Założono, że długości stref dojazdowych toru wynoszą  $L_1 = L_2 = 100$  m, uznając na podstawie pracy [3], że jest to długość wystarczająca, aby w numerycznych symulacjach drgań mostu zastąpić tor nieskończenie długi. Sztywność giętna belki modelującej szyny toru kolejowego wynosi  $E_r I_r = 1,2831 \cdot 10^7$  Nm<sup>2</sup> a jej masa jednostkowa  $m_r = 1,21 \cdot 10^2$  kg/m. W obliczeniach uwzględniono tłumienie materiałowe w szynach z czasem retardacji  $\kappa_r = 2,1 \cdot 10^{-5}$  s oraz tłumienie konstrukcyjne dźwigara z parametrem wymiarowym  $\mu_g = 0,984$  s<sup>-1</sup>. Drgania mostu i toru kolejowego wzbudzone są przejazdem pociągu typu Shinkansen, który składa się z ośmiu 25-metrowych powtarzalnych jednostek napędowych, z których każda zawiera dwa dwuosiowe wózki jezdne. Osiowy rozstaw wózków wynosi 17,50 m, osiowy rozstaw zestawów kołowych 2,50 m. Masa nadwozia przy maksymalnym obciążeniu użytkowym wynosi  $M_c = 3,60 \cdot 10^4$  kg, masa ramy wózka jezdnego wraz z masą silników trakcyjnych  $M_b = 4,95 \cdot 10^3$  kg, masa zestawu kołowego  $M_w = 2,40 \cdot 10^3$  kg. Masowe biegunowe momenty bezwładności nadwozia i wózków jezdnych, obliczone względem środków masy, wynoszą odpowiednio:  $J_c = 1,894 \cdot 10^6$  kg·m<sup>2</sup> i  $J_b = 6,150 \cdot 10^3$  kg·m<sup>2</sup>. Przyjęto następujące wartości parametrów sztywności i tłumienia zawiesznień pojazdu:  $k_1 = 8,870 \cdot 10^5$  N/m,  $c_1 = 4,335 \cdot 10^4$  Ns/m,  $k_2 = 2,540 \cdot 10^6$  N/m,  $c_2 = 1,963 \cdot 10^4$  Ns/m. Zaznaczone na rys. 1 odległości od środków ciężkości tarcz masowych do punktów zamocowania zawiesznień wynoszą:  $e_1 = 8,25$  m oraz  $e_2 = 1,25$  m. Wielkości opisujące model pociągu Shinkansen przyjęto na podstawie monografii [9].

### 3.3. Wpływ prędkości pociągu na charakterystyki probabilistyczne drgań dźwigara mostowego i toru

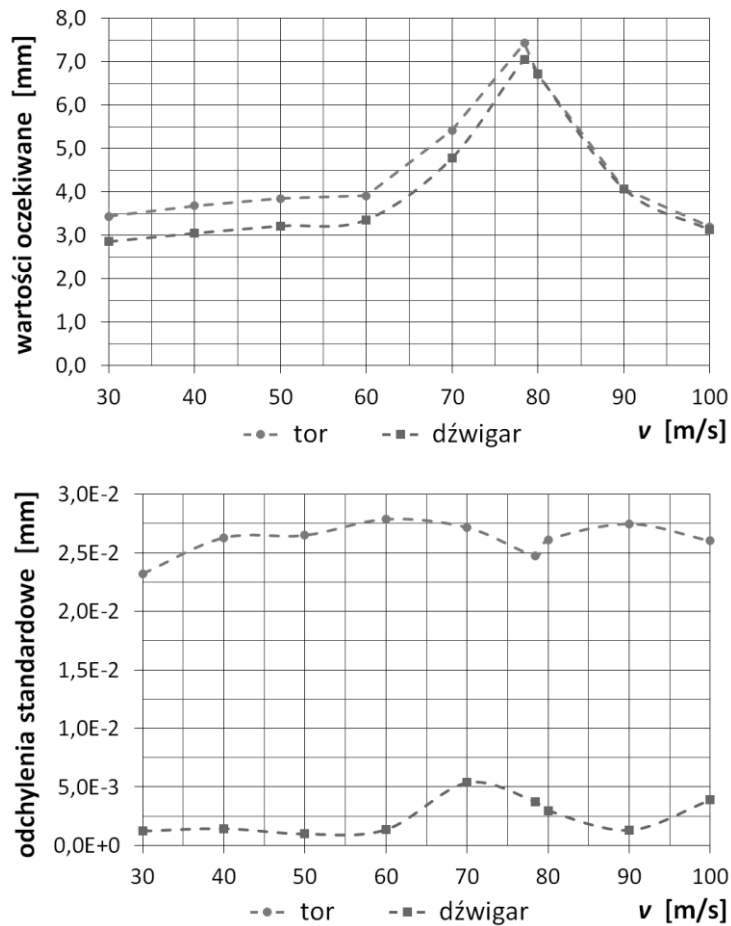
Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe odpowiedzi dynamicznej konstrukcji obliczono na podstawie 100 symulacji, zakładając, że współczynnik

zmienności sztywności podsypki  $\sigma_k / \bar{k} = 0,3 = 30\%$ . W obliczeniach przyjęto, że parametry funkcji korelacyjnej (25) wynoszą  $\alpha = 2,0$  oraz  $\theta = 10\pi/3$ , przy czym wartość parametru  $\theta$  odpowiada rozstawowi podkładów  $T_\theta = 0,6$  m. Prędkość ruchu pociągu zmienia się co 10 m/s począwszy od 30 m/s (108 km/h) do 100 m/s (360 km/h), przy czym wyniki podano również dla pierwszej prędkości rezonansowej  $v_{\text{res}} = 78,312$  m/s (281,924 km/h), obliczonej na podstawie podstawowej częstości własnej układu dźwigar – tor:  $\omega_1 = 19,682$  rad/s.

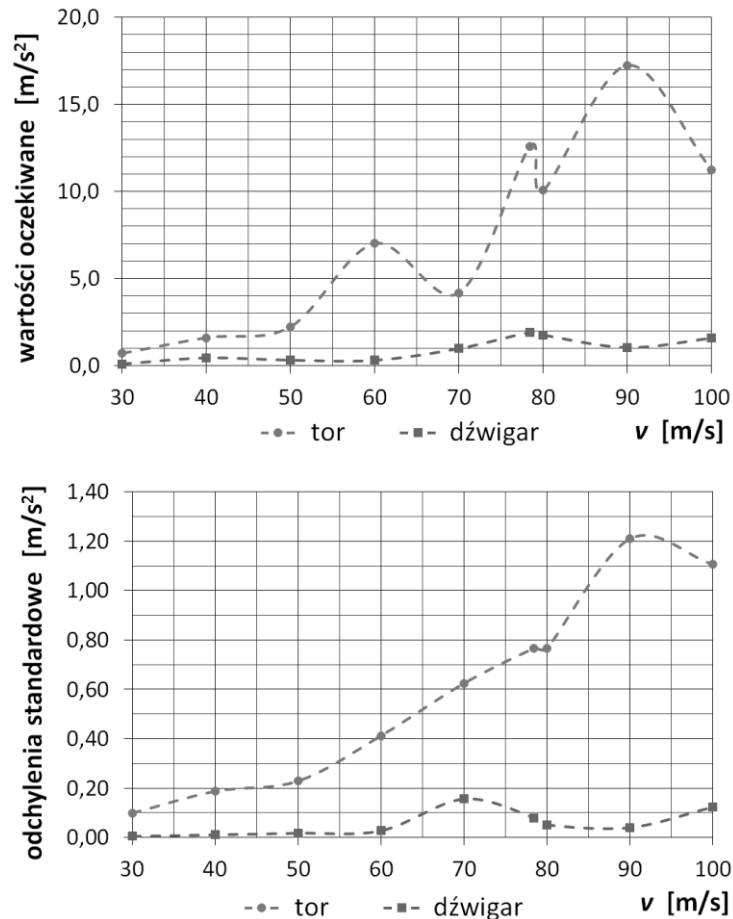
Na rys. 4 przedstawiono maksymalne wartości oczekiwane, wybrane z przebiegów czasowych, oraz maksymalne odchylenia standardowe ugięć dynamicznych dźwigara i toru kolejowego w środku rozpiętości mostu, w zależności od prędkości przejazdu pociągu. Cechą charakterystyczną wykresów wartości oczekiwanych jest znaczny wzrost przemieszczeń w strefie prędkości rezonansowej. Przemieszczenia zaczynają narastać już po przekroczeniu około 60 m/s (216 km/h), osiągają maksimum dla prędkości rezonansowej, potem maleją do poprzedniego poziomu, osiągając go przy prędkości około 90 m/s (324 km/h). Strefa zwiększonych ugięć dynamicznych obejmuje więc dość szeroki zakres dużych prędkości: od 60 do 90 m/s. Poza tą strefą wartości oczekiwane ugięć utrzymują się w przybliżeniu na stałym poziomie i wynoszą w przypadku dźwigara od 2,9 do 3,4 mm, w torze od 3,2 do 3,9 mm. Prędkości rezonansowej odpowiadają dwukrotnie większe wartości oczekiwane ugięć.

Można zauważyć, że po przekroczeniu prędkości rezonansowej wartości oczekiwane ugięć dynamicznych szyny i dźwigara praktycznie się zrównują. To oznacza, że efektem bardzo dużych prędkości jest między innymi znaczne zwiększenie dynamicznej sztywności warstwy sprężystej, łączącej tor z dźwigarem, co skutkuje dużym wzrostem przyspieszeń drgań toru. Efekt ten jest widoczny na rys. 5, gdzie pokazano wyniki analogiczne do przedstawionych na rys. 4, ale dotyczące przyspieszeń. Wartości oczekiwane przyspieszeń drgań toru rosną znacznie ze wzrostem prędkości przejazdu pociągu, w przeciwieństwie do przyspieszeń dźwigara mostowego, które utrzymują się na stosunkowo niskim poziomie od 0,5 do 1,5 m/s<sup>2</sup>, z lokalnym maksimum 2 m/s<sup>2</sup> w strefie prędkości rezonansowej. Wzrost przyspieszeń toru nie jest monotoniczny, widoczne są lokalne ekstrema: przy prędkości jazdy pociągu 60 m/s – 7 m/s<sup>2</sup>, przy prędkości rezonansowej  $v_{\text{res}} = 78,312$  m/s – prawie 13 m/s<sup>2</sup>, oraz przy prędkości 90 m/s – ponad 17 m/s<sup>2</sup>. Są to wartości bardzo duże w porównaniu z wartościami granicznymi, określonymi w załączniku A2 do PN-EN 1990 [13], gdzie podano, że pionowe przyspieszenie nadwozia pojazdu nie powinno przekraczać 1,0 m/s<sup>2</sup> przy bardzo dobrym poziomie komfortu jazdy, 1,3 m/s<sup>2</sup> przy dobrym i 2,0 m/s<sup>2</sup> przy dostatecznym. Stąd wynika wniosek, że przy dużych prędkościach pociągów bardzo duże znaczenie ma odpowiedni dobór parametrów zawieszenia pojazdów szynowych, aby wyłumić drgania toru przekazywane na nadwozie pojazdu i zapewnić właściwy komfort jazdy. W tym celu należy przeprowadzić dokładniejszą analizę drgań, w tym drgań pojazdu, z uszczegółowieniem modelu

obliczeniowego pociągu, w którym powinna być uwzględniona możliwość chwilowego odrywania się kół pojazdu od toru, np. przez wprowadzenie więzi kontaktowych typu Hertza [9]).



Rys. 4. Maksymalne wartości oczekiwane i maksymalne odchylenia standardowe przemieszczeń dźwigara i toru w środku rozpiętości mostu  
 Fig. 4. Maximum expected values and maximum standard deviations of girder and track displacements at the bridge mid-span



Rys. 5. Maksymalne wartości oczekiwane i maksymalne odchylenia standardowe przyspieszeń drgań dźwigara i toru w środku rozpiętości mostu

Fig. 5. Maximum expected values and maximum standard deviations of girder and track accelerations at the bridge mid-span

Miarą wpływu nieregularności cech sprężystych podsypki na drgania dźwigara mostowego i szyn są odchylenia standardowe, które informują o tym, jaki jest rozrzut badanej odpowiedzi konstrukcji, spowodowany losową zmiennością sztywności podsypki. Jak wynika z rys. 4, rozrzut ugięć dynamicznych dźwigara i toru jest bardzo niewielki, pomijalnie mały z inżynierskiego punktu widzenia – odchylenia standardowe są wielokrotnie mniejsze od wartości oczekiwanych i nie wykazują stałej tendencji wzrostowej ze wzrostem prędkości przejazdu pociągu. Trzeba podkreślić, że wpływ zmian sztywności podsypki na ugięcia dynamiczne konstrukcji okazał się pomijalnie mały pomimo tego, że współczynnik

zmienności sztywności względem wartości średniej założono na dość wysokim poziomie 30%.

Z rys. 5 wynika natomiast, że założone, losowe zmiany sztywności podsypki mają widoczny wpływ na przyspieszenia drgań, jednak w przypadku dźwigara mostowego wpływ ten nie jest duży. Największe maksymalne odchylenie standardowe przyspieszeń, pojawiające się przy prędkości pociągu 70 m/s, wynosi około  $0,17 \text{ m/s}^2$ , co stanowi 17% maksymalnej wartości oczekiwanej przyspieszenia, wyznaczonej przy tej prędkości. Rozrzut przyspieszeń rzędu 17% wydaje się znaczący, jednak biorąc pod uwagę fakt, że wartości oczekiwane są stosunkowo małe, można stwierdzić, że zmiany sztywności podsypki nie mają dużego wpływu na przyspieszenia dźwigara, nawet przy dużych prędkościach ruchu pociągu.

W przypadku toru, odchylenia standardowe przyspieszeń szybko rosną wraz ze wzrostem prędkości pociągu. Należy jednak zauważyć, że równocześnie rosną wartości oczekiwane, dlatego największa wartość maksymalna odchylenia standardowego, występująca przy prędkości 90 m/s, stanowi tylko około 7% odpowiedniej wartości oczekiwanej. Przy prędkości 70 m/s otrzymujemy wartość 15%. Choć rozrzut przyspieszeń drgań toru generalnie nie jest duży w porównaniu z wartościami oczekiwany, to jednak przy dużych prędkościach jego wartość może przekraczać  $1 \text{ m/s}^2$ . Uwzględnienie zmian sztywności podsypki może mieć zatem istotne znaczenie w ocenie komfortu jazdy a także niezawodności zmęczeniowej szyn. W ujęciu stochastycznym problemu niezawodności niezbędne jest bowiem wyznaczenie częstotliwości występowania pików naprężeń, która zależy od przyspieszeń zmian naprężeń w materiale [10], a te z kolei są bezpośrednio związane z przyspieszeniami drgań.

#### 4. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano efektywną metodę wyznaczania charakterystyk probabilistycznych drgań układu dźwigar mostowy – tor – pociąg, z nawierzchnią podsypkową o losowo zmiennej sztywności. Przeprowadzono analizy numeryczne dla różnych prędkości przejazdu pociągu, z uwzględnieniem prędkości rezonansowej. Przy założonym, średnim poziomie zmian sztywności podsypki tłuczniowej (30%), uzyskano wyniki pozwalające sformułować następujące wnioski:

- Duże prędkości, przekraczające 60 m/s, mają istotny wpływ na wartości oczekiwane ugięć dynamicznych dźwigara mostowego i toru kolejowego a także na wartości oczekiwane przyspieszeń toru. Nie wpływają natomiast znacząco na wartości oczekiwane przyspieszeń dźwigara.
- W obszarze dużych prędkości pojawia się rozległa strefa rezonansowa, w której następuje znaczny wzrost wartości oczekiwanych ugięć dźwigara i toru – dwukrotny w badanym obiekcie, przy prędkości rezonansowej.

- Efektem bardzo dużych prędkości, większych od prędkości rezonansowej, jest zjawisko „uszywnienia” warstwy sprężystej w nawierzchni kolejowej, którego skutkiem są bardzo duże wartości oczekiwane przyspieszeń toru.
- Duże prędkości nie powodują istotnego zwiększenia efektów dynamicznych spowodowanych nieregularnościami cech sprężystych podsypki, które skutkują losową zmiennością jej sztywności.
- Wpływ losowych zmian sztywności podsypki na ugięcia dynamiczne dźwigara i toru jest przy dużych prędkościach nadal pomijalnie mały a wpływ na przyspieszenia drgań jest znaczący, może być rzędu kilkunastu procent.
- W przypadku dźwigara, kilkunastoprocentowy rozrzut przyspieszeń nie ma znaczenia z punktu widzenia inżynierskiego, ponieważ przyspieszenia są małe. Natomiast w torze kolejowym, w którym przyspieszenia drgań są bardzo duże w strefie dużych prędkości, analogiczny rozrzut może mieć istotny wpływ na ocenę trwałości toru w aspekcie zmęczenia materiału.

Podsumowując zaprezentowane wyniki analiz należy stwierdzić, że bardzo niekorzystnym efektem dynamicznym ruchu pociągów z dużymi prędkościami jest nadmierny przyrost wartości przyspieszeń toru. Efekt ten nie ujawnia się w drganiach dźwigara mostowego i może być znacznie zmniejszony poprzez wbudowanie w nawierzchnię kolejową dodatkowych elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów wibroizolacyjnych. Analiza skuteczności takiej wibroizolacji będzie przedmiotem dalszych badań autorów.

## Literatura

- [1] Andersen L., Nielsen S.R.K.: Vibrations of a track caused by variation of the foundation stiffness, Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 18, 2003, pp. 171-184.
- [2] Au F.T.K., Wang J.J., Cheung Y.K.: Impact study of cable-stayed railway bridge with random rail irregularities, Engineering Structures, vol. 24, no. 5, 2002, pp. 529-541.
- [3] Biondi B., Muscolino G., Sofi A.: A substructure approach for the dynamic analysis of train – track – bridge system, Computers and Structures, vol. 83, 2005, pp. 2271-2281.
- [4] Bryja D., Hołubowski R.: Modelowanie belkowych mostów kolejowych z zastosowaniem metody GFEM. Część I. Sformułowanie teoretyczne, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, seria Budownictwo i Inżynieria Środowiska, nr 283, z. 59, 2012, s. 5-19.
- [5] Bryja D., Hołubowski R.: Losowe zmiany sztywności podsypki w analizie drgań zespolonego mostu kolejowego, Przegląd Komunikacyjny, nr 12, 2013, s. 30-35.
- [6] Bryja D., Hołubowski R.: GFEM modelling and Monte Carlo solutions for railway bridge with random track ballast, Proc. of the Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, 2013, doi:10.4203/ccp.102.21.
- [7] Bryja D., Hołubowski R., Gisterek I.: Railroad vehicle modelling in probabilistic vibration analysis of a railway bridge with randomly fluctuating track ballast stiff-

- ness, Proc. of the 9<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics, EURO DYN 2014, Porto, Portugal, 30<sup>th</sup> June – 2<sup>nd</sup> July 2014 (in print).
- [8] Dahlberg T.: Railway track stiffness variations – consequences and countermeasures, International Journal of Civil Engineering, vol. 8, no. 1, 2010, pp. 1-12.
- [9] Klasztorny M.: Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybko-bieżnymi, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- [10] Sobczyk K., Spencer B.F.: Stochastyczne modele zmęczenia materiałów, PWN, Warszawa 1996.
- [11] Yang Y.B., Yau J.D., Wu Y.S.: Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways, World Scientific, Singapur 2004.
- [12] Yau J.D., Yang Y.B., Kuo S.R.: Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars, Engineering Structures, vol. 21, 1999, pp. 836-844.
- [13] PN-EN 1990:2004/A1:2008 – Podstawy projektowania konstrukcji – Załącznik A2.

## HIGH SPEED EFFECTS IN STOCHASTIC VIBRATION ANALYSIS OF RAILWAY BRIDGE WITH RANDOMLY VARYING BALLAST STIFFNESS

### Summary

The paper is devoted to vibration analysis of railway beam bridge with ballasted track under high-speed train passage. Along track random variations of the ballast stiffness are taken into account in the analysis. The dynamic model of the train, consisting of vehicles with 6 internal degrees of freedom each, is presented, and then, equations of motion of the bridge girder – ballasted track – train system are derived. Time histories of expected values and standard deviations are calculated with the use of Monte Carlo method, on the basis of numerical simulations performed for displacements and accelerations of bridge and track vibrations. Maximal values of these time-dependent probabilistic characteristics are shown on graphs in dependence on the train speed. Basing on an analysis of presented numerical results, the concluding remarks are formulated in order to estimate high speed effects on: a) expected values of bridge and track displacements and accelerations, b) standard deviations being a measure of vibration scattering due to random variations of the ballast stiffness.

**Keywords:** railway bridges, random vibrations, Monte Carlo simulations, probabilistic characteristics, displacement analysis, acceleration analysis

DOI:10.7862/rb.2014.26

*Przesłano do redakcji: 16.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



Jacek JAWORSKI<sup>1</sup>  
Olga SZLACHETKA<sup>2</sup>

## DRGANIA WŁASNE SŁUPÓW W KSZTAŁCIE ŚCIĘTEGO STOŻKA

Przedmiotem analizy jest pierwsza postać drgań własnych (giętnych) słupów o dolnym końcu utwierdzonym, a górnym swobodnym, z materiału jednorodnego i sprężystego. Badane słupy mają kształt ściętego stożka o różnych zbieżnościach ścianek bocznych, od stożka do walca. Metodą energetyczną określono pierwszą częstość drgań własnych, przyjmując różny kształt wychylenia osi podłużnej drgającego słupa, określonej funkcjami: cosinus, kwadratową, sześcienną i linią ugięcia statycznego osi słupa pod działaniem siły poziomej przyłożonej do jego wierzchołka. Otrzymane częstości (względnie okresy drgań) porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych (ANSYS) i z obliczeniami według tablicy Z-2-2 normy PN-77/B-02011. Dobra zgodność wyników występuje jedynie w zakresie małych zbieżności ścianek stożka. Stwierdzono dużą zgodność kształtu linii ugięcia osi podłużnej słupa wychylonej podczas drgań (określonego w programie ANSYS) z kształtem linii ugięcia statycznego słupa (belki wspornikowej) przy obciążeniu ciągłym o wartości stałej i liniowo zmiennej. Przyjęcie takich kształtów deformacji osi drgającego słupa do wyprowadzenia metodą Rayleigh'a wzorów na pierwszą częstość drgań własnych może więc prowadzić do lepszej dokładności wyników (zgodności z obliczeniami MES).

**Słowa kluczowe:** słup stalowy, linia ugięcia, pierwsza częstość drgań własnych

### 1. Okres drgań własnych

Częstości kolejnych postaci drgań własnych belki można otrzymać rozwiązując dla określonych warunków brzegowych równanie drgań belki Bernoulliego–Eulera. W pracy [2] dla belki w kształcie ściętego stożka podano rozwiązanie w postaci funkcji Bessela, a zastąpienie ich wielomianami umożliwiło uży-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Jacek Jaworski, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, 02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159, tel. (22) 5935109, e-mail: jacek\_jaworski@sggw.pl

<sup>2</sup> Olga Szlachetka, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, 02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159, tel. (22) 5935110, e-mail: olga\_szlachetka@sggw.pl

skanie rozwiązań numerycznych. Inne metody i dalsze wyniki rozwiązań dla belek o zmiennych przekrojach poprzecznych omówiono w pracy [3].

Autorzy tej pracy stawiają sobie za cel wyprowadzenie metodą Rayleigh'a przybliżonych wzorów na pierwszą częstość drgań własnych (giętych) słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka. Założono, że amplituda drgań jest mała, materiał jednorodny, izotropowy i idealnie sprężysty, a masa jest rozłożona w sposób ciągły, co prowadzi czasem do dużych trudności przy całkowaniu. Jeśli znajdzie się jednak rozwiązanie zamknięte, uzyskujemy wzór tak prosty, że do obliczenia częstości (lub okresu) drgań wystarczy pod ręczny kalkulator.

W metodzie Rayleigh'a zakłada się kształt wychylenia osi słupa podczas drgań. Przyjęto, że kształt ten jest opisany linią ugięcia statycznego osi słupa pod działaniem siły poziomej, przyłożonej do jego wierzchołka, funkcją trygonometryczną jak we wzorze (1), funkcją kwadratową (2), oraz sześcienną (3).

$$u(h) = f P \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2H} h \right) \quad (1); \quad u(h) = \frac{f P}{H^2} h^2 \quad (2); \quad u(h) = \frac{f P}{H^3} h^3 \quad (3)$$

gdzie:  $u, h$  – współrzędne ( $u$  określa ugięcie,  $h$  – wysokość),

$H$  – wysokość słupa,

$P$  – siła pozioma przyłożona do wierzchołka słupa,

$f$  – przemieszczenie wierzchołka słupa pod działaniem siły  $P = 1$ .

Przy założeniu, że wychylona podczas drgań oś słupa w kształcie ściętego stożka ma kształt linii ugięcia statycznego pod działaniem siły skupionej  $P$ , okres drgań wyrażony jest wyprowadzonym w pracy [4] wzorem

$$T = \frac{4\pi H^2}{d} \sqrt{\frac{\rho \left( 1,8n^7 + 2,1n^6 + 1,8n^5 - 18n^4 + 23n^3 - 15,3n^2 + 5,4n - 0,8 - 6n^6 \ln n \right)}{3E(n-1)^7 n^3}} \quad (4)$$

gdzie kształt osi opisany jest wzorem (1), okres drgań [6] wynosi

$$T = \frac{4H^2}{d} \sqrt{\frac{2\rho}{3\pi E n^3} \left[ \pi^3 (n^2 + n + 1) - 8\pi^2 - 2\pi(15n - 1)(n - 1) + 64(n - 1)^2 \right]} \quad (5)$$

a dla kształtu osi opisanego wzorami (2) i (3), okres drgań wynosi

$$T = \frac{8\pi H^2}{3d} \sqrt{\frac{\rho (n^2 + 5n + 15)}{35E n^3}} \quad (6); \quad T = \frac{4\pi H^2}{3d} \sqrt{\frac{\rho (n^2 + 7n + 28)}{21E n^3}} \quad (7)$$

gdzie:  $T$  – okres drgań,

$\rho$  – gęstość masy,

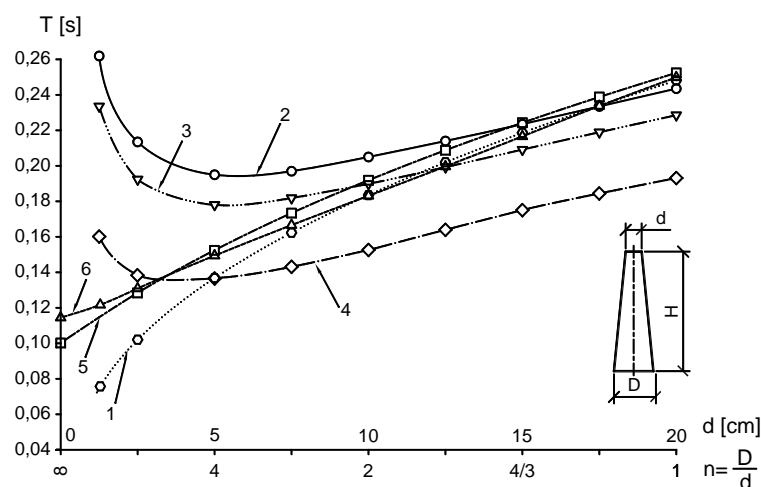
$E$  – moduł sprężystości podłużnej,

$n$  – iloraz średnic słupa: dolnej  $D$  i górnej  $d$ ;  $n = \frac{D}{d}$ .

Warto zauważyć, że w żadnym z powyższych przypadków nie można wyznaczyć okresu drgań słupa w kształcie stożka, bo wyrażenie na ugięcie wierzchołka stożka przyłożoną do niego siłą poprzeczną nie ma sensu matematycznego. Okres drgań walca nie może być traktowany jako przypadek szczególny okresu drgań ściętego stożka; wzory dla walca są wyprowadzane oddzielnie.

Na rysunku 1 porównano okresy drgań własnych stalowych słupów w funkcji zbieżności ścianek bocznych stożka, określonych parametrem  $n$ . Obliczenia wykonano dla słupów stalowych o wysokości  $H = 6$  m, średnicy podstawy  $D = 20$  cm i średnicach głowicy od  $d = 0$  (stożek) do  $d = 20$  cm (walec).

Wyniki obliczeń MES w programie ANSYS są bardzo bliskie wynikom pracy [2] i obliczeniom według tablicy Z-2-2 normy PN-77/B-02011 [7]. Obliczenia według wzorów 4 i 5 cechuje dobra zgodność z MES w zakresie małych zbieżności stożka, przy dużych wartościach parametru  $n$  wyniki są niezgodne. Wzory (6) i (7), a szczególnie (7) gorzej odzwierciedlają wyniki obliczeń MES.



Rys. 1. Porównanie okresów drgań obliczonych: 1– według wzoru (4), 2– według (5), 3– według (6), 4– według (7), 5– MES (ANSYS), 6– według PN-77/B-02011

Fig. 1. Comparison of natural periods calculated: 1– by eq. (4), 2– by eq. (5), 3– by eq. (6), 4– by eq. (7), 5– using FEM (ANSYS), 6– according to the standard PN-77/B-02011

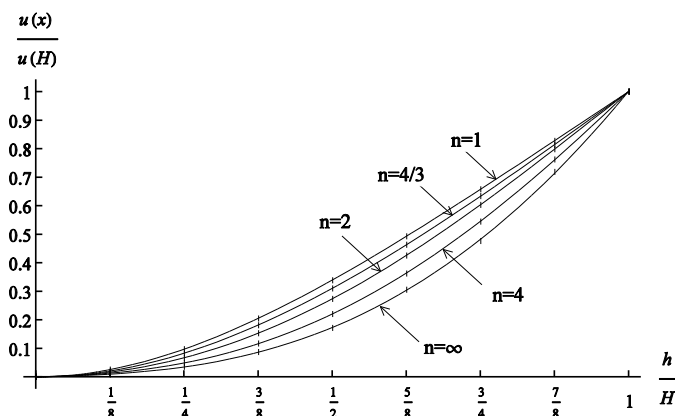
Wzory (4÷7) można – przy niewielkiej modyfikacji – wykorzystać do słupów w kształcie ostrosłupa ściętego prawidłowego i dla szczególnego przypadku rury

stożkowej, gdy tworzące stożka zewnętrznego i wewnętrznego (otworu) przecinają się w jednym punkcie na osi stożka [4]. Natomiast próba wyprowadzenia wzoru analogicznego do (4) dla słupa w kształcie współosiowo wydrążonego ściętego stożka, prowadzi do znacznych trudności obliczeniowych [5].

## 2. Kształt linii ugięcia osi słupa

### 2.1. Wyniki obliczeń w programie ANSYS

Im dokładniej w obliczeniach metodą Rayleigh'a przyjmujemy kształt linii wychylenia osi drgającego słupa, tym dokładniejsze będą wyniki obliczenia częstości i okresu drgań [1]. Ponieważ nie jest znany rzeczywisty kształt osi drgającego słupa, jako podstawę do oceny analizowanych linii odkształcenia przyjęto wyniki obliczeń MES (z programu ANSYS), które pokazano na rys. 2. Odnosząc ugięcia na danej wysokości do ugięcia wierzchołka słupa, a wysokości do wysokości słupa, otrzymano wykresy dla wartości bezwymiarowych. Poszczególne krzywe dotyczą różnych zbieżności ścianek stożka.



Rys. 2. Kształt wychylenia osi drgającego słupa określony MES (ANSYS)

Fig. 2. Deflection form of the column axis during the vibration determined by FEM (ANSYS)

### 2.2. Badane przypadki ugięcia statycznego

Określono kształty linii ugięcia odwzorowujących słupy belek wspornikowych w kształcie ściętego stożka, pod statycznie działającym obciążeniem. Uwzględniono siłę skupioną przyłożoną do swobodnego końca (rys. 3a), obciążenie ciągłe o stałej wartości (rys. 3b) i obciążenie ciągłe liniowo zmienne, proporcjonalnie do zmiany średnicy pręta (rys. 3c). Ugięcia policzono całkując równania różniczkowe osi odkształconej pręta. Średnicę pręta i moment bezwładności przekroju wyrażono w funkcji współrzędnej  $x$

$$D(x) = d + \frac{D-d}{H}x \quad (8); \quad J(x) = \frac{\pi D^4(x)}{64} \quad (9)$$

Momenty gnące dla kolejnych przypadków z rysunku 3a, 3b i 3c wyrażono jako

$$M(x) = -Px \quad (10); \quad M(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad (11) \quad M(x) = -\frac{qx^2}{6D}(ax+3d) \quad (12)$$

i wstawiono do równania różniczkowego osi ugiętej

$$EJ(x) \frac{d^2u}{dx^2} = -M(x) \quad (13)$$

wprowadzając w celu uproszczenia zapisu podstawienie

$$a = \frac{D-d}{H} = (n-1) \frac{d}{H} \quad (14)$$

gdzie:  $x, u$  – współrzędne ( $u$  określa ugięcie),

$P$  – siła skupiona,

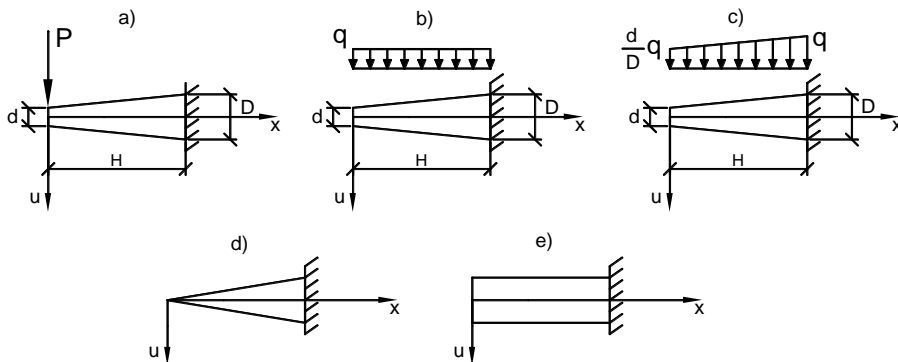
$q$  – obciążenie ciągłe,

$d, D$  – średnice pręta,

$H$  – długość pręta,

$J$  – moment bezwładności przekroju,

$M$  – moment zginający.



Rys. 3. Belki wspornikowe: a) obciążenie siłą skupioną na swobodnym końcu, b) obciążenie ciągłe stałe, c) obciążenie ciągłe liniowo zmienne, d), e) przypadki szczególne

Fig. 3. Cantilever beams: a) concentrated load on the free end, b) uniformly loaded, c) linear variable continuous load, d), e) special cases

Dla obciążenia siłą skupioną przyłożoną do swobodnego końca pręta (jak na rysunku 3a) otrzymano po scałkowaniu zależność

$$u = \frac{32P}{\pi E a^2 D^2} \left[ \frac{3D-2d}{3D} (x-H) \right] + \frac{32P}{\pi E a^3} \left[ \frac{d-3D}{3D^2} + \frac{1}{ax+d} - \frac{d}{3(ax+d)^2} \right] \quad (15)$$

dla obciążenia ciągłego o stałej wartości (jak na rysunku 3b) równanie

$$u = \frac{32q}{\pi E} \left[ \frac{3D^2 - 3Dd + d^2}{3a^3 D^3} (x-H) \right] + \frac{32q}{\pi E a^4} \left[ \ln \frac{D}{ax+d} + \frac{d}{D} - \frac{d^2}{6D^2} - \frac{d}{ax+d} + \frac{d^2}{6(ax+d)^2} \right] \quad (16)$$

a dla obciążenia ciągłego liniowo zmiennego, jak na rysunku 3c, wzór

$$u = \frac{32qx}{\pi E D^4 a^4 H} \left[ \frac{D^4}{3} - \frac{D^3 d}{3} - \frac{D^2 d^2}{2} + \frac{13Dd^3}{18} - \frac{2d^4}{9} + \frac{D^3 d - D^4}{3} \ln D \right] + \frac{32q}{\pi E D^4 a^4} \left[ \frac{D^4}{3} - \frac{D^3 d}{6} + D^2 d^2 - \frac{5Dd^3}{6} + \frac{2d^4}{9} - \frac{1}{3} D^3 d \ln D + \frac{D^3 d^3}{6(ax+d)^2} - \frac{D^3 d^2}{ax+d} - D^3 d \ln(ax+d) \right] + \frac{32q}{\pi E D^4 a^4} \left[ \frac{D^3 a^4 x^4}{18d(ax+d)^2} - \frac{D^3 d^3}{9(ax+d)^2} - \frac{D^3 a^2 x^2}{18d} - \frac{5}{9} D^3 ax - \frac{D^3 d}{3} + \frac{13D^3 d^2}{18(ax+d)} + \frac{D^3}{3} (ax+4d) \ln(ax+d) \right] \quad (17)$$

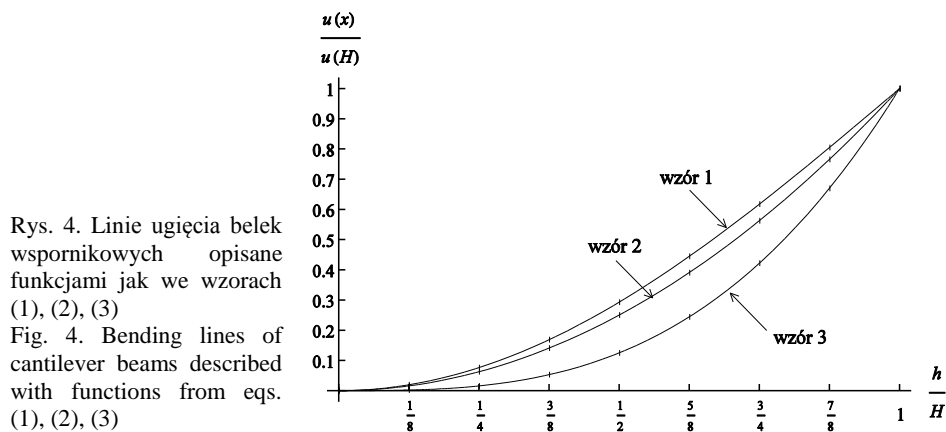
W przypadku obciążenia belki siłą skupioną  $P$  przyłożoną na jej swobodnym końcu lub obciążeniem ciągłym o stałej wartości  $q$ , rozwiązanie dla ugięcia swobodnego końca pręta w kształcie stożka nie istnieje. Natomiast dla przypadku obciążenia ciągłego liniowo zmiennego jak na rysunku 3d, przyłożonego do słupa w kształcie stożka, gdy  $x$  dąży do 0, ugięcie dąży do wartości

$$u = \frac{32qH^4}{3\pi E D^4} \quad (18)$$

Ugięcia belek w kształcie walca (rys. 3e) nie są przypadkiem szczególnym rozwiązań dla ściętego stożka i policzone zostały oddzielnie. Dla obciążenia ciągłego o stałej wartości  $q$ , ugięcie wyrażone jest jako

$$u = \frac{8q}{3\pi ED^4} \left( 3H^4 - 4H^3x + x^4 \right) \quad (19)$$

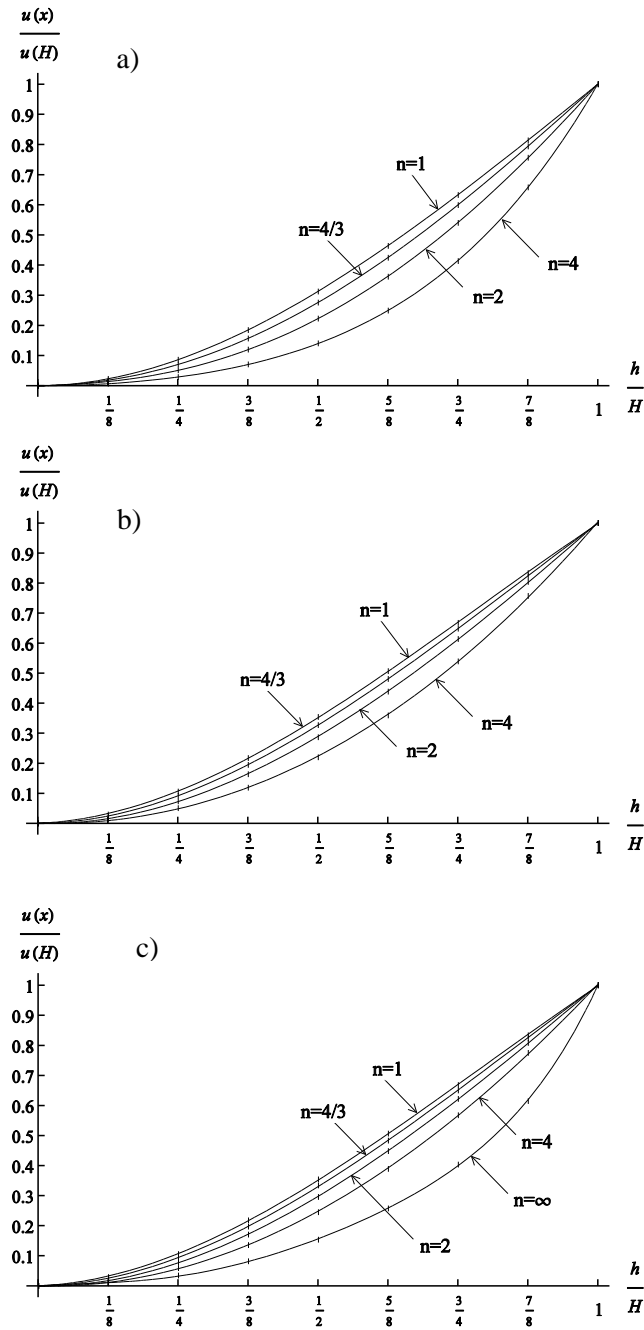
Linie ugięcia belek pokazano na rysunkach 4 i 5. Kolejne wykresy na rysunku 5 odnoszą się do różnych sposobów obciążenia belki. Porównując kształt tych linii z wyznaczonym metodą elementów skończonych kształtem osi drgającego słupa, pokazanym na rysunku 2, można ocenić, dla którego z obciążeń linie ugięcia najlepiej odwzorowują kształt wychylonej osi drgającego słupa.



### 2.3. Ocena zgodności kształtu linii ugięcia z kształtem wychylenia osi słupa podczas drgań swobodnych

W celu oceny, jak blisko położone są linie ugięcia względem wychylonej osi drgającego słupa wprowadzono wskaźnik podobieństwa  $w$  (wzór 20), będący pierwiastkiem z sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami bezwymiarowego ugięcia statycznego i bezwymiarowych rzędnych linii wychylenia osi drgającego słupa, określonej w programie ANSYS. Zsumowano wartości dla ośmiu punktów rozłożonych równomiernie na wysokości słupa i dla słupów o czterech różnych zbieżnościach ścianek stożka ( $n = 1$ ,  $n = 4/3$ ,  $n = 2$ ,  $n = 4$ ). Im niższa wartość wskaźnika, tym mniejsze różnice pomiędzy krzywymi.

$$w = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left[ \sum_{j=1}^8 (u - u_{MES})^2 \right]} \quad (20)$$



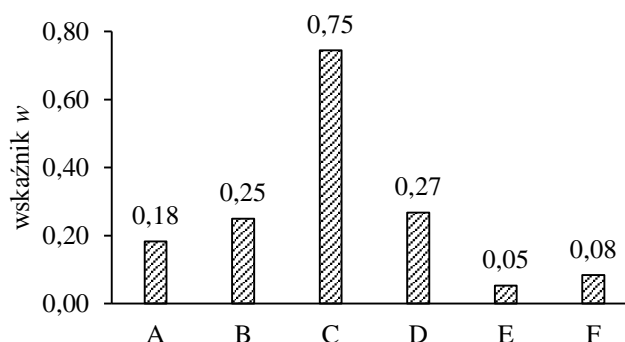
Rys. 5. Linie ugięcia belek wspornikowych: a) przy obciążeniu siłą skupioną na swobodnym końcu, b) przy obciążeniu ciągłym stałym, c) przy obciążeniu ciągłym liniowo zmiennym

Fig. 5. Bending lines of cantilever beams: a) by concentrated load on the free end, b) uniformly loaded, c) by linear variable continuous load

Wskaźnik podobieństwa dla różnych krzywych ugięcia porównano na rys. 6. Linie ugięcia określone funkcją trygonometryczną i zależnością kwadra-



tową lub sześcienną są niezależne od zbieżności ścianek bocznych słupa, nie mogą więc dobrze opisywać kształtu osi drgającej słupów o różnych zbieżnościach ścianek bocznych. Wskaźniki podobieństwa przyjmują dla nich wysokie wartości. Także linia ugięcia belki wspornikowej pod działaniem siły skupionej przyłożonej do swobodnego końca pręta znacznie odbiega od kształtu osi drgającej a wskaźnik podobieństwa ma niekorzystnie dużą wartość. Niską wartość wskaźnika stwierdzono dla linii ugięcia pod obciążeniem ciągłym o stałej wartości i stosunkowo niską wartość dla obciążenia ciągłego liniowo zmiennego.



Rys. 6. Wskaźniki podobieństwa dla krzywych opisanych: A) funkcją trygonometryczną według wzoru (1), B) funkcją kwadratową według (2), C) funkcją sześcienną według (3), D) linią ugięcia pod działaniem siły skupionej według wzoru (15), E) linią ugięcia przy stałym obciążeniu ciągłym według (16), F) linią ugięcia przy obciążeniu ciągłym liniowo zmiennym według (17)

Fig. 6. Similarity index for curves described with: A) trigonometric function (eq. 1), B) second-degree function (eq. 2), C) third-degree function (eq. 3), D) bending line by concentrated load on the free end according to eq. (15), E) deflection line by uniform load (eq. 16), F) deflection line by linear variable continuous load (eq. 17)

### 3. Wnioski

Można się spodziewać, że dobrą zgodność wyników z obliczeniami metodą elementów skończonych otrzymamy wtedy, kiedy do wyprowadzenia metodą Rayleigh'a wzoru na pierwszą częstość drgań własnych słupów wspornikowych w kształcie ściętego stożka przyjmiemy wychylenia osi drgającej słupa w postaci linii ugięcia pod działaniem obciążenia ciągłego o stałej wartości, jak na rysunku 3b.

Interesujące byłoby też wyprowadzenie wzorów z założeniem kształtu osi drgającego słupa w postaci linii ugięcia pod działaniem obciążenia stałego liniowo zmiennego (jak na rysunku 3c), gdyż uzyskalibyśmy wtedy możliwość obliczenia pierwszej częstości drgań własnych słupa w kształcie stożka.

## Podziękowanie

Autorzy serdecznie dziękują dr. inż. Janowi Grudzińskiemu za wykonanie obliczeń w programie ANSYS.

## Literatura

- [1] Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J.T.: Drgania układów fizycznych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008, s. 314-317.
- [2] Conway H.D., Dobil J.F.: Vibration Frequencies of Truncated-Cone and Wedge Beams, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol. 32 (4), 1965, s. 932-934.
- [3] Ece M.C., Aydogdu M. Taskin V.: Vibration of variable cross-section beam, *Mechanics Research Communications (Elsevier)*, 34, 2007, s. 78-84.
- [4] Jaworski J., Boniecka M., Nycz M.: Obliczanie pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych o zmiennym przekroju poprzecznym, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 8 (1-2), 2009, s. 3-20.
- [5] Jaworski J.: O pewnej metodzie obliczania pierwszej częstości drgań własnych słupów stalowych w kształcie wydrążonego ściętego stożka, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 9 (3), 2010, s. 3-15.
- [6] Jaworski J.: Pierwsza częstość drgań własnych słupów w kształcie wydrążonego ściętego stożka, *Acta Scientiarum Polonorum Architectura*, nr 12 (1), 2013, s. 37-50.
- [7] PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenia wiatrem.

## FREE VIBRATION OF TRUNCATED-CONE COLUMNS

### Summary

The topic of this study is the form of deflection line in the first mode of natural transverse vibration of homogenous and elastic columns with clamped bottom and free head. The columns are shaped as truncated-cones with different inclination of lateral faces, from cylinder to cone. The first frequency of free vibration was determined by the energy method. The deflection line of a column axis during the vibration was assumed in forms of the cosine function, second-degree or third-degree function and bending line of a column axis by concentrated load acting on the free end. Resulting frequencies (or periods) were compared with these obtained using FEM (program ANSYS) and calculated according to the table Z-2-2 of the standard PN-77/B-02011. A good consistency of the deflection line of vibrated column determined using the program ANSYS with the form of a static bending line of cantilever beam by uniform load and by linear variable continuous load was observed. Assuming such forms of axis deformation during the vibration of columns in the derivation of formulas for the first natural frequency by Rayleigh's method can lead to a better accuracy of results (better accordance with the FEM).

**Keywords:** steel column, bending line, first natural frequency

DOI:10.7862/rb.2014.27

*Przesłano do redakcji: 28.04.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Marcin KAMIŃSKI<sup>1</sup>

Jacek SZAFRAN<sup>2</sup>

## STOCHASTYCZNA ANALIZA DRGAŃ WYMUSZONYCH STALOWYCH WIEŻ TELEKOMUNIKACYJNYCH

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest udokumentowanie analizy komputerowej drgań wymuszonych stalowych wież telekomunikacyjnych wywołanych porywami wiatru przy pomocy Stochastycznej Metody Elementów Skończonych. Metoda ta jest oparta o rozwinięcie wszystkich funkcji losowych w szereg Taylora ogólnego rzędu i wyznaczenie stochastycznej odpowiedzi konstrukcji na gaussowski wejściowy losowy parametr projektowy konstrukcji. Zagadnienie drgań wymuszonych jest rozwiązane numerycznie przy pomocy programu Metody Elementów Skończonych ROBOT Professional, natomiast funkcje odpowiedzi wyznaczono symbolicznie w środowisku algebry komputerowej MAPLE, gdzie zaimplementowano również algorytm wyznaczania charakterystyk losowych odpowiedzi konstrukcji. Deterministyczna postać funkcji odpowiedzi zostaje określona analitycznie z użyciem Metody Najmniejszych Kwadratów i ciągu rozwiązań MES wyznaczonych dla wejściowego parametru losowego zmieniającego wartość wokół swojej wartości oczekiwanej. Testowanym parametrem losowym jest średnia prędkość wiatru, którego ciśnieniem obciążamy modelowaną konstrukcję. Metodę zaproponowaną poniżej można z powodzeniem zastosować do obliczania wskaźnika niezawodności konstrukcji z parametrami losowymi poddanymi drganiom wymuszonym o zadanych deterministycznych widmach obciążeń.

**Słowa kluczowe:** Stochastyczna Metoda Elementów Skończonych, konstrukcje stalowe, wieże telekomunikacyjne

### 1. Wprowadzenie

Niezawodność wież telekomunikacyjnych jest zagadnieniem kluczowym dla bezpieczeństwa transmisji telefonii komórkowej i zależy od wielu czynni-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Marcin Kamiński, Katedra Mechaniki Konstrukcji, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka, 90-924 Łódź, Al. Politechniki 6, tel. 669 001 636, e-mail: Marcin.Kaminski@p.lodz.pl

<sup>2</sup> Jacek Szafran, Katedra Mechaniki Konstrukcji, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka, 90-924 Łódź, Al. Politechniki 6, tel. 669 001 636, e-mail: Jacek.Szafran@p.lodz.pl

ków, zarówno materiałowych, konstrukcyjnych, jak też i pogodowych.

Wieże telekomunikacyjne wykorzystywane przez operatorów telefonii cyfrowej jako konstrukcje wsporcze dla nowoczesnego sprzętu nadawczo-odbiorczego w większości przypadków wykonywane są ze stali. Jakkolwiek wieże stalowe [15] zabezpiecza się antykorozyjnie najczęściej poprzez ocynkowanie na gorąco, to ulegają one procesom korozji w różnym stopniu i z różnym nasileniem w czasie w zależności od wilgotności powietrza i jego zanieczyszczenia. Losowość tego procesu jest jednakże różna dla rozmaitych lokalizacji, wpływa na zmiany wskaźnika niezawodności w funkcji czasu eksploatacji, stąd też została ona pominięta w modelu obliczeniowym.

Imperfekcje materiałowe i geometryczne były już przedmiotem wcześniejszego stochastycznego modelowania komputerowego [14], stąd też zasadniczą uwagę poświęcono w niniejszym artykule losowym zmianom obciążenia wiatrem jako najbardziej naturalnego źródła losowości w eksploatacji tych konstrukcji. Celem analizy jest zweryfikowanie, w jakim stopniu losowy charakter ciśnienia wiatrem wpływa na parametry losowe odpowiedzi konstrukcji branej pod uwagę przy wyznaczaniu wskaźnika niezawodności w podstawowych stacjach granicznych, tj. dla maksymalnej siły osiowej w krawężnikach przy fundamencie oraz dla przemieszczeń poziomych wierzchołka samej wieży. Przedstawione poniżej zagadnienie jest również ciekawe z matematycznego i numerycznego punktu widzenia, jako że dotyczy dynamiki układu o skończonej liczbie swobody obciążonego obciążeniem losowym, którego odpowiedź chcemy znaleźć przy pomocy Stochastycznej Metody Elementów Skończonych zrealizowanej na bazie uogólnionej metody perturbacji stochastycznej, a której zastosowanie do analizy konstrukcji stalowych było przedmiotem wcześniejszych analiz [17]. Jak wiadomo, metoda ta oparta jest o rozwijanie w szereg Taylora wszystkich losowych parametrów wejściowych i wyjściowych konstrukcji, dalszym wyprowadzeniu odpowiednich równań perturbacyjnych dla momentów i charakterystyk odpowiedzi, a także na odpowiednim wykorzystaniu do ich obliczenia testów numerycznych wykonanych z użyciem programu Metody Elementów Skończonych (MES) [1,2].

W pracy posługujemy się Metodą Funkcji Odpowiedzi (MFO), podobną do Metody Powierzchni Odpowiedzi (MPO) [8], która pozwala nam na uzależnienie parametrów stanu takich jak przemieszczenie, czy naprężenie pochodzące od ciśnienia wiatru za pomocą wielomianu dowolnego rzędu (niekoniecznie niższego, jak miało to miejsce w przypadku MPO). Wielomian ten jest wynikiem wykonania szeregu modeli MES dla konstrukcji ze zmieniającą się wielkością ciśnienia wiatru (pakiet MES ROBOT Professional) i wykonaniem Metodą Najmniejszych Kwadratów (MNK) odpowiednich aproksymacji wielomianowych (środowisko algebry komputerowej MAPLE) [3,7]. Wzory na charakterystyki losowe zostały również zaimplementowane w programie MAPLE jako odpowiadające metodzie perturbacji rzędów drugiego, czwartego, szóstego i ósmego; umożliwiając one wyznaczenie wartości oczekiwanych, współczynnika wariancji,

skośności oraz kurtozy dla poszukiwanych przemieszczeń i sił wewnętrznych w modelowanej wieży. Z pewnością tak opracowany aparat numeryczny pozwala na wyznaczenie wskaźnika niezawodności stałego [11] lub zmiennego w czasie [16], a także, w dalszym aspekcie, na weryfikację bezpieczeństwa użytkowania takich konstrukcji w aspekcie pożarowym, czy też przy nasilającej się korozji.

## 2. Model matematyczny

Jak wiadomo, metoda perturbacji stochastycznej oparta jest o rozwinięcie wszystkich funkcji losowych w szereg Taylora rzędu wymaganego dokładnością obliczeń wokół wartości średniej danej funkcji obliczonej dla wartości średniej wejściowego parametru losowego. W takim sformułowaniu założenie gaussowskości wejściowego rozkładu losowego nie jest konieczne, gdyż możemy stosować takie podejście również dla rozkładów niesymetrycznych. Rozwinięcie to dla losowej siły w krawężniku zależnej od prędkości średniej wiatru  $F(v)$  ma postać [7]

$$F(v(\omega)) = F^0(v^0(\omega)) + \varepsilon \frac{\partial F(v(\omega))}{\partial v} \Big|_{v=v^0} \Delta v + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n F(v(\omega))}{\partial v^n} \Big|_{v=v^0} \Delta v^n \quad (1)$$

gdzie:  $\varepsilon$  – zastosowany parametr perturbacyjny (może być równy 1 lub należeć do pewnego bliskiego otoczenia tego argumentu),

$\omega$  – oznaczenie parametru lub funkcji losowej,

$(\cdot)^0$  – wartość średnia parametru lub funkcji  $(\cdot)$ ,

$n$  – rząd rozwinięcia w metodzie perturbacji,

$\Delta v$  – różnica wartości parametru  $v$  i jego wartości średniej (wariacja).

Wariacja  $n$ -tego rzędu wejściowego parametru losowego jest określana jako

$$\varepsilon^n \Delta v^n = (\delta v)^n = \varepsilon^n (v - v^0)^n \quad (2)$$

Uwzględniając takie rozwinięcie w klasycznych wzorach całkowych rachunku prawdopodobieństwa [9] można przez całkowanie poszczególnych członów perturbacyjnych wyprowadzić odpowiednie wzory analityczne na centralne momenty probabilistyczne niższych rzędów (np. do czwartego włącznie). Dla wartości oczekiwanej funkcji  $F(v)$  z równania 1 przy założeniu symetrycznego rozkładu prawdopodobieństwa parametru  $v$  otrzymujemy np., iż

$$E[F(v)] = F^0(v^0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 (F(v))}{\partial v^2} \Big|_{v=v^0} \mu_2(v) + \frac{1}{4!} \varepsilon^4 \frac{\partial^4 (F(v))}{\partial v^4} \Big|_{v=v^0} \mu_4(v) + \frac{1}{6!} \varepsilon^6 \frac{\partial^6 (F(v))}{\partial v^6} \Big|_{v=v^0} \mu_6(v) + \dots + \frac{1}{(2m)!} \varepsilon^{2m} \frac{\partial^{2m} (F(v))}{\partial v^{2m}} \Big|_{v=v^0} \mu_{2m}(v) \quad (3)$$

gdzie:  $\mu_{2m}(v)$  - centralny moment probabilistyczny rzędu  $2m$  wielkości  $v$ ,  
 $m$  – dowolna liczba naturalna.

Kluczowym problemem rozwinięcia jest wiarygodne (w sensie numerycznym) wyznaczenie pochodnych, szczególnie wyższego rzędu, dla funkcji  $F(v)$  względem parametru  $v$ . Są one co prawda wyznaczane jak dla funkcji deterministycznych, ale MNK zawiera w sobie optymalne dopasowanie samej funkcji, a nie - jej pochodnych. W przeciwieństwie do ogólnie znanego rozwiązania tego problemu uzyskanego z wykorzystaniem Metody Różniczkowania Bezpośredniego stosujemy tutaj Metodę Funkcji Odpowiedzi, gdzie z góry zakładamy wielomianową funkcję odpowiedzi o nieznanymi współczynnikami, które ustala się za pomocą ciągu eksperymentów numerycznych przeprowadzonych z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych. Zakładamy więc niezależnie dla sił w prętach oraz przemieszczeń węzłowych, iż

$$\mathbf{F}(v(t)) = \mathbf{A}_m(t)v^m(t), \quad \mathbf{q}(v(t)) = \mathbf{B}_n(t)v^n(t), \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{F}$  – wektor sił wewnętrznych w prętach konstrukcji,

$\mathbf{q}$  – wektor przemieszczeń węzłowych w modelu,

$\mathbf{A}_m$  – macierz współczynników wielomianowej statycznej funkcji odpowiedzi,

$\mathbf{B}_n$  – macierz współczynników wielomianowej kinematycznej funkcji odpowiedzi,

$t$  – parametr czasu.

Powyższe równanie umożliwia analityczne wyprowadzenie wzorów na wszystkie niezbędne centralne momenty losowe (podobnie jak dla momentów zwykłych dowolnego rzędu) przed podjęciem rozwiązania problemu stochastycznego. Oczywiście macierze współczynników odpowiednich rozwinięć wielomianowych są wyznaczane w każdym elemencie skończonym oraz, niezależnie, w każdym węźle, a także oddzielnie – dla wszystkich dyskretnych chwil w czasie. W praktyce rzędy rozwinięć wielomianowych mogą różnić się dla różnych rodzajów odpowiedzi konstrukcji; możliwa jest również każdorazowa optymalizacja rzędu rozwinięcia ze względu np. na korelację punktów próbkowych z przybliżeniem uzyskanym Metodą Najmniejszych Kwadratów. Inną możliwością jest zastosowanie Nieliniowej Metody Najmniejszych Kwadratów, jak też – ważonej wersji dla obydwu z tych podejść.

### 3. Zastosowanie Metody Elementów Skończonych

W analizie związanej z Metodą Elementów Skończonych rozważamy dyskretną aproksymację nieznaną historią ciągłej w czasie i przestrzeni funkcji

przemieszczeń za pomocą wartości węzłowych w dyskretnych punktach siatki jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t), \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – wektor historii przemieszczeń w układzie ciągłym,  
 $\mathbf{q}(t)$  – wektor przemieszczeń węzłowych w modelu,  
 $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  – macierz funkcji kształtu.

Jak wiadomo, Metoda Funkcji Odpowiedzi [7] wprowadza serie rozwiązań zarówno o charakterze ciągłym, jak i dyskretnym, które łączy ze sobą niezależny od czasu zbiór funkcji kształtu. Mamy więc

$$\mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (6)$$

gdzie:  $M$  – liczba niezależnych testów MES do utworzenia funkcji odpowiedzi.

Oczywiście  $M$  musi być większe niż rząd aproksymowanego wielomianu. Analogicznie aproksymujemy składowe tensora odkształcenia jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(\alpha)}(t), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (7)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$  – ciąg tensorów odkształceń do utworzenia funkcji odpowiedzi,  
 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  – macierz pochodnych funkcji kształtu.

Stosujemy taki opis w klasycznym sformułowaniu wariacyjnym odniesionym do przemieszczeń, które w stosowanym podejściu jest równoważne ciągowi równań wariacyjnych przy  $\alpha = 1, \dots, M$  uzyskując

$$\delta \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \mathbf{M}^{(\alpha)} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^{(\alpha)} \mathbf{K}^{(\alpha)} \mathbf{r}^{(\alpha)} + \mathbf{R}^{(\alpha)T} \mathbf{r}^{(\alpha)} \right] dt = 0, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{R}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$  – ciąg wektorów historii obciążeń węzłowych,  
 $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{K}^{(\alpha)}$  – ciągi macierzy mas i sztywności w MES.

Powszechnie definiujemy te macierze jako

$$\mathbf{M}^{(\alpha)} = \int_{\Omega} \rho^{(\alpha)} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega \quad \mathbf{K}^{(\alpha)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}^{(\alpha)} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (9)$$

Ponieważ wektor prędkości wiatru jest zmienną losową w rozważanym problemie, tak więc równanie 7 można uprościć do następującej postaci:

$$\delta \int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^{(\alpha)} \mathbf{K} \mathbf{r}^{(\alpha)} + \mathbf{R}^{(\alpha)T} \mathbf{r}^{(\alpha)} \right] dt = 0, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (10)$$

gdzie:  $\delta u$  – wariacja funkcji przemieszczeń  $u$ ,  
 $t_0, t_k$  – czas początkowy i końcowy rozpatrywanych drgań.

Dalsze całkowanie powyższego równania po czasie pozwala na zapis:

$$\dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \mathbf{M} \delta \dot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} - \int_{t_0}^{t_k} \left( \ddot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} \mathbf{M} + \mathbf{q}^{(\alpha)} \mathbf{K} - \mathbf{R}^{(\alpha)T} \right) \delta \mathbf{q}^{(\alpha)} dt = 0. \quad (11)$$

Mając na względzie zerowanie się wariacji w chwili początkowej oraz końcowej

$$\delta \mathbf{q}(t_0) = 0, \quad \delta \mathbf{q}(t_k) = 0, \quad (12)$$

otrzymujemy zasadę stacjonarności w postaci ogólnie znanych równań ruchu [2,6]

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} + \mathbf{K} \mathbf{q}^{(\alpha)} = \mathbf{R}^{(\alpha)}. \quad (13)$$

Alternatywne metody rozwiązania tego zagadnienia przy pomocy metody perturbacji rzędu drugiego w ujęciu różniczkowania bezpośredniego można znaleźć w pracy [10], a także przy pomocy metod nie wykorzystujących metod perturbacji w pracach [4,9,12,13].

#### 4. Analiza numeryczna

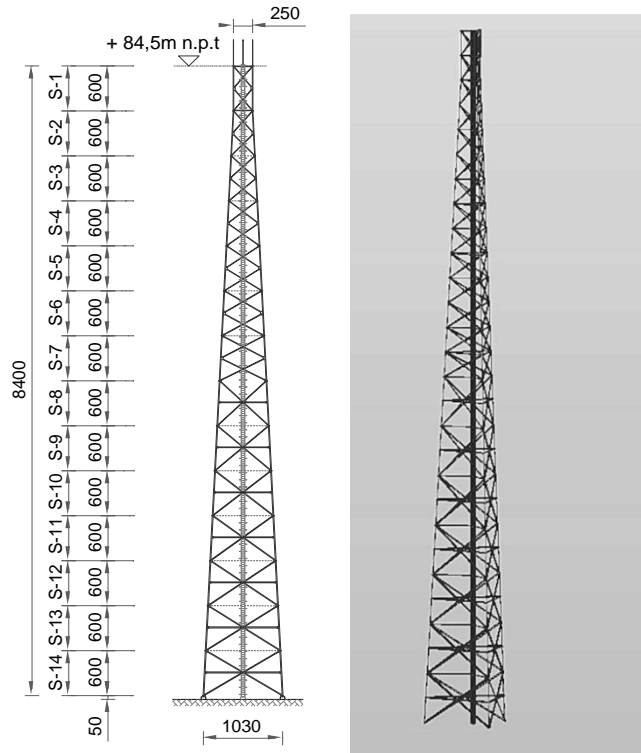
Modelowanie komputerowe przeprowadzono przy pomocy programu MES ROBOT Professional, a także, niezależnie, pakietu do obliczeń symbolicznych MAPLE, wersja 14. Konstrukcję analizowanej stalowej wieży pokazanej na rys. 1, której pojedynczy segment na wysokości fundamentu pokazano na rys. 2; wszystkie elementy konstrukcyjne wykonano w postaci okrągłych prętów pełnych (krawężniki wieży) oraz kątowników gorącowalcowanych równoramiennych i nierównoramiennych (elementy skratowania) ze stali S235. Trójwymiarową dyskretyzację całej wieży na potrzeby MES wykonano przy użyciu 410 dwuwęzłowych elementów belkowych do analizy deformacji giętych, a także 28 dwuwęzłowych elementów kratowych; łącznie wprowadzono 233 węzły i 1374 stopni swobody. Całkowanie równań ruchu przeprowadzono w każdym teście do Metody Funkcji Odpowiedzi zgodnie z algorytmem Hilbera-Hughesa-Taylor'a [6] wprowadzając krok czasowy  $\Delta t = 1$  sek, parametr  $\alpha = -0.3$ , podział na



100 przyrostów i przedział czasowy 700 sekund. Zgodnie z danymi materiałowymi istniejącej konstrukcji przyjęto moduł Younga równy  $E=210$  GPa, a także współczynnik Poissona wynoszący odpowiednio  $\nu=0.30$ .

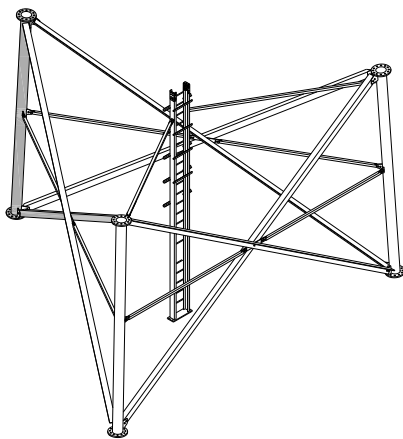
Pominięto w analizie efekty nieliniowości geometrycznych, materiałowych, dopuszczany w tego typu konstrukcjach wpływ oblodzenia, a także zmian własności wytrzymałościowych stali związanych z ewentualnymi fluktuacjami temperatury. Połączenia pomiędzy poszczególnymi segmentami wieży potraktowano jako idealnie sztywne ze względu na ich kołnierzowy kształt oraz ilość łączników śrubowych. Podobnie modelowano połączenia prętów skratowania z krawężnikami ze względu na rozkład i ilość śrub w złączu. Modelowanie obciążenia wiatrem zostało wykonane na podstawie danych pomiarowych zmienności prędkości wiatru w czasie uśredniania 10 minut podanych w [5]. Wartości obciążenia wiatrem uwzględniały również opór aerodynamiczny analizowanej konstrukcji. Jak wynika ze skali osi pionowej wykresu na rys. 3, maksymalne wartości tej prędkości znacznie przekraczają wartość bazową braną pod uwagę w obliczeniach zastępczego ciśnienia statycznego w pierwszej strefie obciążenia wiatrem. Wejściowym parametrem losowym jest prędkość wiatru, która ma rozkład prawdopodobieństwa Gaussa, zmiany wartości oczekiwanej w czasie zaczerpnięte zostały z danych przykładowych rejestracji silnych wiatrów, natomiast współczynnik wariancji jest dodatkowym parametrem wejściowym w modelu. W celu weryfikacji probabilistycznej zbieżności metody perturbacji wykonano analizę rzędu drugiego, czwartego, szóstego i ósmego przedstawiając w dalszej części uzyskane momenty losowe w funkcji rzędu zastosowanej metody perturbacji.

W wyniku deterministycznego modelowania komputerowego określono kolejno zmiany w czasie ekstremalnej siły podłużnej w krawężniku dolnego segmentu (rys. 4), w sąsiednim elemencie skratowania (rys. 5), a także zmiany w czasie przemieszczenia poziomego wierzchołka wieży (rys. 6); wybór tych wielkości wynika z analizowanych stanów granicznych nośności i użytkowania sprawdzanych dla tego typu konstrukcji. Jak wynika z porównania rys. 4 i 5, krawężniki są znacznie bardziej wyężone od prętów skratowania, natomiast przemieszczenie poziome wierzchołka zbliża się do wartości wymaganej przez odpowiedni stan graniczny. Porównanie zmian prędkości i wszystkich funkcji stanu wskazuje wyraźnie, że położenie wartości ekstremalnych badanych wielkości pokrywa się ze sobą w funkcji czasu i dokładnie odpowiada ekstremalnym wartościom wymuszenia. W dalszym ciągu numerycznie określano funkcje odpowiedzi – tj. zależność pomiędzy ekstremalną siłą oraz ekstremalnym przemieszczeniem, a losowym parametrem wejściowym, czego wyniki są udokumentowane na rys. 7 – siedem testów dynamicznych MES pozwoliło na odtworzenie funkcji liniowej pomiędzy prędkością wiatru i otrzymaną ekstremalną siłą w krawężniku. Zależność ta weryfikuje spodziewaną bezpośrednią proporcjonalność działającego ciśnienia do obliczonej siły w najbardziej wyężonym elemencie konstrukcyjnym wieży.



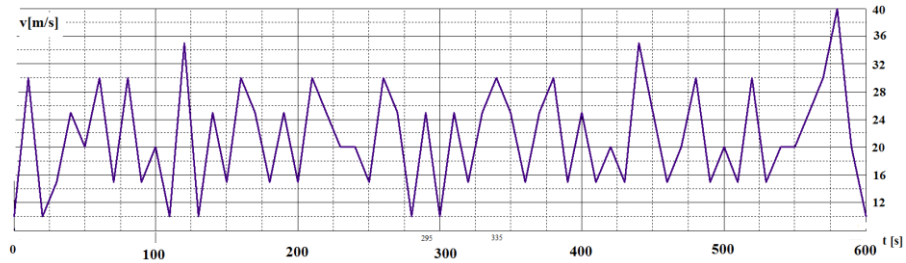
Rys. 1. Schemat analizowanej konstrukcji wieżowej wraz z modelem obliczeniowym

Fig. 1. Scheme of the analyzed tower structure with computational model



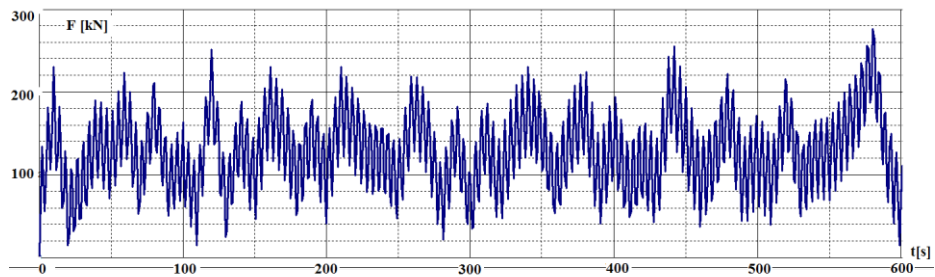
Rys. 2. Widok aksonometryczny najniższego segmentu wieży

Fig. 2. Axonometric view of the lowest section of the tower



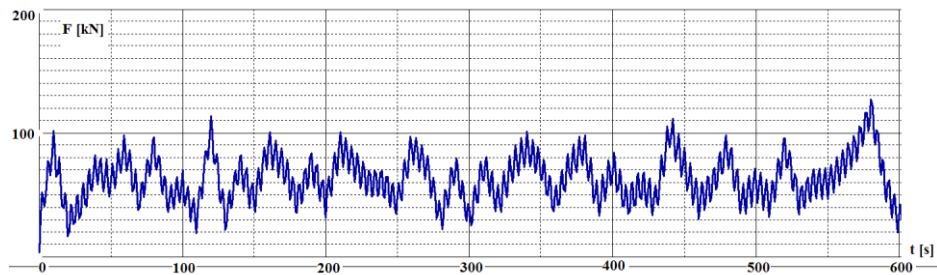
Rys. 3. Wykres zależności prędkości wiatru w funkcji czasu

Fig. 3. Graph of the wind velocity in the function of time



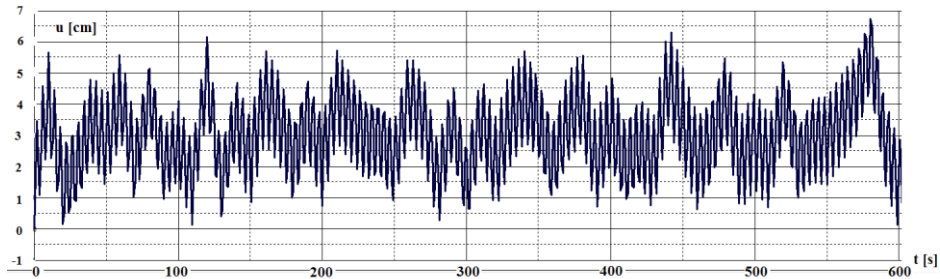
Rys. 4. Wykres zależności siły podłużnej w krawężniku dolnego segmentu w funkcji czasu

Fig. 4. Graph of the axial force in the leg of the tower lowest section as a function of time



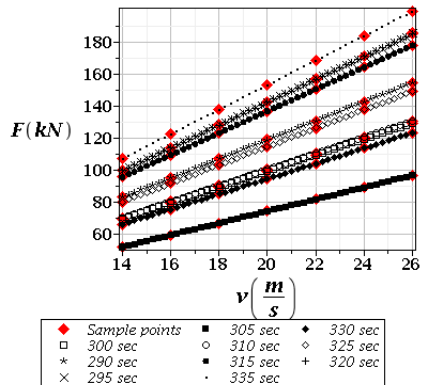
Rys. 5. Wykres zależności siły podłużnej w elemencie skratowania dolnego segmentu w funkcji czasu

Fig. 5. Graph of the axial force in the bracing of the tower lowest section as a function of time



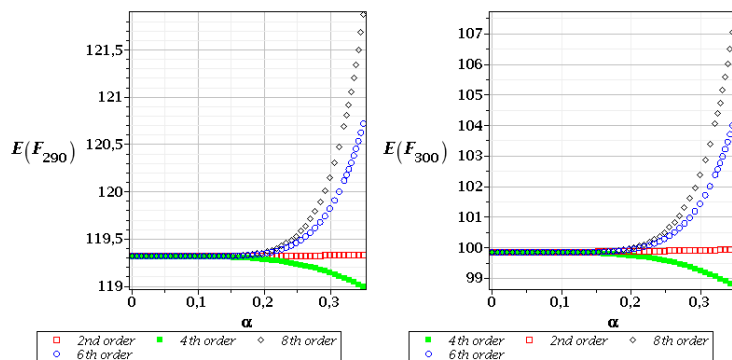
Rys. 6. Wykres przemieszczeń wierzchołka wieży w funkcji czasu

Fig. 6. Graph of the displacement of the top of the tower as a function of time



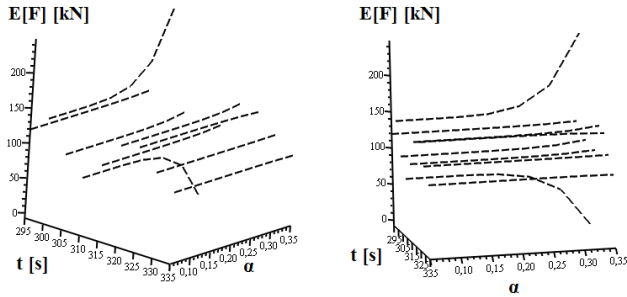
Rys. 7. Wykres funkcji odpowiedzi dla poszczególnych chwil czasowych i siły osiowej w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 7. Response function plots according to particular time moments and axial force in leg of the tower lowest section



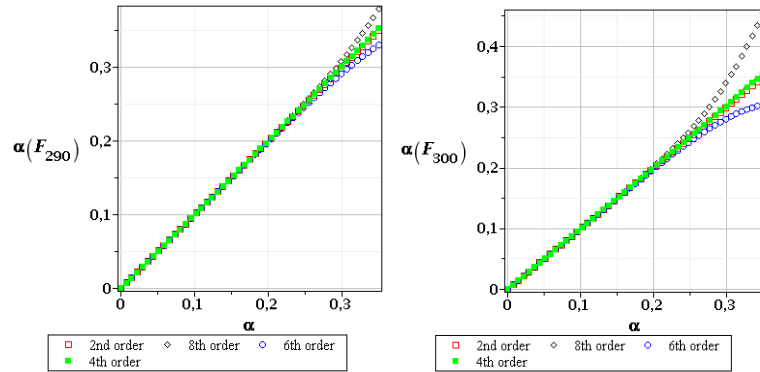
Rys. 8. Wartości oczekiwane sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 8. Expected values of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower



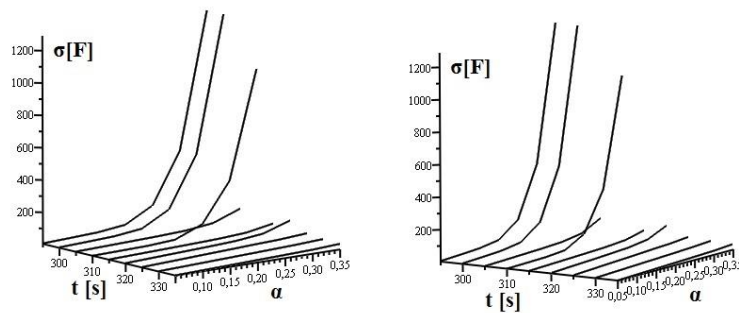
Rys. 9. Wartości oczekiwane sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 9. Expected values of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower



Rys. 10. Współczynnika wariancji sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 10. Coefficient of variation of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower



Rys. 11. Odchylenia standardowe sił osiowych w krawężniku dolnego segmentu wieży

Fig. 11. Standard deviations of the axial forces in the leg of the lowest section of the tower

Kolejno zgromadzono wartości oczekiwane sił osiowych w funkcji wejściowego współczynnika wariancji (rys. 8), a także współczynnika wariancji i czasu (rys. 9). Przedział zmienności współczynnika wariancji wybrano dość duży ze względu na naturalnie przypadkowy charakter zjawiska. Wartości oczekiwane obliczono symbolicznie stosując przybliżenie rzędu drugiego, czwartego, szóstego oraz ósmego, a ich porównanie wskazuje jedno-znacznie, że rząd przybliżenia jest istotny dla  $\sigma$ , czyli przy dużych fluktuacjach losowych modelowanego obciążenia wiatrem. Zgodnie z rys. 9 rząd wartości średniej siły w najbardziej wytężonym pręcie może zmieniać się w efekcie porywów wiatru wielokrotnie, nawet w odstępie kilkusekundowym. Współczynniki wariancji ekstremalnej siły osiowej są dla  $\sigma$  liniowo zależne od tego parametru, a rząd metody perturbacji nie ma wpływu na uzyskane wyniki. Przy analizie momentów drugiego rzędu staje się mało stabilna, co wskazuje na konieczność opracowania kryterium automatycznego wyboru rzędu przybliżenia. Zestawienie wyników numerycznych kończy wizualizacja odchylenia standardowego ekstremalnej siły ścisiskającej w krawężnikach wieży (rys. 11). Jest ono wykonane zarówno w funkcji wejściowego współczynnika wariancji, jak i czasu, tak więc może posłużyć wraz z danymi z rys. 9 do obliczenia wskaźnika niezawodności zmiennego w trakcie drgań dla badanej konstrukcji.

## 5. Podsumowanie i wnioski

Przedstawiona w pracy metoda perturbacji stochastycznej dowolnego rzędu w połączeniu z klasyczną Metodą Elementów Skończonych pozwala na wyznaczenie momentów losowych dynamicznej odpowiedzi konstrukcji przy relatywnie niewielkim nakładzie obliczeniowym. Podejście to jest efektywne również do numerycznej analizy drgań konstrukcji przestrzennych takich jak wieże stalowe przy dynamicznym wymuszeniu losowymi porywami wiatru. Metoda perturbacji w wersji wykorzystującej Metodę Funkcji Odpowiedzi wyznaczaną Metodą Najmniejszych Kwadratów na podstawie wielokrotnych rozwiązań uzyskanych przy pomocy MES umożliwia wyznaczenie podstawowych charakterystyk losowych dla historii przemieszczeń czy naprężeń w konstrukcjach. Parametry losowe stosowane w analizie nie muszą mieć rozkładu Gaussa, ale przy wielu zmiennych niezbędna jest szczegółowa informacja dotycząca korelacji wyższego rzędu w celu wyprowadzenia niezbędnych wzorów na momenty losowe.

Niezwykle przydatnym narzędziem jest program do obliczeń symbolicznych, który umożliwia automatyczne reprezentacje wybranych zmiennych za pomocą szeregu Taylora dowolnego rzędu. Przeprowadzone symulacje komputerowe pozwalają stwierdzić jednoznacznie, że rozrzut losowy funkcji niezbędnych do określenia podstawowych stanów granicznych w wieżach poddanych losowemu działaniu wiatru jest wielokrotnie większy od losowych fluktuacji amplitudy ciśnienia wiatrem – zależność wyjściowych współczynników wa-

riancji jest silnie nieliniowa w stosunku do odpowiedniego współczynnika wariacji obciążenia wiatrem.

Wyniki uzyskane w pracy znajdują bezpośrednie zastosowanie do obliczenia wskaźników niezawodności np. Cornella dla wież telekomunikacyjnych niezależnie dla SGN oraz SGU i mogą być porównane z wartościami przedstawionymi tabelarycznie w normie Eurocode 0. Dalsze eksperymenty numeryczne pozwolą na porównanie uzyskanych rezultatów z wynikami metody symulacji Monte-Carlo, a także na wyznaczenie parametrów losowych wyższego rzędu, tj. skośności i kurtozy pomocnych przy weryfikacji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi konstrukcji.

## Literatura

- [1] Bathe K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York 1996.
- [2] Clough R.; Penzien J.: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York 1975.
- [3] Cornil J.M.; Testud P.: *An Introduction to Maple V*. Springer-Verlag, Berlin 2004.
- [4] Elishakoff I.: *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*. Wiley & Sons, New York 1983.
- [5] Flaga A.: *Inżynieria wiatrowa. Podstawy i zastosowania*. Arkady, Warszawa 2008.
- [6] Hughes T.J.R.: *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc., New York 2000.
- [7] Kamiński M.: *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*. Wiley & Sons, Chichester 2013.
- [8] Khuri A.I., Cornell J.A.: *Response Surfaces: Design and Analysis*. Marcel Dekker, New York 1987.
- [9] Lin Y.K.: *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill, New York 1961.
- [10] Liu W.K., Belytschko, T., Mani, A.: Random field finite elements. *Int J Num Meth Engrg*, nr 23, 1986, s. 1831–1845.
- [11] Melchers R.E.; Horwood, E.: *Structural Reliability. Analysis and Prediction*. Wiley & Sons, Chichester 1987.
- [12] Mironowicz W.; Śniady P.: Dynamics of machine foundations with random parameters. *J Sound Vibr*, nr 112, 1987, s. 23-30.
- [13] Moller B., Beer M.: *Fuzzy Randomness. Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 2004.
- [14] Papadopoulos V., Papadrakakis M., Deodatis G.: Analysis of mean and mean square response of general linear stochastic finite element systems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, nr 195, 2006, s. 5454–5471.
- [15] Rykaluk K.: *Konstrukcje stalowe: kominy, wieże, maszty*. Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2007.
- [16] Van Noortwijk J.M., Frangopol D.M.: Two probabilistic life-cycle maintenance models for deteriorating civil infrastructures. *Prob Engrg Mech*, nr 19, 2004, s. 345–359.
- [17] Waarts P.H.; Vrouwenvelder A.C.W.M.: Stochastic finite element analysis of steel structures. *J Constr Steel Res*, nr 52, 1999, s. 21–32.

## STOCHASTIC ANALYSIS OF THE FORCED VIBRATIONS OF STEEL TELECOMMUNICATION TOWERS

### Summary

The main aim of this paper is a presentation of computational analysis of the forced vibration of the steel telecommunication tower resulting from the uncertain wind blows with the use of the Stochastic Finite Element Method. This approach is based upon the Taylor expansion with random coefficients of a general order for all input and output random functions and determination of the structural response related to some input Gaussian design parameter. The forced vibration problem is solved numerically by using the Finite Element Method system ROBOT Professional, while the response functions are determined symbolically in the environment of the program MAPLE, where all the probabilistic coefficients are additionally computed. Deterministic form of the response functions are derived analytically with the help of the Least Squares Method and the series of the FEM-based experiments provided for the several discrete values of the design parameter that fluctuates about its expected value. The basic random parameter considered here is mean velocity of the wind, whose pressure is applied on the tower skeleton. The method proposed in this elaboration may be successfully further applied for a determination of the reliability indices for various engineering structures exhibiting different random parameters and also with deterministic loading spectra.

**Keywords:** Stochastic Finite Element Method, steel structures, telecommunication towers

DOI:10.7862/rb.2014.28

*Przesłano do redakcji: 26.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



Janusz KAWECKI<sup>1</sup>  
Krzysztof KOZIOL<sup>2</sup>  
Krzysztof STYPUŁA<sup>3</sup>

## WERYFIKACJA MODELI DYNAMICZNYCH NA PODSTAWIE WYNIKÓW POMIARÓW „TŁA DYNAMICZNEGO”

Eksploracja drogi projektowanej w pobliżu istniejących budynków nie powinna naruszać warunków ich dalszej bezpiecznej eksploatacji oraz wymagań odnośnie do zapewnienia niezbędnego komfortu wibracyjnego ludziom przebywającym w tych budynkach. Projektant konstrukcji drogi powinien na podstawie odpowiednich analiz dynamicznych wykazać, iż podane wymagania będą spełnione podczas eksploatacji drogi. Rozpatrywane zagadnienia należą do zadań diagnozy z prognozą (por. [3]). Obliczenia sprawdzające wpływ prognozowanego oddziaływania parasejsmicznego na budynek i ludzi w budynku przeprowadza się na modelu budynku. Ukształtowany model obliczeniowy budynku (przeważnie z zastosowaniem MES) powinno się zweryfikować. Można to zrobić korzystając z wyników pomiarów tzw. tła dynamicznego (por. [5]). W pracy opisano procedurę weryfikacji modelu dynamicznego budynku oraz podano przykłady jej zastosowania przy weryfikowaniu modelu stosowanego w ocenie wpływu prognozowanych drgań na konstrukcję budynku, na ludzi w budynku oraz na inne obiekty infrastruktury.

**Słowa kluczowe:** drgania parasejsmiczne, model dynamiczny budynku, weryfikacja modelu, badania tła dynamicznego

### 1. Wprowadzenie

Projektując drogi w otoczeniu istniejącej zabudowy należy uwzględnić również wymagania odnośnie do oddziaływania eksploatacji drogi na jej otoczenie. Wśród takich wymagań coraz częściej stawiane są te, które dotyczą zapewnienia budynkom dalszej ich bezpiecznej eksploatacji oraz ludziom przebywającym w budynkach niezbędnego komfortu wibracyjnego. Takie zadanie zalicza

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Janusz Kawecki, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, tel. (12) 628 2388, e-mail: jkawec@pk.edu.pl

<sup>2</sup> Krzysztof Kozioł, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, tel. (12) 628 2391, e-mail: kozioł\_k@poczta.fm

<sup>3</sup> Krzysztof Stypuła, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, tel. (12) 628 2340, e-mail: kstypula@pk.edu.pl

się do sytuacji diagnostycznych (por. [3]) określanych jako „diagnoza z prognozą”.

W [5] opisano procedury projektowe i diagnostyczne odnoszące się do zapewnienia ludziom przebywającym w budynkach niezbędnego komfortu wibracyjnego. Można, nawiązując do tamtego opisu, rozszerzyć procedurę diagnozy z prognozą na wpływ drgań przekazywanych przez podłoże (parasejsmicznych) zarówno na ludzi w budynku jak i na konstrukcję budynku. Zachowując w miarę ogólne ujęcie można wyróżnić w tej procedurze diagnostycznej następujące elementy:

- Wykonanie pomiarów drgań w punktach pomiarowych na istniejącym budynku (albo innym obiekcie budowlanym). Drgania te generowane są przez dostępne źródło drgań, inne od prognozowanego, występujące poza budynkiem. W razie potrzeby można też dodatkowo przyjąć punkty pomiarowe pomiędzy źródłem drgań a budynkiem. Ten etap określa się jako badanie tła dynamicznego.
- Ukształtowanie (najczęściej z zastosowaniem MES) modelu obliczeniowego budynku (albo innego obiektu budowlanego) na podstawie dostępnej dokumentacji technicznej uzupełnionej informacjami zebranymi podczas wizji lokalnej.
- Poddanie przyjętego modelu obliczeniowego budynku oddziaływaniu wymuszenia kinematycznego, którego zapis w dziedzinie czasu uzyskano podczas pomiarów tła dynamicznego. Informacje te uzyskuje się z pomiaru drgań w punktach pomiarowych usytuowanych na fundamencie albo na ścianie piwnicznej (w sztywnym węźle konstrukcji) w poziomie terenu, od strony źródła drgań.
- Analityczne wyznaczenie reakcji modelu budynku w miejscach usytuowania punktów pomiarowych przyjętych w pomiarach objętych badaniem tła dynamicznego.
- W odniesieniu do wibrogramów uzyskanych w wyniku pomiarów i obliczeń w tych samych punktach pomiarach wykonuje się ich analizę stosownie do kryterium oceny diagnostycznej i porównuje uzyskane wyniki. Na tej podstawie bada się zgodność przyjętego modelu budynku z obiektem rzeczywistym. Przyjęta w ocenie funkcja jakości określa wymagania umożliwiające akceptację modelu i jego wykorzystanie w następnym etapie analiz dotyczących prognozowania wpływu drgań na budynek i ludzi w budynku.
- Jeśli zestawione rezultaty uzyskane na podstawie pomiarów i obliczeń spełniają kryterium opisane za pomocą funkcji jakości, to model budynku można zaakceptować i stosować w kolejnych analizach odnoszących się do prognozowanych oddziaływań komunikacyjnych. Jeśli zaś ta akceptacja nie jest możliwa (np. zgodność wyników analizy nie jest wystarczająca), to odpowiednio poprawia się model budynku. Akceptacją modelu budynku kończy

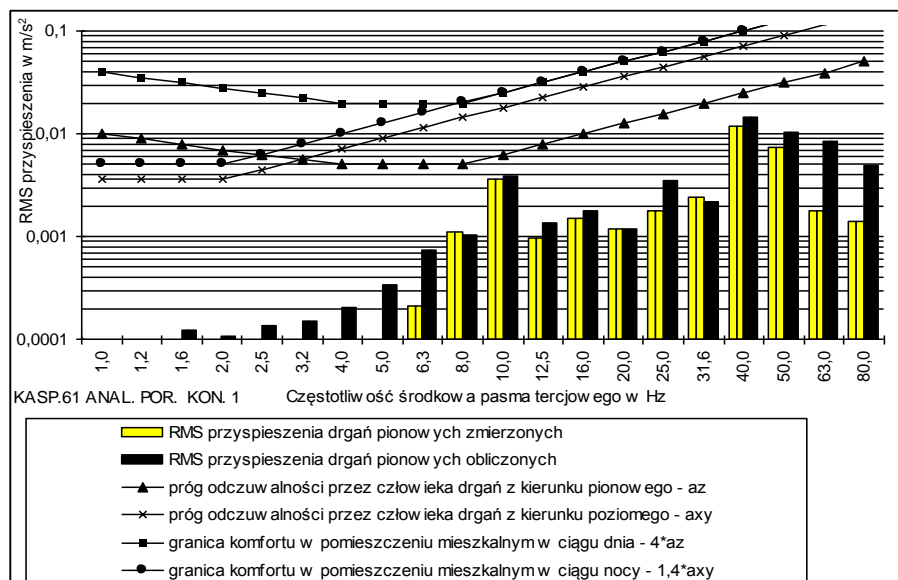
się etap pierwszy diagnozy z prognozą obejmujący pomiar tła dynamicznego i wykorzystanie jego wyników do weryfikacji modelu budynku.

- W drugim etapie opracowuje się prognozę wpływu drgań generowanych podczas eksploatacji projektowanej drogi na budynki i ludzi w budynkach. Na podstawie analizy zbioru danych pomiarowych pozyskanych w podobnych sytuacjach (występujących np. w Bazie Danych Pomiarowych, którą dysponuje autor opracowania diagnostycznego) wyznacza się najbardziej prawdopodobny wibrogram odpowiadający wymuszeniu kinematycznemu budynku.
- Po przyłożeniu do modelu budynku prognozowanego wymuszenia kinematycznego wyznacza się drgania budynku w miejscach odgrywających istotną rolę w odniesieniu do wyężenia jego elementów albo w miejscach narażenia na drgania ludzi przebywających w budynku.
- Wyznaczone wibrogramy analizuje się z zastosowaniem odpowiednich kryteriów oceny wpływu drgań na konstrukcję oraz na ludzi w budynkach. Przy niespełnieniu odpowiednich wymagań w zakresie bezpiecznego przeniesienia drgań przez konstrukcję budynku albo zapewnienia ludziom w budynku niezbędnego komfortu wibracyjnego wprowadza się środki techniczne doprowadzające do osiągnięcia potrzebnej redukcji drgań.

W niniejszej pracy opisano rozwiązane zadania weryfikacji modeli obliczeniowych budynków (albo innych obiektów budowlanych) na podstawie wyników pomiarów tła dynamicznego.

## 2. Weryfikacja modelu obliczeniowego budynku wg [5]

Weryfikację modelu obliczeniowego przeprowadza się z uwzględnieniem zakresu jego wykorzystania w prognozowaniu oddziaływań dynamicznych. Zakres ten uwzględnia się również w opisie funkcji jakości, na podstawie którego dokonuje się akceptacji modelu. Jeśli więc przykładowo model będzie stosowany w diagnozie dotyczącej wpływu prognozowanych drgań na ludzi w budynku, to w funkcji jakości uwzględni się zgodność oceny drgań obliczonych (na modelu) i pomierzonych (na obiekcie rzeczywistym) przy tym samym – pomierzonym – wymuszeniu kinematycznym i w tym samym miejscu ich przekazywania na człowieka (por. np. [4]). Dobrze ilustruje to rys. 1., który zaczerpnięto z [5]. W układzie współrzędnych: częstotliwość oraz wartość RMS przyspieszenia drgań w pasmach 1/3-oktawowych podano wyniki analizy wibrogramów uzyskanych w wyniku pomiaru na stropie 1. piętra w pewnym budynku oraz w wyniku obliczeń na modelu tego budynku. Na tym samym rysunku zaznaczono linie odpowiadające kryteriom oceny wpływu drgań na ludzi w budynkach.



Rys.1. Porównanie wyników analizy wibrogramów uzyskanych jako rezultat pomiarów oraz obliczeń w punkcie na stropie 1. piętra budynku (za [5])

Fig. 1. Comparison of the results of the analysis of the vibrograms obtained as a result of measurements and calculations in the point on the second floor of the building ([5])

Funkcję jakości opisano tak, iż za wystarczającą zgodność modelu z obiektem uznano zgodność wartości RMS przyspieszenia w paśmie o największej wartości. Takie wymaganie uzupełniono dodatkowymi informacjami, które dopuszczają uznanie modelu budynku za akceptowany, jeśli występujące różnice między podanymi wyżej wartościami nie przekraczają 30% i większe wartości uzyskano z analizy modelu. Zaakceptowanie takiego modelu wynika z analizy dokładności pomiarów dynamicznych oraz przyjętego kryterium oceny wpływu drgań na ludzi (por. [7]). Z informacji zawartych na rys. 1. wynika, iż wymagania opisane za pomocą przedstawionej wyżej funkcji jakości zostało spełnione i na tej podstawie zaakceptowano model budynku zbudowany na bazie MES o przyjętych parametrach opisujących jego właściwości materiałowe. Największe wartości skuteczne przyspieszenia drgań występują w paśmie o częstotliwości środkowej 40Hz. Wartości uzyskane na podstawie analizy wibrogramu pomierzonego na budynku okazały się mniejsze od wyznaczonych na podstawie analizy wibrogramu uzyskanego w tym samym miejscu z modelu obliczeniowego.

Taki rezultat otrzymano także w wypadku pasma o częstotliwości środkowej 10Hz. Większe różnice między wartościami wyznaczonymi w odniesieniu do istniejącego budynku i jego modelu wystąpiły jedynie w pasmach, w których wyznaczone wartości skuteczne przyspieszenia drgań

były znacząco mniejsze. Nie wpływało to na wynik oceny zapewnienia ludziom wymaganego komfortu wibracyjnego. Podobne rezultaty uzyskano w odniesieniu do innych punktów pomiarowych umieszczonych na tym budynku.

### 3. Opis procedury weryfikacji modeli

#### 3.1. Pomiar tła dynamicznego

Pomiary, analizy i oceny wpływu drgań na budynki i ludzi w budynkach wykonuje się zgodnie z zaleceniami podanymi w normach [6, 7]. Uwzględniając kryteria oceny podane w tych normach przyjęto, że pomiar dotyczy przyspieszeń drgań w wybranych punktach pomiarowych w trzech kierunkach: dwóch poziomych ( $x$  i  $y$ ) oraz pionowym ( $z$ ). Pomiar drgań odbywa się jednocześnie we wszystkich punktach pomiarowych usytuowanych w danym budynku.

Punkty pomiarowe rozmieszcza się w budynku w następujący sposób (uwzględniono tu wymagania zapisane w przywołanych normach oraz ich uzasadnienia zawarte np. w [1, 2, 5, 8]):

- Na fundamencie albo na ścianie piwnicznej w poziomie terenu, od strony źródła drgań. Dane pozyskane w tym punkcie pomiarowym dostarczają informacji o zmianie wymuszenia kinematycznego budynku, które w procedurze weryfikacji modelu obliczeniowego będzie przykładane również do modelu budynku.
- Na środku stropu w wybranych pomieszczeniach w tym także na stropie najwyższej położonej kondygnacji.

Z wibrogramów zarejestrowanych podczas pomiarów tła dynamicznego wybiera się reprezentatywne, które będą wykorzystane w procedurze weryfikacji modelu obliczeniowego budynku. Jeśli np. model budynku będzie zastosowany w analizach dotyczących wpływu prognozowanych drgań na ludzi w budynku, to analiza wibrogramów zarejestrowanych w miejscach przekazywania tych drgań na ludzi dotyczy wyznaczenia maksymalnych z wielu wartości skutecznych RMS przyspieszeń drgań określonych w 1/3 oktawowych pasmach częstotliwości (por. np.: [9]). W tym samym układzie współrzędnych, w którym przedstawiono wykresy schodkowe wartości skutecznych przyspieszeń drgań nanosi się również linie odpowiadające progom odczuwalności drgań przez człowieka oraz zapewnieniu ludziom niezbędnego komfortu wibracyjnego (por. rys. 1).

Jeśli z kolei model budynku będzie wykorzystany w analizach dotyczących wpływu prognozowanych drgań na konstrukcję budynku, to analiza wibrogramów zarejestrowanych na elementach konstrukcyjnych dotyczy przedstawienia struktury częstotliwościowej tych wibrogramów. Służy ona do wyznaczenia pasm częstotliwości, których udział w wibrogramie jest dominujący. Do weryfikacji modelu będą służyły wartości maksymalne przyspieszenia drgań wyznaczone w tych pasmach.

### **3.2. Metodologia modelowania budynków**

W kształtowaniu modeli budynków stosuje się przeważnie Metodę Elementów Skończonych. Obecnie dostępne programy obliczeń komputerowych umożliwiają kształtowanie modeli przestrzennych (3D). Wymiary i układ elementów przyjmuje się zgodnie z danymi zawartymi na rysunkach technicznych z uwzględnieniem ich weryfikacji podczas wizji lokalnej. Przyjmuje się również na tej podstawie wartości parametrów charakteryzujących właściwości materiałów występujących w konstrukcji. Wartości obciążeń użytkowych przyjmuje się w modelu z uwzględnieniem zaleceń norm dotyczących obciążeń, normy [6] oraz ewentualnie informacji i obserwacji zebranych podczas wizji lokalnej.

Do tak opisanego modelu budynku przykładą się wymuszenie kinematyczne opisane w dziedzinie czasu wibrogramem zapisanym podczas pomiarów tła dynamicznego. W wyniku rozwiązania układów równań opisujących ukształtowany model uzyskuje się reakcję modelu budynku na wymuszenie kinematyczne opisaną również w dziedzinie czasu. Oddziaływanie na budynek (obiekt) i na jego model opisane jest tym samym wibrogramem (wymuszenie kinematyczne). Porównanie zaś odnosi się do odpowiedzi budynku i jego modelu w tych samych punktach (punkty pomiarowe).

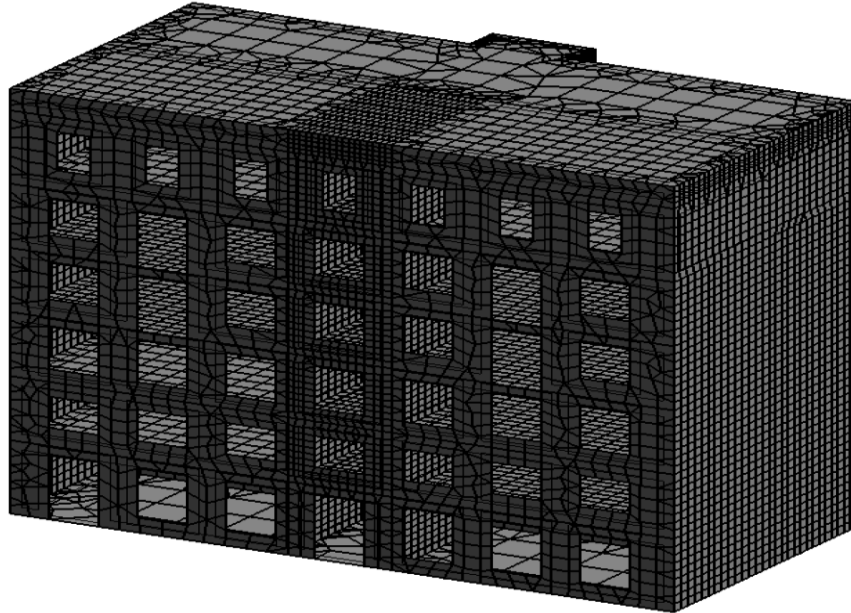
## **4. Przykłady weryfikacji modeli**

### **4.1. Model budynku wykorzystany w ocenie wpływu drgań na ludzi w budynku**

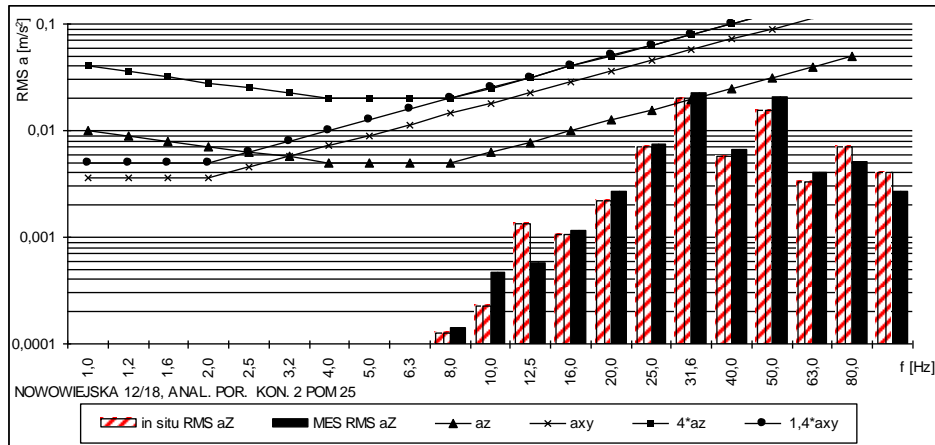
Budynek mieszkalny znajduje się w sąsiedztwie linii tramwajowej, która będzie modernizowana. Przewidziano zastosowanie wibroizolacji nowego toru tramwajowego. Badania tła dynamicznego wykonano podczas sterowanych jazd tramwajów po dotychczasowym torze. Punkty pomiarowe obrano na ścianie piwnicy, w poziomie terenu, od strony toru tramwajowego. Pozostałe punkty pomiarowe występowały na stropach poszczególnych kondygnacji, na posadzce w środku rozpiętości stropu w wybranych pomieszczeniach.

Schemat modelu obliczeniowego MES budynku podano na rys. 2. Do modelu przyłożono wymuszenie kinematyczne w postaci uzyskanego z pomiaru wibrogramu. Wyznaczono reakcję budynku w punktach pomiarowych na stropach poszczególnych kondygnacji. Wibrogramy pomierzone i obliczone na stropach poddano analizie w pasmach 1/3-oktawowych.

Wyniki analizy wybranych wibrogramów pomierzonych i obliczonych w tych samych punktach pomiarowych zestawiono na rys. 3 – 4.

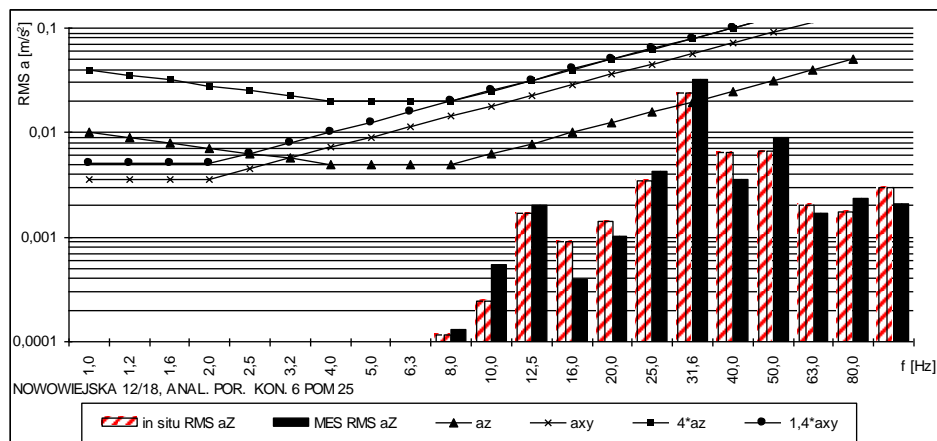


Rys. 2. Schemat modelu obliczeniowego budynku  
Fig. 2. Scheme of calculations model of building



Rys. 3. Weryfikacja modelu budynku stosowanego w ocenie wpływu drgań na ludzi. Analiza drgań pionowych na stropie 1. piętra budynku. Wyniki otrzymane z pomiaru (słupki zakreskowane) i z obliczeń (słupki czarne).

Fig. 3. Verification of building model used in the assessment of the effects of vibration on people. Analysis of vertical vibration on the second floor of the building. Results obtained from measurement (hatched bars) and calculation (black bars)



Rys.4. Weryfikacja modelu budynku stosowanego w ocenie wpływu drgań na ludzi . Analiza drgań pionowych na stropie 5. piętra budynku. Wyniki otrzymane z pomiaru (słupki zakreskowane) i z obliczeń (słupki czarne).

Fig. 4. Verification of building model used in the assessment of the effects of vibration on people. Analysis of vertical vibration on the six floor of the building. Results obtained from measurement (hatched bar) and calculation (black bars).

Posługując się kryterium opisanym w punkcie 1. zaakceptowano model budynku i zastosowano go w ocenie wpływu prognozowanych drgań na ludzi w budynku. Drgania te wyznaczono z uwzględnieniem różnych wariantów wibroizolacji zastosowanej w konstrukcji toru.

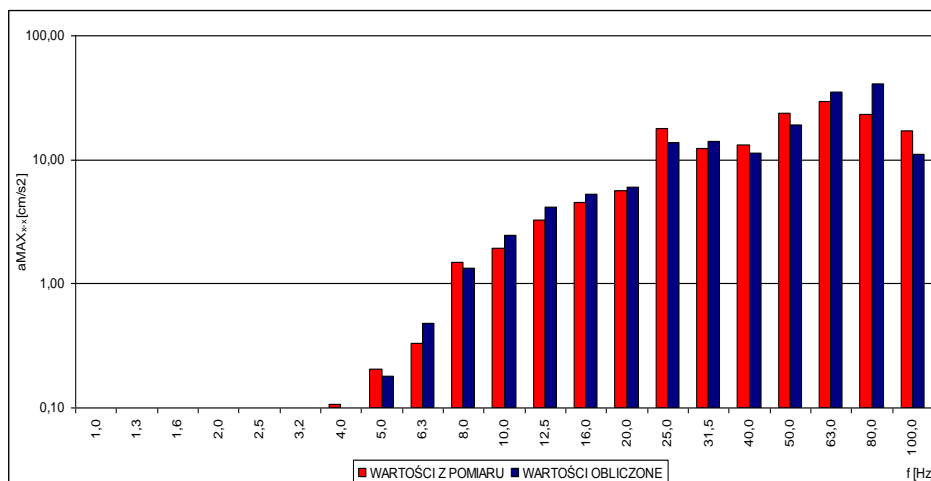
#### 4.2. Weryfikacja modelu z uwzględnieniem podłoża na drodze propagacji drgań

Niekiedy należy zweryfikować model opisujący budowlę z podłożem między budowlą i drogą. Wówczas pomiar tła dynamicznego obejmuje również punkt pomiarowy na krawędzi drogi (lub na gruncie). Wielkości zarejestrowane w tym punkcie pomiarowym będą stanowiły wymuszenie drgań modelu, a zarejestrowane i obliczone w miejscu odbioru ich przez konstrukcję posłużą do weryfikacji modelu. Na rys. 5 podano przykładowy wynik analiz, które posłużyły do weryfikacji modelu, w którym występowało podłoże między źródłem drgań i obiektem budowlanym (hala produkcyjna). Zestawiono tam wyniki analizy wibrogramów (pomierzonego i obliczonego) na fundamencie słupa hali w pasmach 1/3-okawowych.

Stosując do tych wyników kryteria weryfikacji modelu obliczeniowego opisane w punkcie 1 (funkcja jakości) stwierdza się, że przyjęty model obliczeniowy podłoża między konstrukcją drogi a fundamentem hali można zaakceptować. Można go więc zastosować w obliczeniach, na podstawie których dobrane zo-



staną parametry charakteryzujące wibroizolację zaprojektowaną w konstrukcji drogi.



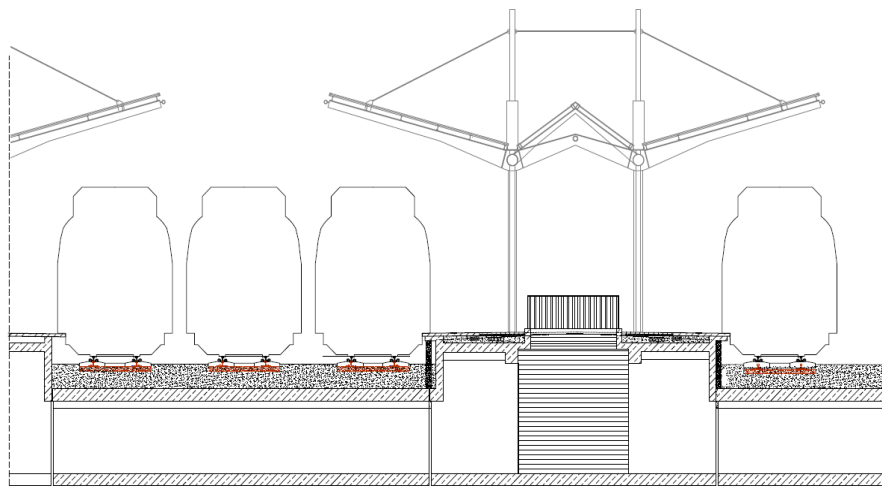
Rys. 5. Porównanie wyników analizy wibrogramów drgań poziomych fundamentu słupa hali w pasmach 1/3 –oktawowych, otrzymanych z pomiarów i z obliczeń

Fig. 5. Comparison of the results of the analysis of horizontal vibrations of the foundation of the pillar hall in the 1/3-octave bands, derived from measurements and calculations

Inny przykład weryfikacji modelu odnosi się do obliczeń wykonanych w związku z modernizacją układu torowego na dworcu kolejowym. Przewidziano zastosowanie wibroizolacji w modernizowanym układzie torowym. W celu dobrania parametrów charakteryzujących wibroizolację należało najpierw przyjąć model obliczeniowy obszaru między torem a konstrukcją peronu i następnie wykonać prognozę skuteczności wibroizolacji. Ma ona skutecznie zmniejszyć poziom drgań generowanych podczas przejazdów pociągów i przekazywanych na ludzi przebywających w tunelach pod peronami. Badania tła dynamicznego podczas przejazdów wielu pociągów po dotychczasowym torze dostarczyły informacji wykorzystywanych w procedurze weryfikacji modelu opisującego obszar między źródłem drgań a górną powierzchnią płyty peronowej. Na rys. 6 podano przekrój poprzeczny przez układ torów i peron. Następnie ukształtowano model obliczeniowy MES. Analizę porównawczą modelu obliczeniowego z obiektem rzeczywistym przeprowadzono w punkcie pomiarowym usytuowanym na płycie peronu, przy wyjściu środkowym z peronu.

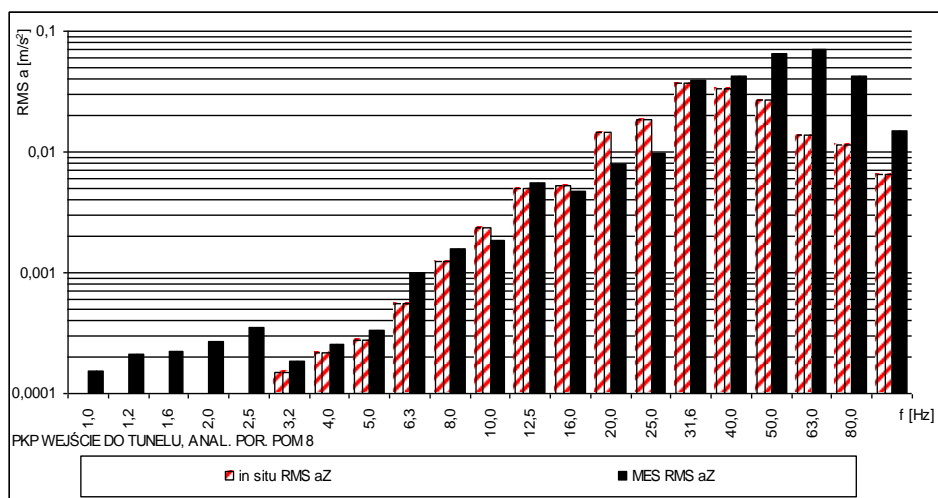
Przykładowe wyniki weryfikacji przyjętego modelu w odniesieniu do punktu pomiarowego na płycie peronowej podano na rys.7. Dotyczą one wartości odpowiadających przejazdowi pociągu, podczas którego otrzymano wartości największe RMS przyspieszenia drgań pionowych na płycie peronu. W badaniu odpowiedności modelu stosowano wartości RMS przyspieszenia drgań w pa-

smach 1/3-oktawowych ze względu na wykorzystanie modelu w ocenie wpływu drgań na ludzi.



Rys. 6. Przekrój poprzeczny przez peron.

Fig. 6. Cross section through the platform



Rys. 7. Weryfikacja modelu. Maksymalne wartości skuteczne przyspieszenia (RMS) w pasmach 1/3-oktawowych pomierzone (słupki zakreskowane) i obliczone (słupki czarne).

Fig. 7. Verification of the model. The maximum values of the effective acceleration (RMS) in 1/3-octave bands measured (hatched bars) and calculated (black bars).

W przedstawionej sytuacji kryteria akceptacji modelu opisane przyjętą funkcją jakości uznano za spełnione i w kolejnych analizach zastosowano zaak-

ceptowany model do wyznaczenia parametrów charakteryzujących wibroizolację torów kolejowych.

## 5. Podsumowanie

Opisana tu metodyka weryfikacji modeli obliczeniowych przyjmowanych w zadaniach diagnozy z prognozą (por. [3]) jest rozwinięciem metodyki przedstawionej wcześniej w [4, 5]. Jej zastosowanie zwiększa wiarygodność prognoz opracowywanych w związku z ochroną przed drganiami budynków i ludzi w budynkach usytuowanych w otoczeniu projektowanych albo modernizowanych dróg. Autorzy zweryfikowali tę metodykę w wielu sytuacjach praktycznych. Przykłady przywołane w niniejszym opracowaniu nawiązują do takich opracowań.

## Literatura

- [1] Ciesielski R., Kawecki J., Maciąg E., Stypuła K.: Ocena diagnostyczna skutków wpływów drgań na budynki i ludzi w budynkach, *Inżynieria i Budownictwo*, nr 9, 1993, s. 390-394
- [2] Ciesielski R., Kawecki J., Maciąg E.: Ocena wpływu wibracji na budynki i ludzi w budynkach (diagnostyka dynamiczna), Wyd. Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa 1993
- [3] Kawecki J.: Diagnostyka drgań komunikacyjnych na budynki i ludzi w budynkach, *Transport Miejski i Regionalny*, nr 11, 2006, s. 17-27
- [4] Kawecki J., Stypuła K.: Metodyka pomiarowo-interpretacyjna wyznaczania modelu budynku przydatnego w ocenie wpływu drgań parasejsmicznych na ludzi, *Czasopismo Techniczne*, seria: Budownictwo, z. 2-B, 2007, s. 39-46.
- [5] Kawecki J., Stypuła K.: Zapewnienie komfortu wibracyjnego ludziom w budynkach narażonych na oddziaływania komunikacyjne, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2013.
- [6] PN-B-02170:1985, Ocena szkodliwości drgań przekazywanych przez podłoże na budynki.
- [7] PN-B-02171:1988, Ocena wpływu drgań na ludzi w budynkach.
- [8] Stypuła K.: Drgania wywołane eksploatacją miejskiego transportu szynowego – Badania i zapobieganie, *Transport Miejski i Regionalny*, nr 10, 2006, s. 2-11.
- [9] Zieliński T. P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów – Od teorii do zastosowań, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005.

## VERIFICATION OF DYNAMIC MODELS BASED ON THE RESULTS OF THE "DYNAMIC BACKGROUND" MEASUREMENTS

### Summary

The operation of the road projected near the existing buildings should not affect the conditions of their further safe operation and requirements to ensure the necessary vibration comfort of the people in these buildings. Road designer should demonstrate based on the respective analyses

of dynamic that the requirements will be fulfilled during operation. Considered issues are among the tasks of the diagnosis with the forecast. (see [3]). Calculations of the influence of the forecasted paraseismic impact on the building and the people inside are carried out using the building model. Prepared calculation model of the building (mostly using FEM) can be verified by using the results of these dynamic background measurements (see [5]). This paper describes a procedure for the verification of the dynamic model of the building and gives examples of its use for the verification of the model used in the assessment of the expected impact of vibration on the structure of the building, on the people in the building and on the other infrastructure facilities.

**Keywords:** paraseismic vibration, dynamic building model, dynamic model verification, research of a dynamic background

DOI:10.7862/rb.2014.29

*Przesłano do redakcji: 05.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Krystyna KUŹNIAR<sup>1</sup>

Edward MACIĄG<sup>2</sup>

Tadeusz TATARA<sup>3</sup>

## UNORMOWANE SPEKTRA ODPOWIEDZI OD DRGAŃ POWIERZCHNIOWYCH WZBUDZANYCH WSTRZĄSAMI GÓRNICZYMI

Praca dotyczy jednego ze sposobów opisu informacji o wymuszeniu kinematycznym – za pomocą spektrów odpowiedzi. Przedstawiono w niej propozycję opracowanego wzorcowego (standardowego) przyśpieszeniowego spektrum odpowiedzi dla najbardziej aktywnego sejsmicznie obszaru górniczego w Polsce – Legnicko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego (LGOM). Tego typu spektrum może być wykorzystane w analizach dynamicznych. Spektrum to wyznaczono na podstawie przebiegów drgań gruntu rejestrowanych za pomocą aparatury czuwającej w okresie kilku lat na trzech stanowiskach pomiarowych. W obliczeniach pod uwagę wzięto tylko wyselekcjonowane przebiegi drgań z amplitudami nie mniejszymi od 10cm/s<sup>2</sup>, łącznie kilkaset przebiegów drgań. Zestawienie uśrednionych bezwymiarowych przyśpieszeniowych spektrów odpowiedzi sporządzonych dla każdego ze stanowisk osobno, pozwoliło na wskazanie wpływu warunków gruntowych na postać otrzymywanego spektrum. Dokonano porównania zaproponowanego wzorcowego spektrum z odpowiednim spektrum zamieszczonym w literaturze, wykazując i analizując występujące różnice. Dodatkowo porównano krzywą wzorcową spektrum uzyskaną na podstawie drgań gruntu z zaproponowaną krzywą wzorcową spektrum od jednocześnie rejestrowanych drgań fundamentów budynków (trzech typów: niskiego, średniej wysokości i wysokiego), posadowionych obok ww. stacji pomiarowych na gruncie. Krzywe te istotnie się różnią i dowodzą silnego tłu-mienia drgań z wyższymi częstotliwościami przez budynki.

**Słowa kluczowe:** wzorcowe spektrum odpowiedzi, wstrząsy górnicze, przebiegi drgań, badania doświadczalne

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Krystyna Kuźniar, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, 30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2, tel. +48 12 662 6339, e-mail: [kkuzniar@up.krakow.pl](mailto:kkuzniar@up.krakow.pl)

<sup>2</sup> Edward Maciąg, Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej, 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, tel. +48 12 628 23 33, e-mail: [maciag@limba.wil.pk.edu.pl](mailto:maciag@limba.wil.pk.edu.pl)

<sup>3</sup> Tadeusz Tatar, Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej, 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, tel. +48 12 628 23 48, e-mail: [ttatara@pk.edu.pl](mailto:ttatara@pk.edu.pl)

## 1. Wstęp

Jednym z oddziaływań dynamicznych na konstrukcję budowlaną może być ruch podłoża, na którym ją posadowiono. Tego typu źródła drgań zwykle znajdują się poza obiektem, a wstrząsy dochodzą do konstrukcji na skutek propagacji drgań w ośrodku gruntowym. Drgania podłoża stanowią w tym przypadku wymuszenie kinematyczne, a obciążenie obiektu wynika z powstających w tym czasie sił bezwładności.

Źródła takich drgań mogą być naturalne, a więc niezależne od człowieka, albo mogą być w sposób bezpośredni lub pośredni spowodowane działalnością człowieka. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z drganiami sejsmicznymi, których źródłem są trzęsienia ziemi (wstrząsy typu tektonicznego), wybuchy wulkanów. W przypadku drugim mamy do czynienia z tzw. drganiami parasejsmicznymi. Najsilniejszymi wśród drgań parasejsmicznych w Polsce są drgania pochodzenia górniczego. Mogą one prowadzić do uszkodzeń obiektów budowlanych. Zapewnienie bezpieczeństwa obiektów podlegających wpływowi takich drgań stwarza konieczność analizy propagacji drgań w ośrodku gruntowym, analizy oddziaływania drgań na obiekty budowlane i oceny stopnia ich szkodliwości.

Wstrząsy górnicze, generując drgania budynków, oddziałują też na samych ludzi w budynkach. Mieszkańcy osiedli znajdujących się w strefach takich oddziaływań, wyraźnie tego typu drgania odczuwają. W trakcie wstrząsów, szczególnie w budynkach wysokich, zdarza się przemieszczanie mebli w mieszkaniach, kołysanie żyrandoli lub wypadanie książek z półek.

Najlepszym sposobem określenia oddziaływania wstrząsów górniczych na konstrukcje budowlane jest zarejestrowanie rzeczywistych przebiegów drgań w wybranych punktach na powierzchni ziemi oraz w budynkach. Można to realizować z wykorzystaniem monitoringu sejsmometrycznego, przez który rozumie się prowadzenie ciągłych rejestracji zjawisk sejsmicznych. Uzyskane w ten sposób rejestracje drgań bądź w formie sejsmogramów (zapis przebiegów prędkości lub przemieszczeń drgań), bądź akcelerogramów (zapis przebiegów przyspieszeń drgań), stanowią materiał wyjściowy do ich przetwarzania oraz specjalistycznej interpretacji.

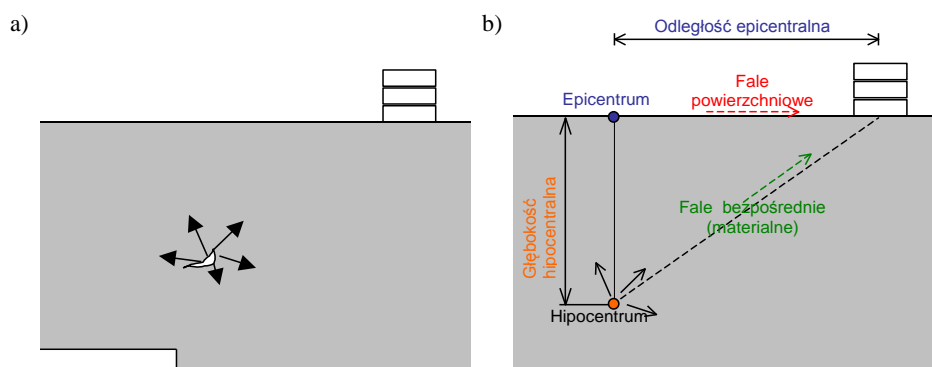
W praktyce nie jest możliwe, aby np. na etapie projektowania obiektów projektant wykorzystywał jako wymuszenie kinematyczne różne warianty przebiegów drgań podłoża, które potencjalnie mogą wystąpić w miejscu posadowienia budynku. Stosowane są tzw. wzorcowe (standardowe) przyspieszeniowe spektra odpowiedzi. Wykorzystuje się je do charakterystyki drgań powierzchniowych oraz w projektowaniu nowych obiektów, jak również do oceny szkodliwości drgań dla istniejących budynków [2, 3, 9, 10, 12].

W pracy przedstawiono propozycję opracowanego wzorcowego (standardowego) przyspieszeniowego spektrum odpowiedzi dla najbardziej aktywnego sejsmicznie obszaru górniczego w Polsce – Legnicko-Głogowskiego Okręgu Mie-

dziowego (LGOM). Dokonano porównania zaproponowanego wzorcowego spektrum z odpowiednim spektrum zamieszczonym w literaturze, wykazując i analizując występujące różnice. Dodatkowo porównano krzywą wzorcową spektrum uzyskaną na podstawie drgań gruntu z zaproponowaną krzywą wzorcową spektrum od jednocześnie rejestrowanych drgań fundamentów budynków (trzech typów: niskiego, średniej wysokości i wysokiego).

## 2. Sejsmiczność terenów górniczych

Wstrząsy górnicze, które towarzyszą podziemnej eksploatacji złóż, są skutkiem pęknięcia skał najczęściej nad wyrobiskami górniczymi. Zjawisko to występuje samorzutnie, na skutek zachwiania naturalnego stanu równowagi skał. W twardych skałach nadkładowych zjawisko to przebiega w sposób gwałtowny (por. rys. 1a). Wydziela się wtedy duża ilość energii. Powoduje ona propagowanie się do powierzchni terenu fal sejsmicznych, wzbudzających z kolei drgania obiektów budowlanych (por. rys. 1b).



Rys. 1. Schemat: a) powstawania wstrząsu górniczego; b) oddziaływania wstrząsu typu sejsmicznego na obiekt budowlany [4]

Fig. 1. Scheme: a) the formation of mining tremor; b) the influence of mining tremor on a building structure [4]

Wstrząsy górnicze wzbudzone są losowo, poza kontrolą człowieka. Poza losowym charakterem występowania, wstrząsy pochodzenia górniczego charakteryzują się większą intensywnością w stosunku do innych źródeł drgań parasejsmicznych. Energie wstrząsów górniczych mogą dochodzić nawet do  $10^{10}$  J, przy czym ze względu na oddziaływanie tych wstrząsów na powierzchnię terenu, jako wstrząsy wysokoenergetyczne (silne i bardzo silne) traktuje się wstrząsy o energii  $10^6$  J i większej [5].

Przebiegi drgań powierzchniowych od wstrząsów górniczych wykazują pewne podobieństwa w stosunku do drgań wzbudzanych ruchami tektonicznymi

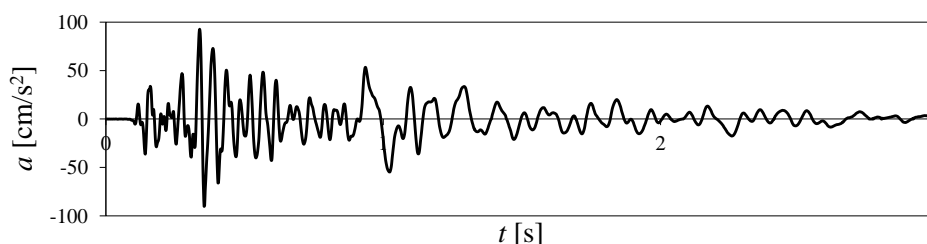
skorupy ziemskiej (trzęsieniami ziemi), ale też i różnice [14].

Parametrem, który wyraźnie odróżnia wstrząsy górnicze od trzęsień ziemi jest czas trwania intensywnej fazy przebiegów drgań [13, 14]. W przypadku trzęsień ziemi ten czas wynosi 20 s i więcej, a w przypadku wstrząsów górniczych 0,5 – 2,5 s.

Inną cechą różniącą wstrząsy górnicze i trzęsienia ziemi jest zasięg ich występowania. Intensywne drgania występują na ogół w obszarze do kilku, a nie kilkuset kilometrów, jak może być w przypadku trzęsień ziemi. Wstrząsy górnicze pojawiają się na określonych obszarach, ograniczonych zwykle do regionów górniczych.

Dominujące częstotliwości drgań powierzchniowych od trzęsień ziemi są dużo niższe niż od wstrząsów górniczych. Maksymalne wartości przyspieszeń drgań od wstrząsów górniczych osiągane są w zakresie częstotliwości 2,5–12,5 Hz, ale zdarza się dość często, że w paśmie 18–30 Hz, a nawet do 40 Hz [8]. W przypadku trzęsień ziemi jest to nie więcej niż kilka Hz.

Charakter przebiegów drgań powierzchniowych od wstrząsów górniczych jest bardzo nieregularny i złożony. Zmianie ulegają amplitudy drgań w czasie oraz częstotliwości, co przykładowo pokazano na rys. 2, a na dystansach kilkuset metrów występują znaczne wahania intensywności wstrząsów górniczych, niezależnie od różnic w lokalnej budowie geologicznej podłoża.



Rys. 2. Przykładowy przebieg poziomych drgań powierzchniowych (przyspieszeń) wzbudzonych wstrząsem górniczym o energii 3,5E7 J i odległości epicentralnej 655 m w LGOM

Fig. 2. Example of horizontal surface vibrations (accelerations) induced by rockburst with energy 3,5E7 J and epicentral distance 665 m in LGOM

Wstrząsy górotworu towarzyszące eksploatacji górniczej występują w wielu zagłębiach górniczych na świecie, np. w Wielkiej Brytanii, w Zagłębiu Ruhry w Niemczech, w Republice Południowej Afryki i w Stanach Zjednoczonych.

W Polsce powstawanie zjawisk sejsmicznych, czyli wstrząsów górniczych, związane jest z prowadzeniem eksploatacji w podziemnych kopalniach Górnośląskiego Zagłębia Węglowego (GZW) i Legnicko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego (LGOM) oraz w odkrywkowej kopalni węgla brunatnego w Bełchatowskim Okręgu Węgla Brunatnego (BOWB).

Najbardziej aktywnym sejsmicznie jest obszar LGOM. W rejonie LGOM zalegające nad złożem skały wapienno dolomitowe i anhydryty gromadzą ener-



gię sprężystą wyzwalając ją przy pękaniu. Również znaczna głębokość eksploatacji (600 – 1100 m) i stosowany sposób eksploatacji (na zawał) sprzyjają akumulacji energii. Najsilniejsze zjawiska sejsmiczne na tym terenie mają charakter słabych trzęsień ziemi.

Na terenach GZW i LGOM sejsmiczność jest monitorowana. Przebiegi drgań powierzchniowych są rejestrowane w powierzchniowych stacjach sejsmicznych. Czujniki umieszczone są na gruncie, na fundamencie budynku oraz na jego wyższych kondygnacjach. Celem monitoringu sejsmometrycznego jest ocena parametrów drgań w określonym punkcie powierzchni – pomiar rzeczywistego poziomu drgań powodowanych wstrząsami górnictwymi [6].

### 3. Spektra odpowiedzi drgań powierzchniowych w LGOM

Spektrum odpowiedzi zawiera informacje o wymuszeniu kinematycznym, a jego idea bazuje na przyjęciu modelu obiektu w postaci oscylatora, którego drgania wymuszane są ruchem podłoża. Jest to funkcja wyrażająca maksymalne wartości odpowiedzi (przyśpieszenia, prędkości, przemieszczenia) modeli oscylatorów na tego typu wymuszenie, w zależności od częstotliwości  $f$  (ewentualnie okresów  $T = 1/f$ ) drgań własnych oscylatorów oraz założonego tłumienia [1, 7]. Rozróżnia się spektrum przemieszczeniowe  $S_d$ , prędkościowe  $S_v$  i przyśpieszeniowe  $S_a$ . Wyrażają one odpowiedź oscylatora odpowiednio w przemieszczeniach i prędkościach względnych oraz w przyśpieszeniach bezwzględnych.

Maksymalna wartość bezwzględnego przyśpieszenia oscylatora (będąca sumą względnego przyśpieszenia oscylatora i przyśpieszenia podłoża) występującego w chwili  $t_m$  należącej do przedziału czasu  $[0, t_1]$  ( $t_1$  – czas trwania drgań) nosi nazwę bezwzględnego przyśpieszeniowego spektrum odpowiedzi  $S_a$ :

$$S_a(f_i, \xi) = \max_{t \in [0, t_1]} \left| \ddot{y}(t, f_i, \xi) + \ddot{x}_g(t) \right| \quad (1)$$

gdzie:  $f_i$  – częstotliwość drgań własnych oscylatora [Hz],

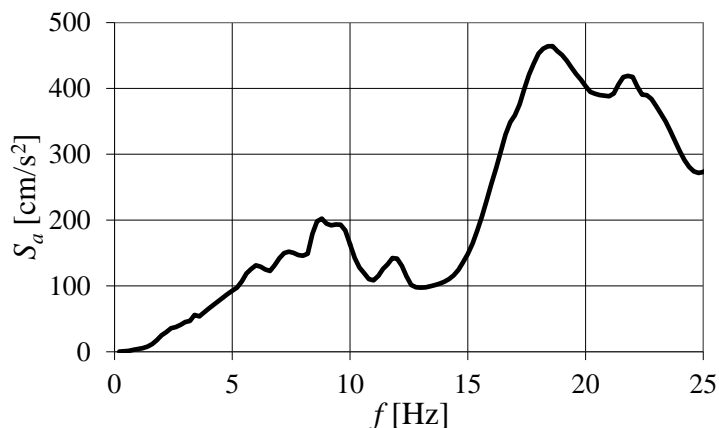
$\xi$  – ułamek tłumienia krytycznego,

$\ddot{y}(t, f_i, \xi)$  – odpowiedź oscylatora, względne przyśpieszenie drgań,

$\ddot{x}_g(t)$  – przyśpieszenie drgań podłoża.

Na rys. 3 przykładowo pokazano spektrum odpowiedzi  $S_a$  obliczone na podstawie przebiegu przyspieszeń drgań z rys. 2.

Z kolei tzw. unormowane (bezwymiarowe) przyśpieszeniowe spektrum odpowiedzi  $\beta$  powstaje jako wynik podzielenia wartości przyśpieszeniowego spektrum odpowiedzi przez maksymalną wartość przyśpieszenia drgań odpowiadającą poszczególnym akcelerogramom:



Rys. 3. Spektrum odpowiedzi  $S_a$  wyznaczone na podstawie przebiegu drgań z rys. 2

Fig. 3. Response spectrum  $S_a$  from vibrations presented in Fig. 2

$$\beta = \frac{S_a(f_i, \xi)}{a_{\max}} \quad (2)$$

gdzie:  $S_a$  – przyśpieszeniowe spektrum odpowiedzi,  
 $a_{\max}$  – maksymalne przyśpieszenie drgań.

Spektra odpowiedzi stosuje się przy projektowaniu konstrukcji, jak również do określania odporności dynamicznej istniejących budynków. Takie podejście dla rejonów sejsmicznych zalecają normy Eurocode8 (EC8) [16] i normy ISO [17] wykorzystują metodę spektrum odpowiedzi. Polska norma [18] również dopuszcza obliczanie sił bezwładności z uwzględnieniem przyśpieszeniowego spektrum odpowiedzi  $S_a$ . Instrukcja [19] zaleca stosowanie spektrum odpowiedzi jako narzędzia, które pełni istotną rolę w analizie dynamicznej obiektu poddanego działaniu wstrząsów górniczych.

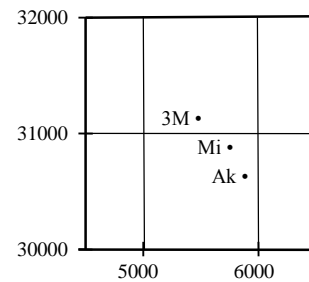
Ze względów praktycznych i ekonomicznych, w praktyce inżynierskiej nie jest możliwa rejestracja wymuszenia kinematycznego osobno dla każdego budynku i każdego wstrząsu. Dopuszcza się więc stosowanie tzw. uśrednionego spektrum odpowiedzi. Takie uśrednione spektra odpowiedzi przygotowuje się na podstawie bardzo dużej liczby zarejestrowanych przebiegów drgań, oddzielnie dla każdego regionu wstrząsów. Spektrum to ma określić spodziewaną maksymalną odpowiedź dla danych warunków lokalnych (określone źródła drgań, odległości epicentralne, rodzaj podłoża). Przy konstruowaniu spektrum uśrednionych korzysta się z pomiarów drgań od wielu wstrząsów o różnej intensywności. Z uwagi na to, że uśrednione spektrum powstaje na podstawie bardzo dużej liczby zarejestrowanych przebiegów drgań, pozwala na uogólnienie i może być trak-

towane jako znormalizowane, standardowe, wzorcowe spektrum odpowiedzi [12, 16, 17].

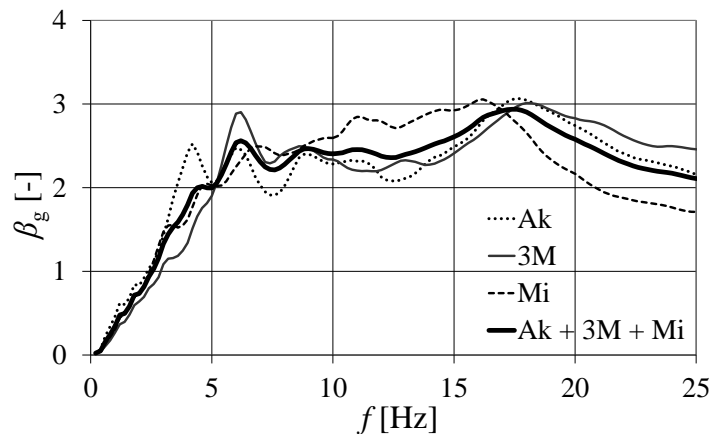
W celu scharakteryzowania drgań powierzchniowych w LGOM wykorzystano zapisy przebiegów składowych poziomych przyspieszeń drgań zarejestrowanych na trzech stacjach sejsmologicznych w Polkowicach. Na rys. 4 pokazano położenie stacji względem siebie w lokalnym układzie współrzędnych sejsmologicznych stosowanych w LGOM.

Rys. 4. Lokalizacja stanowisk pomiarowych Ak, 3M, Mi z uwzględnieniem lokalnych współrzędnych sejsmologicznych w LGOM

Fig. 4. Position of measuring stations Ak, 3M, Mi in the local seismological coordinates in LGOM



Dokonano selekcji zarejestrowanych przebiegów składowych poziomych  $x$ ,  $y$  przyspieszeń drgań gruntu. Kryterium selekcji była maksymalna wartość przyspieszenia przebiegu składowej drgań nie mniejsza niż  $10 \text{ cm/s}^2$ . Wykorzystując kilkaset obliczonych bezwymiarowych spektrum odpowiedzi (dla  $\xi = 3\%$ ) od składowych poziomych przebiegów przyspieszeń drgań, sporządzano uśrednione spektra, które następnie poddano iteracyjnej procedurze wygładzenia opisanej w [11]. Na rys. 5 pokazano uśrednione bezwymiarowe spektra odpowiedzi drgań

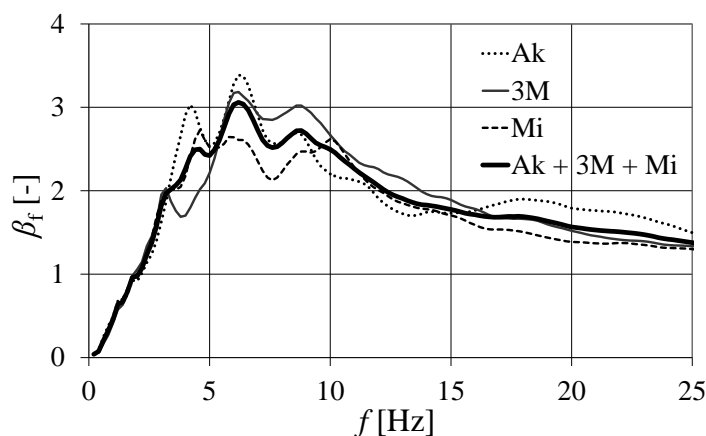


Rys. 5. Uśrednione bezwymiarowe spektra odpowiedzi drgań gruntu ze stanowisk Ak, 3M, Mi oraz wyznaczone łącznie na podstawie drgań ze wszystkich tych stanowisk

Fig. 5. Averaged dimensionless response spectra of ground vibrations from seismological stations at Ak, 3M, Mi and total spectrum designated on the basis of data from all stations

gruntu ze stanowisk Ak, 3M i Mi oraz łączne wyznaczone na podstawie przebiegów drgań pomierzonych na wszystkich ww. stanowiskach. Porównując te przebiegi uśrednionych bezwymiarowych spektrów odpowiedzi zauważa się ich różnice, co może dowodzić zmiennych warunków gruntowych na stacjach sejsmologicznych.

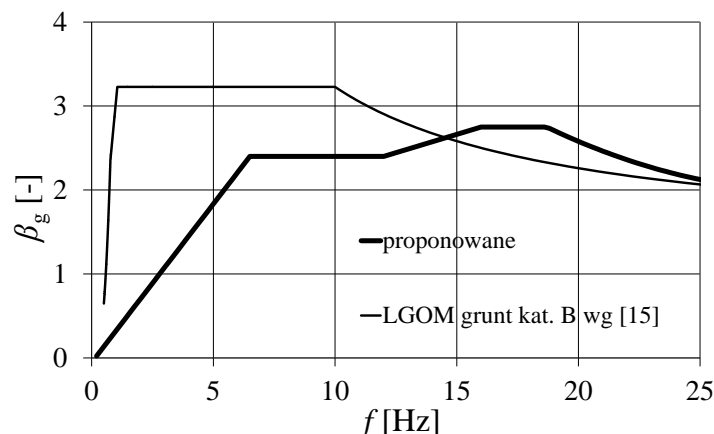
Dodatkowo na rys. 6 pokazano uśrednione bezwymiarowe spektra odpowiedzi otrzymane na podstawie drgań fundamentów budynków Ak, 3M, Mi (zarejestrowanych równocześnie z drganiami gruntu) oraz wyznaczone łącznie na podstawie drgań fundamentów budynków Ak, 3M, Mi. Porównując odpowiednie spektra z rys. 5 i rys. 6 zauważa się działanie budynku jako filtra dolnoprzepustowego. Wyraża się to spadkiem wartości spektrów obliczonych na podstawie przebiegów drgań fundamentów w zakresie częstotliwości powyżej 10 Hz.



Rys. 6. Uśrednione bezwymiarowe spektra odpowiedzi drgań fundamentów budynków Ak, 3M, Mi oraz wyznaczone łącznie na podstawie drgań ze wszystkich tych stanowisk

Fig. 6. Averaged dimensionless response spectra on the basis of foundation vibrations of buildings Ak, 3M, Mi and total spectrum designated on the basis of data from all stations

Wykorzystując uśrednione bezwymiarowe łączne spektrum odpowiedzi drgań gruntu wyznaczone na podstawie drgań pomierzonych na stanowiskach Ak, 3M, Mi, zaproponowano wzorcowe (standardowe) spektrum odpowiedzi o prawdopodobieństwie przekroczenia równym 50%, tzw. uniform risk spectrum – por. rys. 7. Opisy matematyczne gałęzi krzywych spektralnych zestawiono w tabeli 1. Zaproponowane spektrum porównane zostało ze spektrum podanym w [15] do wykorzystania w LGOM dla kategorii gruntu B (ten przypadek gruntu dominuje w obrębie Polkowic). Krzywa spektralna z [15] została przeskalowana z użyciem współczynnika  $\eta = \sqrt{5/\xi}$ , w którym przyjęto  $\xi = 3\%$  (w celu ujednoczenia tłumienia).



Rys. 7. Porównanie proponowanego dla LGOM wzorcowego (standardowego) spektrum odpowiedzi ze spektrami z [15]

Fig. 7. Comparison of the proposed standard response spectrum for LGOM with spectrum from [15]

Porównanie zaproponowanej krzywej wzorcowej z krzywą z [15] wskazuje na istotne różnice. Podane w [15] spektrum sporządzone zostało na podstawie danych pomiarowych dotyczących tylko najsilniejszych wstrząsów i przebiegów drgań z dominującymi składowymi z niskimi częstotliwościami, z myślą o spektrum przydatnym przede wszystkim do projektowania czy weryfikacji budynków wysokich z rejonu Polkowic. Proponowana krzywa z rys. 7, która powstała z wykorzystaniem kilkuset pomierzonych, różnych przebiegów drgań (z założeniem, że maksymalna wartość przyspieszenia przebiegu składowej drgań jest nie mniejsza niż  $10 \text{ cm/s}^2$ ), jest przydatna do stosowania w przypadku budynków niższych.

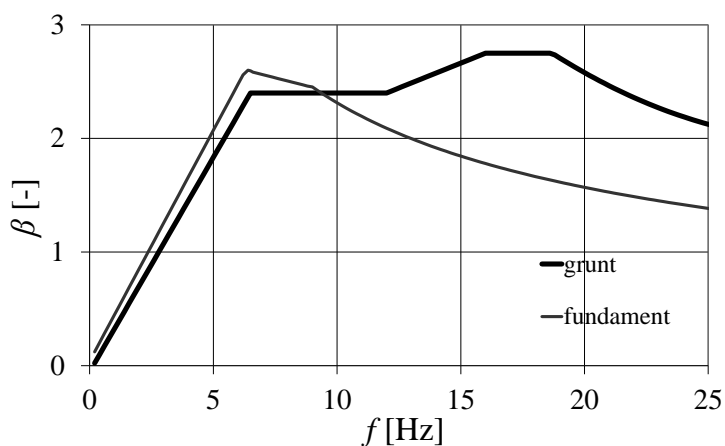
Tabela 1. Opis matematyczny proponowanego spektrum wzorcowego  $\beta_g$  z rys. 7

Table 1. The mathematical description of the proposed standard response spectrum  $\beta_g$  from Fig. 7

$f$ [Hz]	Równanie $\beta_g$
(0, 6,5]	$0,3775 \cdot f - 0,0540$
(6,5, 12,0]	2,4
(12,0, 16,0]	$0,0875 \cdot f + 1,3500$
(16,0, 18,6]	2,75
(18,6, 25,0]	$0,0063 \cdot f^2 - 0,3744 \cdot f + 7,5472$

Na rys. 8 pokazano porównanie krzywych wzorcowych spektrów uzyskanych na podstawie drgań gruntu i fundamentów. Krzywe te istotnie różnią się

i dowodzą istotnego tłumiącego wpływu drgań przez budynki. Opisy matematyczne gałęzi krzywych spektralnych uzyskanych na podstawie drgań fundamentów budynków zestawiono w tabeli 2.



Rys. 8. Porównanie proponowanego dla LGOM wzorcowego (standardowego) spektrum odpowiedzi wyznaczonego na podstawie drgań gruntu i fundamentów budynków

Fig. 8. Comparison of the proposed standard response spectrum from ground and foundation vibrations

Tabela 2. Opis matematyczny spektrum wzorcowego  $\beta_f$  z rys. 8

Table 2. The mathematical description of the proposed standard response spectrum  $\beta_f$  from Fig. 8

$f$ [Hz]	Równanie $\beta_f$
(0, 6,5]	$0,4063 \cdot f - 0,0410$
(6,5, 9,2]	$-0,0556 \cdot f + 2,9615$
(9,2, 25,0]	$8,6522 \cdot f^{-0,568}$

#### 4. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono propozycję wzorcowego spektrum odpowiedzi drgań gruntu do wykorzystania w projektowaniu w rejonie LGOM. Postać tego spektrum bazuje na wynikach setek pomiarów przebiegów drgań.

Opracowane wzorcowe spektra odpowiedzi na podstawie równoczesnych zapisów składowych poziomych drgań gruntu i budynków pozwoliły na doświadczalne określenie zjawiska dynamicznej interakcji grunt – budynek. Widać różnice w dominujących pasmach częstotliwości drgań, zwłaszcza w paśmie powyżej 10 Hz.

## Literatura

- [1] Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli, Arkady, Warszawa 1998.
- [2] Ciesielski R., Maciąg E.: Drgania drogowe i ich wpływ na budynki, WKiŁ, Warszawa 1990.
- [3] Juhásová E.: Pôsobenie seizmických pohybov na stavebné konštrukcie, VEDA Vydavateľstvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava 1985.
- [4] Kuźniar K.: Sieci neuronowe w analizie drgań budynków wywołanych wstrząsami parasejsmicznymi i sejsmicznymi, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2013.
- [5] Kuźniar K., Maciąg E., Tataro T.: Prognozowanie spektrów odpowiedzi drgań fundamentów budynków od wstrząsów górniczych z zastosowaniem sieci neuronowych, Prace Naukowe GIG. Górnictwo i Środowisko, nr 4/4/2010, 50-64.
- [6] Kwiatek J. (red.): Ochrona obiektów budowlanych na terenach górniczych, Wyd. GIG, Katowice 1998.
- [7] Maciąg E.: Interakcja układu budynek-podłoże podlegającego działaniom sejsmicznym i parasejsmicznym (praca przeglądowa), Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 17, 4, 1979, 497-536.
- [8] Maciąg E.: Drgania powierzchniowe w LGOM i ich oddziaływanie na zabudowę, XXV Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Kraków 2002, 395-410.
- [9] Naem F. (ed.): The seismic design handbook, Boston, Kluwer 2001.
- [10] Sokołow W.J.: Ocena wierojątnych spektrów kolebanij gruntu spektrów reakcji s ucietom łokalnych gruntowych usłowij, [w:] Kompleksnaja ocenka sejsmiczieskoj opasnosti, Woprosy inżeniernoj sejsmologii, Wypusk 32, Moskwa 1991.
- [11] Tataro T.: Działanie drgań powierzchniowych wywołanych wstrząsami górniczymi na niską tradycyjną zabudowę mieszkalną, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, seria Inżynieria Lądowa, nr 74, Kraków 2002.
- [12] Tataro T.: Odporność dynamiczna obiektów budowlanych w warunkach wstrząsów górniczych, Wyd. PK, Kraków 2012.
- [13] Trifunac M. B., Brady A. G.: A study on the duration of strong earthquake ground motion, Bull. Seismol. Soc. Am., 65, 1975, 581-626.
- [14] Zembaty Z.: Rockburst induced ground motion – a comparative study, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 24, 2004, 11-23.
- [15] Zembaty Z.: Prędkościowa koncepcja oceny intensywności wstrząsów górniczych dla celów projektowania budowli narażonych na wstrząsy górnicze. [w:] Zagrożenia i technologie. Praca zbiorowa pod red. J. Kabiesza, Katowice, GIG, 2012, 405 - 411.
- [16] EN 1998-1 Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings, (European standard EN 1998, January 2014).
- [17] ISO/DIS 3010, Basis for design of structures – Seismic actions on structures, wersja z 2000r.
- [18] PN-85/B-02170, Ocena szkodliwości drgań przekazywanych przez podłoże na budynki.
- [19] Wymagania techniczne dla obiektów budowlanych wznoszonych na terenach górniczych, Instrukcja 364/2000, ITB, Warszawa 2000.

## NORMALIZED RESPONSE SPECTRA FROM SURFACE VIBRATIONS INDUCED BY MINING TREMORS

### Summary

The paper deals with one of the methods of kinematic loads describing - using the re-sponse spectra. It also presents the proposition of the drawn up standard acceleration re-sponse spectrum for the most seismically active mining area in Poland – Legnica-Glogow Coppefield (LGOM). This type of spectrum can be applied for approximate dynamic analyzes. This spectrum was determined on the basis of ground vibrations recorded over several years at three measuring stations. Only the selected vibrations with amplitudes not less than  $10\text{cm/s}^2$  were taken into account in the calculations, hundreds in total. The statement of the average dimensionless acceleration response spectra prepared for each of the station separately, enables to determine the effect of soil conditions on the form of the resulting spectrum. A comparison of the proposed standard spectrum with corresponding spectra given in the literature was performed, showing and analyzing the differences. In addition, the proposed standard response spectrum prepared on the basis of ground vibrations was compared with the spectrum from foundation vibrations (for three types of buildings: low, medium-height, high). These curves are markedly different and show a strong damping of higher frequencies by buildings.

**Keywords:** standard response spectrum, mining tremors, records of vibrations, experimental tests

DOI:10.7862/rb.2014.30

*Przesłano do redakcji: 30.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



Roman LEWANDOWSKI<sup>1</sup>

Mieczysław SŁOWIK<sup>2</sup>

## MODELOWANIE MECHANICZNEGO ZACHOWANIA CIECZY UŻYWANEJ W TŁUMIKACH DRGAŃ

W pracy rozważa się możliwość zastosowania tzw. ułamkowych modeli reologicznych do opisu dynamicznego zachowania cieczy o bardzo dużej lepkości. Ciecz ta jest często stosowana w pasywnych tłumikach drgań. Bierze się pod uwagę ułamkowe modele reologiczne o trzech i czterech parametrach. Posłużono się rezultatami własnych badań w procedurze identyfikacji parametrów modeli. Dyskutuje się wpływ temperatury cieczy i wpływ amplitudy drgań na wartości parametrów modeli. Wykazano, że ułamkowy, trójparametrowy model Maxwella umożliwia wystarczająco dokładny opis dynamicznego zachowania rozpatrywanej cieczy.

**Słowa kluczowe:** ciecz lepkosprężysta, badania eksperymentalne, ułamkowe modele reologiczne, identyfikacja parametrów

### 1. Wprowadzenie

Ciecze o bardzo dużej lepkości są często stosowane do budowy lepko-sprężystych, cieczowych tłumików drgań. Istnieje wiele typów takich tłumików. W firmie GERB zaprojektowano tłumik schematycznie pokazany na rys. 1. Jest on używany do redukcji drgań rurociągów i jako element układu izolacji sejsmicznej. Cylinder jest wypełniony żelem silikonowym; cieczą o bardzo dużej lepkości. Ruch tłoka powoduje odkształcenia cieczy i dyssypację energii. Innym typem tłumika cieczowego jest tzw. ściana tłumiąca, pokazana schematycznie na rys. 1. W tym rozwiązaniu funkcję tłoka pełni stalowa płyta poruszająca się w swej płaszczyźnie i zanurzona w wąskim stalowym kontenerze wypełnionym cieczą o dużej lepkości. Urządzenie to jest zwykle umieszczone na stropie budynku, przy czym płyta stalowa jest przymocowana do stropu górnej kondygnacji.

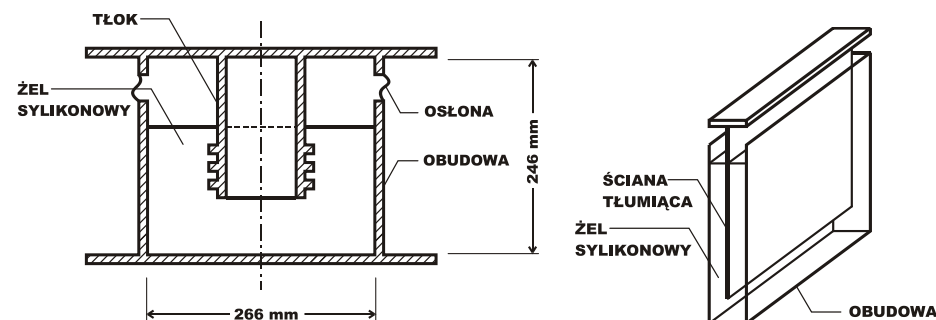
---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Roman Lewandowski, Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, 60-965 Poznań, ul. Piotrowo 5, tel. (61) 665 2472, e-mail: roman.lewandowski@put.poznan.pl

<sup>2</sup> Mieczysław Słowik, Politechnika Poznańska, Instytut Inżynierii Lądowej, 60-965 Poznań, ul. Piotrowo 5, tel. (61) 665 2487, e-mail: mieczyslaw.slowik@put.poznan.pl

cji, a pojemnik do stropu dolnej kondygnacji. Względne ruchy obu stropów powodują ruch ściany tłumiącej względem kontenera, ścinanie cieczy i rozpraszanie energii. Lepkość cieczy powinna być bardzo duża, aby efekty tłumienia były znaczące. Właściwości cieczy używanych w tego typu tłumikach w istotny sposób zależą od częstości wymuszenia i temperatury cieczy.

Właściwości tłumików cieczowych zazwyczaj określa się wykonując odpowiednie badania dynamiczne tłumików [1], a ich zachowanie opisuje się za pomocą różnorodnych modeli reologicznych [2 - 4]. Podejście to wymaga wykonania żmudnych i kosztownych badań doświadczalnych, które należy wykonać dla każdego rodzaju tłumika. Zwykle badania te można przeprowadzić dla niskich częstości wymuszenia, a kontrola temperatury w trakcie badań jest bardzo utrudniona.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie cieczowych tłumików drgań

Fig. 1. Schematic view of fluids dampers

W kilku pracach podjęto próbę numerycznego modelowania zachowania cieczowego tłumika drgań [5, 6]. To podejście stwarza możliwość ograniczenia zakresu badań doświadczalnych tłumików. Wymagana jest jednak znajomość właściwości cieczy używanych do wykonania omawianych tłumików. Badania cieczy o bardzo dużej lepkości, dla dużego zakresu częstości wymuszenia oraz precyzyjnie ustalonej temperatury cieczy można w standardowy sposób przeprowadzić przy użyciu reometru. Wyniki tak przeprowadzonych badań mogą być użyte w numerycznym modelu zachowania tłumika.

Ciecze o bardzo dużej lepkości stosowane w tłumikach drgań, są tzw. cieczami nienewtonowskimi, a ich równania konstytutywne często zawierają pochodne ułamkowego rzędu [7, 8].

W pracy omawia się rezultaty badań cieczy o bardzo dużej lepkości, z użyciem reometru dynamicznego ścinania. Przedstawiono również wyniki identyfikacji modelu reologicznego i jego parametrów i na tej podstawie ustalono równanie konstytutywne badanej cieczy. Badaniom poddano ciecz o nazwie polydimethylsiloxane ( $C_2H_6OSi$ ) często używaną do wykonania tłumików cieczowych.

## 2. Opis przeprowadzonych badań

Badania omawianej cieczy zostały przeprowadzone w Laboratorium Badawczym Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Poznańskiej w 2011 roku. Badania wykonano za pomocą reometru dynamicznego ścinania DSR (ang. Dynamic Shear Rheometer) typu Physica MCR 101 produkcji niemieckiej firmy Anton Paar Germany GmbH. Reometr DSR zastosowany w badaniach ma następujące parametry: zakres momentu obrotowego: od 0,5  $\mu\text{Nm}$  do 125  $\text{mNm}$ ; zakres prędkości obrotowej: od  $10^{-4} \text{ min}^{-1}$  do  $3 \cdot 10^3 \text{ min}^{-1}$ , zakres częstotliwości wymuszenia: od  $10^{-4} \text{ Hz}$  do  $10^2 \text{ Hz}$ .

W badaniach wykorzystano układ pomiarowy składający się z dwóch metalowych płyt równoległych o średnicy  $\varnothing = 25 \text{ mm}$ . Próbki badanego materiału umieszczano w szczelinie pomiędzy dwiema płytami, której szerokość przyjmowano równą 1,0 mm. W napędzie układu pomiarowego zastosowane jest łożysko powietrzne, dzięki czemu zostały zminimalizowane opory tarcia podczas ruchu oscylacyjnego płyty ruchomej.

Przeprowadzono badania cieczy w różnych temperaturach. Temperatura badanej cieczy była równa:  $20^\circ\text{C}$  oraz  $50^\circ\text{C}$  i była utrzymywana z tolerancją  $\pm 0,1^\circ\text{C}$ .

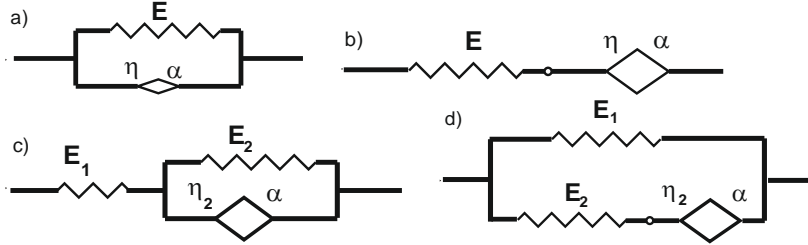
Ciecz pobudzano do ruchu oscylacyjnego, sinusoidalnie zmiennego wywołując przemieszczenia kątowe płyty ruchomej. Wykonano badania przyjmując różne amplitudy przemieszczeń kątowych płyty. Amplitudy te były równe: 0,01 mrad; 0,1 mrad; 1 mrad; 10 mrad; 20 mrad oraz 100 mrad. Przy ustalonej temperaturze i zadanej amplitudzie wymuszenia wykonywano badania dla różnych częstotliwości wymuszenia wziętych z przedziału  $10^{-1} - 10^2 \text{ Hz}$ . Reometr mierzy szereg wielkości fizycznych, z których najistotniejsze znaczenie dla dalszych rozważań mają: zespolony moduł ścinania  $|G^*|$  oraz kąt przesunięcia fazowego  $\varphi$ .

## 3. Opis ułamkowych modeli reologicznych

Istnieje szereg modeli reologicznych opisujących właściwości cieczy o dużej lepkości. Modele te można podzielić na klasyczne modele reologiczne i tzw. ułamkowe modele reologiczne [3, 4]. Tych ostatnich używa się do opisu właściwości omawianej cieczy. Analizowano możliwości użycia czterech ułamkowych modeli reologicznych: a) trójparametrowego modelu Kelvina (K3), b) trójparametrowego modelu Maxwella (M3), c) czteroparametrowego modelu standardowego (S4) i d) czteroparametrowego modelu Zenera (Z4).

Schematy mechaniczne omawianych modeli pokazano na rys. 2, na którym za pomocą rombu przedstawiono tzw. element sprężysto-tłumiący (the spring-pot element). Równanie konstytutywne tego elementu ma postać:

$$\sigma(t) = \eta D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (1)$$



Rys. 2. Schematyczne przedstawienie ułamkowych modeli reologicznych, a) trójparametrowy model Kelvina (K3), b) trójparametrowy model Maxwella (M3), c) czteroparametrowy model standardowy (S4), d) czteroparametrowy model Zenera (Z4)

Fig. 2. Schematic view of fractional rheological models, a) three-parameter Kelvin model (K3), b) three-parameter Maxwell model (M3), c) fourth-parameter standard model (S4), d) fourth-parameter Zener model (Z4)

gdzie  $\sigma(t)$  jest naprężeniem ścinającym,  $\varepsilon(t)$  odkształceniem postaciowym,  $\eta$  jest lepkością dynamiczną. Symbol  $t$  oznacza czas, a symbol  $D_t^\alpha x(t)$  pochodną ułamkową Riemanna-Liouville'a rzędu  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , zdefiniowaną w następujący sposób:

$$D_t^\alpha x(t) \equiv \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)} ds, \quad (2)$$

gdzie symbolem  $\Gamma$  oznaczono funkcję specjalną gamma, (patrz [10]).

Równania trójparametrowych modeli Kelvina i Maxwella mają odpowiednio postać:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + E\tau^\alpha D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad \sigma(t) + \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) = \tau^\alpha E D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (3)$$

gdzie  $E$  jest modułem sprężystości, a  $\tau^\alpha = \eta/E$ .

Zachowanie modeli czteroparametrowych jest opisane równaniem:

$$\sigma(t) + \tau^\alpha D_t^\alpha \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty D_t^\alpha \varepsilon(t), \quad (4)$$

W modelu standardowym  $E_0 = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ ,  $E_\infty = E_1$ ,  $\tau^\alpha = \eta_2 / (E_1 + E_2)$ , a w modelu Zenera  $E_\infty = E_1 + E_2$ ,  $\tau^\alpha = \eta_2 / E_2$ ,  $E_0 = E_1$ . Znaczenie symboli  $E_1$  i  $E_2$  objaśniono na rys. 2.

Ważnymi charakterystykami modeli reologicznych jest dynamiczny moduł sprężystości  $E'(\lambda)$  i moduł rozpraszania energii  $E''(\lambda)$ . Moduły te wyznacza się zakładając, że zmiany naprężenia i odkształcenia w czasie opisują funkcje  $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(i\lambda t)$ ,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i\lambda t)$ , gdzie  $\lambda$  jest częstotliwością drgań. Po wykonaniu stosownych przekształceń otrzymuje się następujące zależności:

$$E'(\lambda) = \frac{E_0 + (E_0 + E_\infty)(\tau\alpha)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + E_\infty(\tau\alpha)^{2\alpha}}{1 + 2(\tau\alpha)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\tau\alpha)^{2\alpha}}, \quad (5)$$

$$E''(\lambda) = \frac{(E_\infty - E_0)(\tau\alpha)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + 2(\tau\alpha)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\tau\alpha)^{2\alpha}}, \quad (6)$$

w przypadku modeli czteroparametrowych oraz

$$E'(\lambda) = E + E(\tau\alpha)^\alpha \cos(\alpha\pi/2), \quad E''(\lambda) = E(\tau\alpha)^\alpha \sin(\alpha\pi/2), \quad (7)$$

$$E'(\lambda) = E(\tau\alpha)^\alpha \frac{(\tau\alpha)^\alpha + \cos(\alpha\pi/2)}{1 + 2(\tau\alpha)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\tau\alpha)^{2\alpha}}, \quad (8)$$

$$E''(\lambda) = E(\tau\alpha)^\alpha \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{1 + 2(\tau\alpha)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (\tau\alpha)^{2\alpha}}, \quad (9)$$

w przypadku odpowiednio trójparametrowego modelu Kelvina i Maxwella (patrz [4]).

W zastosowanej procedurze identyfikacji parametrów modeli reologicznych istotna jest znajomość rozwiązania problemu drgań ustalonych cieczy. Stan ustalony drgań harmonicznie zmiennych cieczy opisywany jest równaniami (patrz [4]):

$$\sigma(t) = \sigma_c \cos \lambda t + \sigma_s \sin \lambda t, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_c \cos \lambda t + \varepsilon_s \sin \lambda t, \quad (10)$$

a zależności między współczynnikami  $\sigma_c$ ,  $\sigma_s$ ,  $\varepsilon_c$  i  $\varepsilon_s$  mają postać:

$$\sigma_c = E'(\lambda)\varepsilon_c + E''(\lambda)\varepsilon_s, \quad \sigma_s = -E''(\lambda)\varepsilon_c + E'(\lambda)\varepsilon_s, \quad (11)$$

#### 4. Ogólny opis metody identyfikacji

Zastosowano procedurę identyfikacji parametrów szczegółowo opisaną w [11]. Tutaj pokrótce omawia się sformułowanie problemu identyfikacji jako zadania optymalizacji. Zakłada się, że dysponuje się, dla zadanej amplitudy odkształceń i temperatury, ciągiem wartości modułów  $E'_{ei}(\lambda_i)$  i  $E''_{ei}(\lambda_i)$  wyznaczonych doświadczalnie dla zbioru częstości wymuszenia  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Parametry modeli reologicznych ( $E_0$ ,  $E_\infty$ ,  $\tau$  i  $\alpha$  w przypadku modeli czteroparametrowych oraz  $E$ ,  $\tau$  i  $\alpha$  w przypadku modeli trójparametrowych) dobiera się tak, aby zminimalizować wartość funkcjonału o postaci:

$$J = \sum_{i=1}^n \left[ (E'_{ei}(\lambda_i) - E'_i(\lambda_i))^2 + (E''_{ei}(\lambda_i) - E''_i(\lambda_i))^2 \right], \quad (12)$$

przy ograniczeniach

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \tau > 0, \quad E_\infty > E_0 > 0, \quad (13)$$

jeżeli rozpatruje się modele czteroparametrowe lub z ograniczeniami

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \tau > 0, \quad E > 0, \quad (14)$$

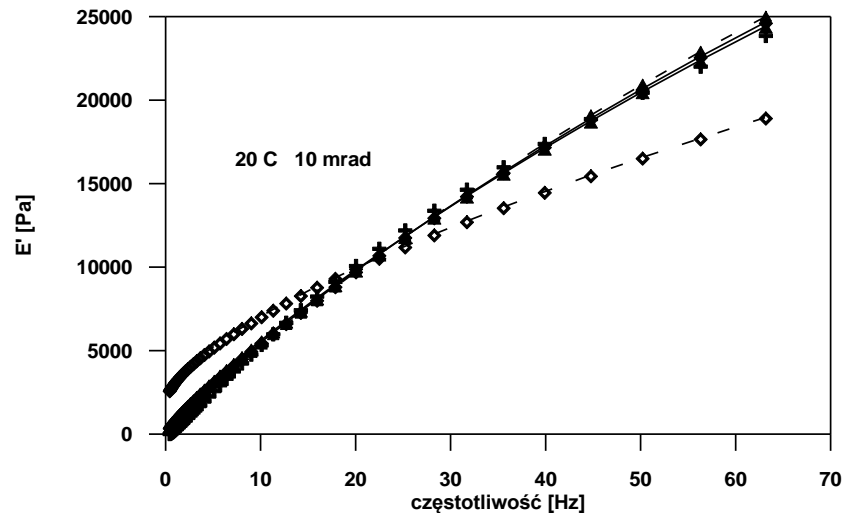
jeżeli rozpatruje się modele trójparametrowe.

Powyższe zadanie optymalizacji rozwiązano metodą roju cząstek (the particle swarm optimization method) opisaną np. w pracach [11, 12]. Każde zadanie optymalizacji rozwiązywano 50 razy. W obliczeniach zastosowano rój liczący 20 cząstek. Każda cząstka roju poszukiwała optymalnego zbioru parametrów identyfikacji zmieniając 500 razy swoje położenie. Jako rozwiązanie problemu przyjmowano najlepsze ze wszystkich otrzymanych położań cząstek roju, tzn. takie położenie, dla którego wartość funkcjonału (12) była najmniejsza i równocześnie były spełnione ograniczenia (13) lub (14).

## 5. Wyniki identyfikacji

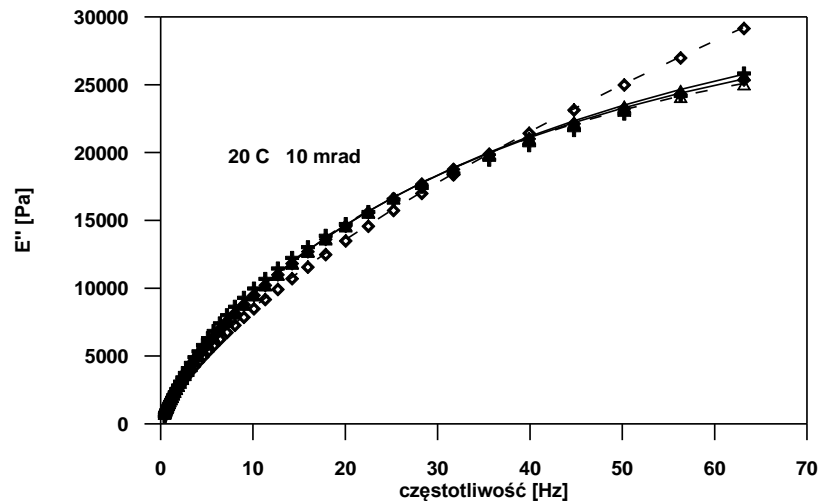
Typowe wyniki identyfikacji przedstawiono na rys. 3 i 4, na których pokazano moduły  $E'$  (rys. 3) i  $E''$  (rys. 4) w zależności od częstotliwości wymuszenia  $\lambda$ . Na wspomnianych rysunkach wartości modułów  $E'$  i  $E''$  otrzymane z pomiarów zaznaczono krzyżykami (+), wartości tych modułów wyznaczone za pomocą modeli reologicznych przy pomocy nie zaczernionych rombów ( $\diamond$ , model K3), nie zaczernionych trójkątów ( $\Delta$ , model M3), zaczernionych rombów ( $\blacklozenge$ , model S4) i zaczernionych trójkątów ( $\blacktriangle$ , model Z4). Wyniki doświadczalne dotyczą badania wykonanego w temperaturze 20°C. Amplituda drgań skrętnych wynosiła 10 mrad, a dane doświadczalne otrzymano dla częstotliwości z przedziału od 0,3 Hz do 63,0 Hz. Widać, że trójparametrowy, ułamkowy model Kelvina nie opisuje poprawnie właściwości omawianej cieczy. Pozostałe modele opisują te właściwości w sposób zadawalający. Wobec tego w dalszej części pracy opisano wyniki identyfikacji uzyskane dla ułamkowych modeli Maxwella, standardowego i Zenera.

Wartości parametrów tych modeli zestawiono w Tabeli 1. Z tego zestawienia wynika, że właściwości omawianej cieczy mogą być opisane za pomocą trójparametrowego, ułamkowego modelu Maxwella. Wartości lepkości dynamicznej ( $\eta$  lub  $\eta_2$ ) we wszystkich modelach są zbliżone (maksymalne różnice około 3%), ponadto w modelu standardowym moduł sprężystości  $E_2 = 0$ , a w modelu Zenera  $E_1 = 0$ . Oznacza to, że modele czteroparametrowe redukują się do trójparametrowego modelu Maxwella. Różnice między wartościami modułów sprężystości  $E$  wynoszą około 8%. Wartości parametru  $\alpha$  (rzędu pochodnej ułamkowej) różnią się od siebie o mniej niż 3%.



Rys. 3. Porównanie wyników identyfikacji – zależność modułu  $E'$  od częstotliwości wymuszenia, wyniki doświadczalne (+), model Kelvina (K3) ( $\diamond$ ), model Maxwella M3 ( $\Delta$ ), model standardowy S4 ( $\blacklozenge$ ), model Zenera Z4 ( $\blacktriangle$ )

Fig. 3. Comparison of identification results – modulus  $E'$  vs. Excitation frequency, experimental results (+), Kelvin model (K3) ( $\diamond$ ), Maxwell model M3 ( $\Delta$ ), standard model S4 ( $\blacklozenge$ ), Zener model Z4 ( $\blacktriangle$ )



Rys. 4. Porównanie wyników identyfikacji – zależność modułu  $E''$  od częstotliwości wymuszenia, wyniki doświadczalne (+), model Kelvina (K3) ( $\diamond$ ), model Maxwella M3 ( $\Delta$ ), model standardowy S4 ( $\blacklozenge$ ), model Zenera Z4 ( $\blacktriangle$ )

Fig. 4. Comparison of identification results – modulus  $E''$  vs. Excitation frequency, experimental results (+), Kelvin model (K3) ( $\diamond$ ), Maxwell model M3 ( $\Delta$ ), standard model S4 ( $\blacklozenge$ ), Zener model Z4 ( $\blacktriangle$ )

Tabela 1. Wartości stałych różnych modeli cieczy

Table 1. Values of parameters of different models of fluids

Model	$E$ lub $E_1$ [Pa]	$\eta$ lub $\eta_2$ [Pa·s $^\alpha$ ]	$E_2$ [Pa]	$\alpha$ [-]
Maxwella	85931,0	2060,9	-	0,7500
Standardowy	92931,0	2129,4	0,0	0,7369
Zenera	0,0	2067,8	88898,4	0,7301

W Tabeli 2 zestawiono wartości parametrów modelu Maxwella oraz modelu standardowego dla trzech różnych amplitud drgań skrętnych reometru. Widać, że w analizowanym przedziale amplitud drgań wartości parametrów są w przybliżeniu stałe.

Tabela 2. Zależność wartości parametrów od amplitudy drgań skrętnych reometru

Table 2. Dependence of parameter values on amplitudes of torsion vibration of rheometer

Amplituda [mrad]	Model Maxwella			Model standardowy			
	$E$ [Pa]	$\eta$ [Pa·s $^\alpha$ ]	$\alpha$ [-]	$E_1$ [Pa]	$E_2$ [Pa]	$\eta$ [Pa·s $^\alpha$ ]	$\alpha$ [-]
0,10	80614,7	2038,84	0,7544	80362,8	168,4	1999,2	0,7595
1,00	87876,0	2095,16	0,7470	96591,5	187,4	2172,0	0,7325
10,0	85931,0	2060,90	0,7500	92931,0	0,0	2129,4	0,7369

W Tabeli 3 pokazano zmiany wartości parametrów modelu Maxwella w zależności od zmiany przedziału częstotliwości wymuszenia, dla którego wykonuje się badania eksperymentalne. Obliczenia wykonano dla drgań o amplitudzie 10 mrad wykonywanych w temperaturze 20<sup>0</sup>C. Widać istotne różnice w wartościach parametrów modelu ułamkowego Maxwella. Oznacza to, że wyników identyfikacji nie można zbyt rozszerzać poza przedział częstotliwości wymuszenia, dla którego wykonano badania doświadczalne. Podobne uwagi można znaleźć w opracowaniach dotyczących identyfikacji parametrów klasycznych modeli reologicznych.

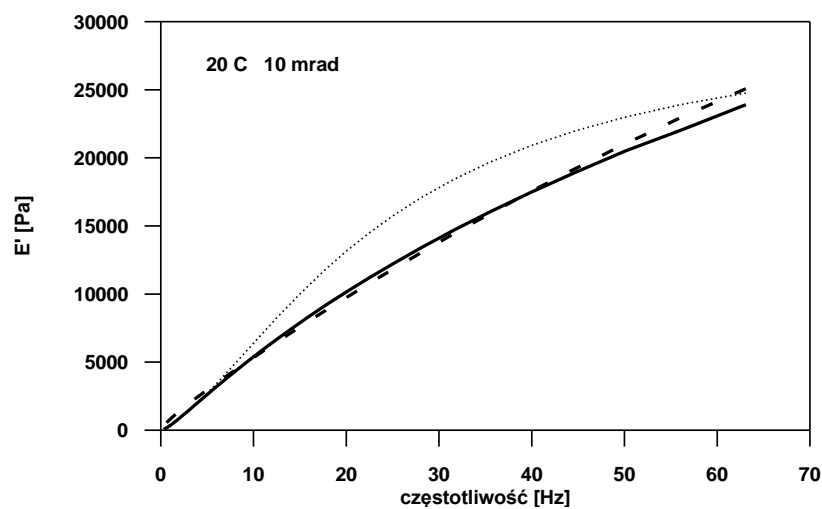
Na rys. 5 i 6 pokazano, w jaki sposób omawiane różnice wartości parametrów ułamkowego modelu Maxwella wpływają na przebieg funkcji  $E'(\lambda)$  i  $E''(\lambda)$ . Na wspomnianych rysunkach linią ciągłą pokazano wartości modułów  $E'(\lambda)$  i  $E''(\lambda)$  otrzymane na podstawie wyników badań, linią kreskowaną krzywe  $E'(\lambda)$  i  $E''(\lambda)$  wyznaczone przy użyciu wartości parametrów modelu



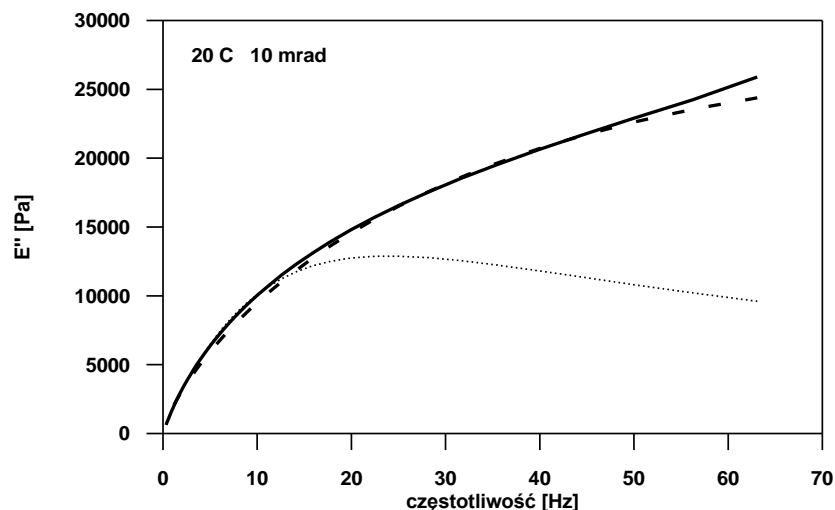
Tabela 3. Zależność wartości parametrów od przedziału częstotliwości wymuszenia

Table 3. Dependence of parameter values on a range of excitation frequencies

Przedział częstotliwości [Hz]	Model Maxwella		
	$E$ [Pa]	$\eta$ [Pa · s $^\alpha$ ]	$\alpha$ [-]
0,3 – 63,0	80614,7	2038,8	0,7544
0,3 – 50,0	75925,2	1992,2	0,7676
0,3 – 43,0	68786,9	1941,9	0,6009
0,3 – 28,0	60248,8	1885,1	0,8033
0,3 – 20,0	52960,2	1843,2	0,8229
0,3 – 10,0	40452,7	1793,3	0,8602
0,3 – 5,0	30474,4	1781,8	0,8937

Rys. 5. Przebieg funkcji  $E'(\lambda)$  dla różnych wartości parametrów modelu Maxwella M3Fig. 5. Course of function  $E'(\lambda)$  for different values of parameters of the Maxwell model M3

Maxwella wziętych z pierwszego wiersza Tabeli 3, a linią kropkowaną krzywe  $E'(\lambda)$  i  $E''(\lambda)$  wyznaczone przy użyciu wartości parametrów wziętych z ostatniego wiersza Tabeli 3. Widać, że nie można stałych modelu wyznaczonych na



Rys. 6. Przebieg funkcji  $E''(\lambda)$  dla różnych wartości parametrów modelu Maxwella M3

Fig. 6. Course of function  $E''(\lambda)$  for different values of parameters of the Maxwell model M3

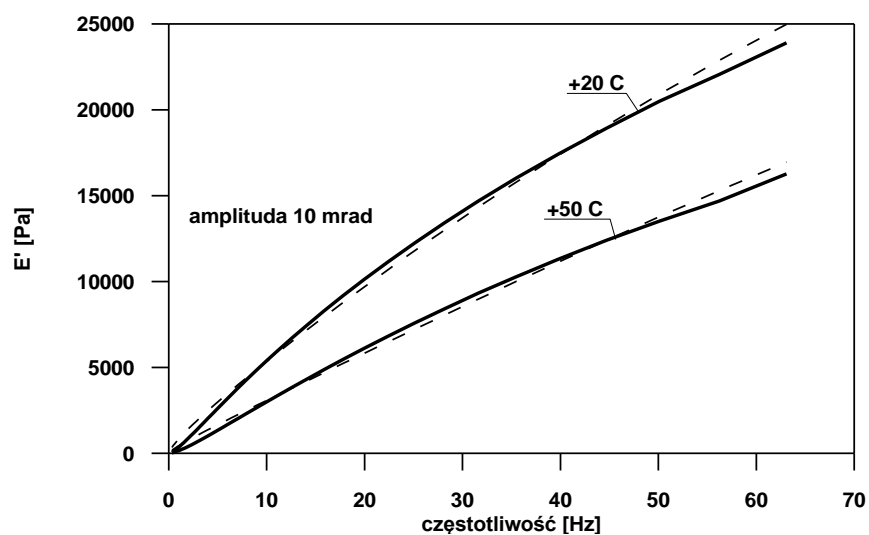
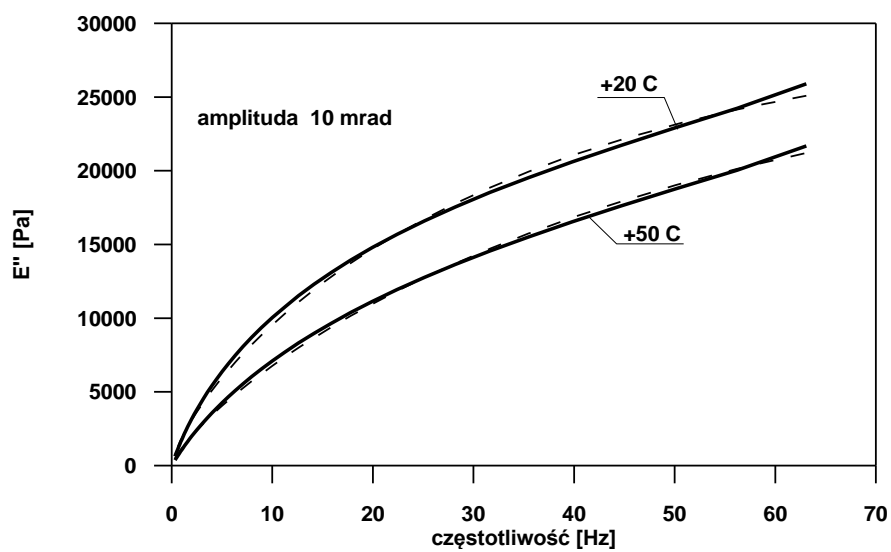
podstawie badań wykonanych w małym przedziale częstotliwości wymuszenia używać do obliczania omawianych modułów poza tym przedziałem. Dotyczy to zwłaszcza modułu  $E''(\lambda)$ .

Z wykresów pokazanych na rys. 7 i 8 wynika, że właściwości badanej cieczy w istotny sposób zależą od jej temperatury w trakcie badania. Na wspomnianych rysunkach linią ciągłą pokazano wyniki badań, a linią przerywaną wartości funkcji  $E'(\lambda)$  lub  $E''(\lambda)$  wynikające z ułamkowego modelu Maxwella. Wartości parametrów ułamkowego modelu Maxwella zestawiono, dla różnych temperatur w Tabeli 4. Widać, że zmiana temperatury ma największy wpływ na stałą  $\eta$ , dynamiczny współczynnik lepkości. Zakres przeprowadzonych badań nie pozwala jednak na zaproponowanie modelu, który uwzględniałby wpływ temperatury badanej cieczy.

Tabela 4. Zależność wartości parametrów od temperatury

Table 4. Dependence of parameter values on temperature

Temperatura [°C]	Model Maxwella		
	$E$ [Pa]	$\eta$ [Pa·s <sup><math>\alpha</math></sup> ]	$\alpha$ [-]
20,0	80614,7	2038,8	0,7544
50,0	77141,4	1260,3	0,7865

Rys. 7. Zależność modułu  $E'(\lambda)$  od częstotliwości dla różnych temperaturFig. 7. Dependence of storage modulus  $E'(\lambda)$  on frequency for different temperaturesRys. 8. Zależność modułu  $E''(\lambda)$  od częstotliwości dla różnych temperaturFig. 8. Dependence of storage modulus  $E''(\lambda)$  on frequency for different temperatures

## 6. Uwagi końcowe

W pracy opisano wyniki badań eksperymentalnych cieczy o bardzo dużej lepkości używanej w pasywnych, cieczowych tłumikach drgań. Zaproponowano trójparametrowy, ułamkowy model reologiczny Maxwella do opisu dynamicznego zachowania omawianej cieczy. Wykazano, że model ten wystarczająco dokładnie opisuje właściwości cieczy o bardzo dużej lepkości dla dużego przedziału częstotliwości wymuszenia. Pokazano, że stałe modelu w istotny sposób zależą od temperatury cieczy. Wykazano również, że wyniki identyfikacji stałych wystarczająco dobrze opisują zachowanie cieczy tylko w tym przedziale częstotliwości wymuszenia, dla którego dysponuje się danymi eksperymentalnymi.

## Podziękowania

Część pracy wykonano w ramach programu badań sponsorowanego przez Narodowe Centrum Nauki (Projekt Nr 2013/09/B/ST8/01733), prowadzonego w latach 2014-2016.

## Literatura

- [1] T.T. Soong, G.F. Dargush, *Passive energy dissipation systems in structural engineering*, Chichester, Wiley 1999.
- [2] N. Makris, M.C. Constantinou, Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers, *Journal of Structural Engineering*, **117**, 2708 – 2724, 1991.
- [3] Park S.W., Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 8065 – 8092, 2001.
- [4] R. Lewandowski, B. Chorążyczewski, Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Computers and Structures*, **88**, 1-17, 2010.
- [5] C.Y. Hou, Fluids dynamics and behavior of nonlinear fluid dampers, *Journal of Structural Engineering*, **134**, 56-63, 2008.
- [6] C. Frings, J.C. De La Llera, Multiphysics modeling and experimental behavior of viscous damper, G. De Roeck, G. Degrande, G. Lambert, G. Muller eds. *The 8<sup>th</sup> International Conference on Structural Dynamics, (EURODYN 2011)*, Leuven, Belgium, July 4-6, 2011.
- [7] D. Tong, Y. Liu, Exact solutions for the unsteady rotational flow of non-Newtonian fluid in an annular pipe, *International Journal of Engineering Science*, **43**, 281–289, 2005.
- [8] P. Yang, Y. Lam, K. Zhu Constitutive equation with fractional derivatives for the generalized UCM model, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **165**, 88–97, 2010.

- [9] Z. Osiński, *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1979.
- [10] I. Podlubny, *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [11] R. Lewandowski, Identification of the parameters of the fractional rheological models of viscoelastic dampers using particle swarm optimization, *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Conference on Computer Methods in Mechanics*, May 9-12, Warsaw, Poland, 2011
- [12] R.E. Perez, K. Behdinan, Particle swarm approach for structural design optimization, *Computers and Structures*, **85**, 1579-1588, 2007.

## MODELLING OF MECHANICAL BEHAVIOUR OF FLUID USED IN DAMPERS

### Summary

In the paper the possibility of using the fractional rheological models to description of dynamic behavior of fluid of high viscosity is discussed. The considered high viscosity fluid is often used in the passive dampers. The fractional rheological models with three and fourth parameters are taken into account. The experimental data taken from our own experiments are used in the identification procedure. The influence of temperature of fluid and the influence of amplitude of vibration on values of model parameters are also presented and discussed. It was found that the fractional Maxwell model with three parameters is able to sufficiently well describe the dynamic behavior of considered fluid.

**Keywords:** viscoelastic fluid, experimental study, fractional rheological models, parameters identification

DOI:10.7862/rb.2014.31

*Przesłano do redakcji: 27.03.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



Bogusław ŁADECKI<sup>1</sup>  
Sławomir BADURA<sup>2</sup>

## ANALIZA DYNAMICZNA MOSTU PRZEŁADUNKOWEGO O KONSTRUKCJI POWŁOKOWEJ

Suwnice bramowe o konstrukcji powłokowej stosowane są w polskim przemyśle hutniczym znacznie rzadziej od suwnic kratowych lub blachownicowych. Mosty przeładunkowe o konstrukcji powłokowej, charakteryzują się podwyższoną podatnością na drgania mechaniczne, co skutkuje ich większą wrażliwością na powstawanie pęknięć zmęczeniowych. W pracy wykonano pomiary tensometryczne odkształceń mostu powłokowego, dla którego prowadzone cyklicznie badania nieniszczące ujawniały występowanie licznych pęknięć zmęczeniowych głównie w obszarze belek podszynowych. Wykonywane okresowo naprawy i wzmocnienia konstrukcji mostu nie wyeliminowały problemu powstawania kolejnych pęknięć zmęczeniowych. Wykonana analiza dynamiczna pracy mostu, w połączeniu z przeprowadzonymi obliczeniami MES wykazała przekroczenie dopuszczalnych wartości naprężeń ze względu na zjawisko zmęczenia materiału. Uzyskane wyniki analiz dynamicznych stanowią podstawę do wykonania dokładniejszych analiz trwałości zmęczeniowej najbardziej wyciężonych obszarów mostu.

**Słowa kluczowe:** pomiary tensometryczne, stan naprężeń, suwnice bramowe, MES, badania nieniszczące

### 1. Wprowadzenie

Suwnice bramowe o konstrukcji powłokowej charakteryzują się bardzo dużą sztywnością oraz smukłością, przy czym ich wadą jest parokrotnie niższy udźwig w porównaniu z konstrukcjami kratownicowymi o porównywalnych rozmiarach, jak również podwyższona podatność na drgania mechaniczne. Rozważania przeprowadzono dla mostu powłokowego czerpakowego o udźwigu 350 kN, eksploatowanego w jednej z polskich hut -- rys. 1. Dla mostu takiego

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Bogusław Ładecki, AGH University of Science and Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Robotics, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: boglad@uci.agh.edu.pl

<sup>2</sup> Sławomir Badura, AGH University of Science and Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Robotics, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: sbadura@agh.edu.pl

element nośny stanowi przęsło o długości 133 m o konstrukcji powłokowej wykonane z blach stalowych wzmocnionych uźebrowaniem biegnącym wzdłużnie i poprzecznie.



Rys. 1. Most przeładunkowy o konstrukcji powłokowej

Fig. 1. Charging bridge of a shell structure

## 2. Badania nieniszczące mostu

W związku z występowaniem pęknięć zmęczeniowych po kolejno wykonywanych naprawach mostów, przeprowadzono ich kompleksowe badania nieniszczące [1], w skład których wchodziło wykonanie:

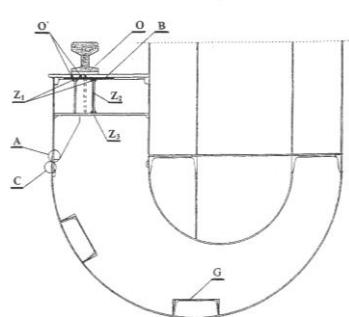
- badań wizualnych całej powierzchni zewnętrznej suwnic, w celu określenia obszarów występowania niedopuszczalnych uszkodzeń ich konstrukcji nośnej, tj. naderwań, pęknięć, trwałych deformacji i innych niedopuszczalnych uszkodzeń,
- badań defektoskopowych metodą magnetyczno-proszkową,
- oceny postępu ubytków korozyjnych z wykorzystaniem techniki ultradźwiękowej,
- analizy trwałych deformacji przęsła, na podstawie prowadzonych cyklicznie geodezyjnych pomiarów kształtu profilu pionowego pasa górnego belek podszynowych [2].

Wykonane badania nieniszczące ujawniły szereg obszarów występowania pęknięć, najczęściej o charakterze zmęczeniowym oraz innych uszkodzeń konstrukcji mostu. Największe nasilenie występowania pęknięć zmęczeniowych stwierdzono dla belek podszynowych wózka mostu, dla których zidentyfikowane typy uszkodzeń zilustrowano na rys. 2, 3 i 4.

Oprócz sporadycznie wykrywanych pęknięć typu „A”, „C” i „G”, dla różnych serii badań stwierdzono występowanie ogółem: 42-47% pęknięć typu „Z”, 13-42% pęknięć typu „O” oraz 8-25% pęknięć typu „B”, w całkowitej liczbie wykrytych pęknięć.

Również w innych obszarach konstrukcji mostu stwierdzano występowanie pęknięć zmęczeniowych, z których najgroźniejsze wykryto dla powłoki powyżej podpory długiej – rys. 5, lokalizacja pęknięć zgodnie z rys. 6.



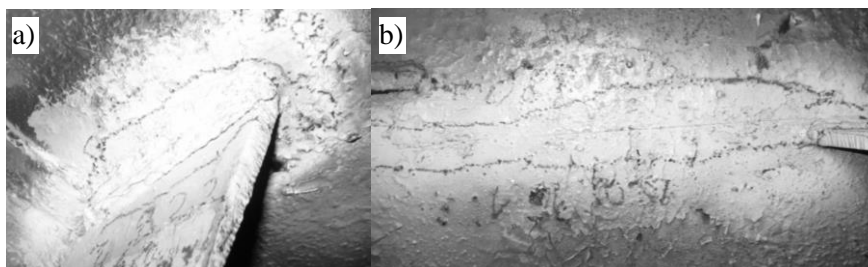


Wykryte pęknięcia:

- typu „A” – pęknięcie złącza spawanego, w dolnej części żeberka żebera poprzecznego belki podszynowej,
- typu „B” – pęknięcie spoiny sufitowej łączącej górną półkę dwuteownika z poziomą blachą belki podszynowej,
- typu „C” – pęknięcie pionowe złącza spawanego blach belki podszynowej i powłoki, zlokalizowane pomiędzy żebrami belki podszynowej,
- typu „O” – pęknięcie blachy pod szyną w kierunku osi szyny, blisko żeberka,
- typu „O” – pęknięcie blachy pod szyną, równoległe do osi szyny,
- typu „Z1”(„Z3”) – pęknięcie spoiny równoległej do osi szyny, żeberka żebera poprzecznego lub wręgi,
- typu „Z2” – pęknięcie spoiny pionowej, żeberka żebera poprzecznego lub wręgi
- typu „G” – pęknięcie spoiny czołowej podłużnicy (ceownik 300)

Rys. 2. Lokalizacja typów wykrytych pęknięć belki podszynowej

Fig. 2. Location of the detected cracks of the bridge beam



Rys. 3. Pęknięcia belki podszynowej wykryte metodą magnetyczno-proszkową: a) typu „Z1” spoiny o dł. 140 mm, b) typu „O” blachy pod szyną o dł. 380 mm

Fig. 3. Cracks of the bridge beam detected by the magnetic-powder method: a) type „Z1” joint 140 mm long; b) type „O” plate under the rail, 380 mm long



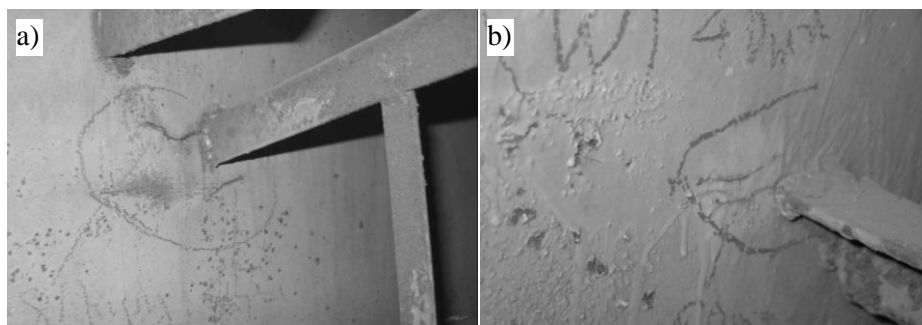
Rys. 4. Pęknięcie spoiny czołowej podłużnicy typu „G” wykryte metodą magnetyczno-proszkową

Fig. 4. Cracks weld of the bridge beam stringer type „G” detected by the magnetic-powder method

Na zwiększenie problemów eksploatacyjnych mostów, oprócz omówionych wyżej zjawisk zmęczeniowych występujących głównie w obszarze złączy spawanych belek podszynowych, wpływają również problemy z utrzymaniem w należytych stanie torowisk wózka, spowodowanych luzowaniem się i pękaniem licznych śrub, jak również pojawiającymi się okresowo pęknięciami szyn. Wy-

konywane okresowo naprawy i wzmocnienia konstrukcji mostu nie wyeliminowały problemu powstawania kolejnych pęknięć zmęczeniowych.

W celu wyjaśnienia zaistniałej sytuacji przeprowadzono stosowną analizę dynamiczną konstrukcji na podstawie wykonanych pomiarów tensometrycznych odkształceń na obiekcie rzeczywistym, zweryfikowanych obliczeniami MES.



Rys. 5. Pęknięcia powłoki powyżej podpory długiej: a) po stronie zachodniej mostu o dług. 80 mm i 45 mm, b) po stronie wschodniej o dług. 40 mm i 60 mm

Fig. 5. Shell cracks above the long support: a) western side of the bridge - 80 mm and 45 mm long, b) eastern side of the bridge - 80 mm and 45 mm long

### 3. Analiza wytrzymałościowa

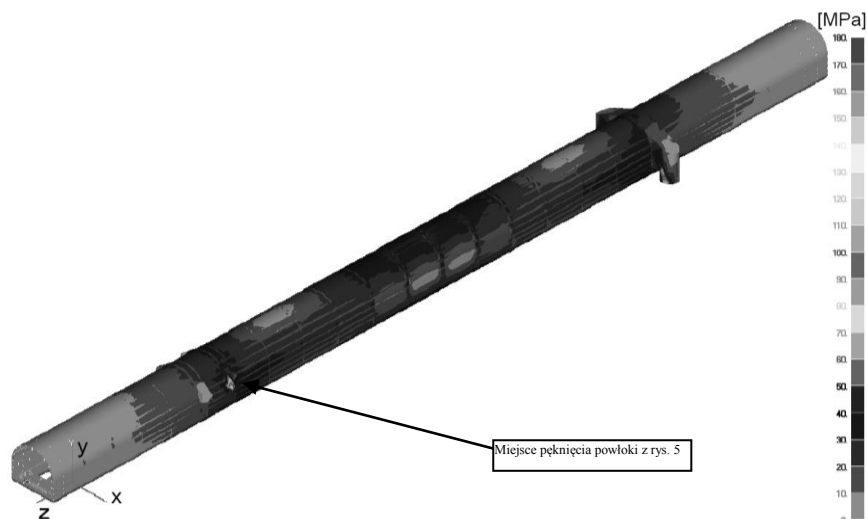
Dla opracowanego modelu dyskretnego konstrukcji mostu, rozpatrzono ogółem 17 przypadków obciążeń [3]. Wykonane analizy MES wykazały, że dla najbardziej niekorzystnych wariantów obciążeń konstrukcji mostu, ekstremalne wartości sił tnących dla przęsła występują w obszarze podpór, natomiast ekstremalne wartości momentów zginających w obszarze podpór oraz w środku rozpiętości przęsła pomiędzy podporami – rys. 7. Obszary te są zgodne z obszarami największego nasilenia występowania pęknięć zmęczeniowych w belkach podszynowych.

Przykładowe wyniki naprężeń zredukowanych otrzymanych zgodnie z hipotezą Hubera – Missesa dla przęsła, dla wariantu obciążeń 2 odpowiadającego położeniu wózka w środku przęsła pokazano na rys. 6. Wybrane wyniki analizy MES dla elementów belki podszynowej zestawiono w tabeli 1. Ekstremalne war-

Tabela 1. Wybrane wyniki analizy MES dla elementów belki podszynowej

Table 1. Selected FEM results for bridge beam elements

Element konstrukcji belki podszynowej	Naprężenia [MPa]		Kategoria zmę- czeniowa zg. z [4]
	Zredukowane dla wariantu obciążenia:		
	1 - wózek na pod- porze krótkiej	2 - wózek w środ- ku przęsła	
Pasy boczne	60	53	160
Przepony	65	65	100
Spoiny typu „B” i „Z”	65	57	57



Rys. 6. Analiza MES - rozkład naprężeń zredukowanych w przęśle – wariant obciążenia 2 [3]

Fig. 6. FEM analysis – distribution of the reduced stresses in the span – load variant 2 [3]

tości naprężeń zredukowanych dla belek podszynowych wynoszące 65 MPa, uzyskano dla obszaru występowania pęknięć pachwinowych złączy spawanych typu „B” oraz „Z”.

## 4. Badania tensometryczne odkształceń mostu

### 4.1. Opis przeprowadzonych pomiarów

Na podstawie wykonanej analizy wytrzymałościowej konstrukcji przy użyciu MES [5] wytypowano obszary, dla których przeprowadzono pomiary tensometryczne. Pierwszy obszar znajdował się w środku rozpiętości przęsła, w okolicy belki podszynowej mostu, natomiast drugi na powłoce mostu za podporą długą.

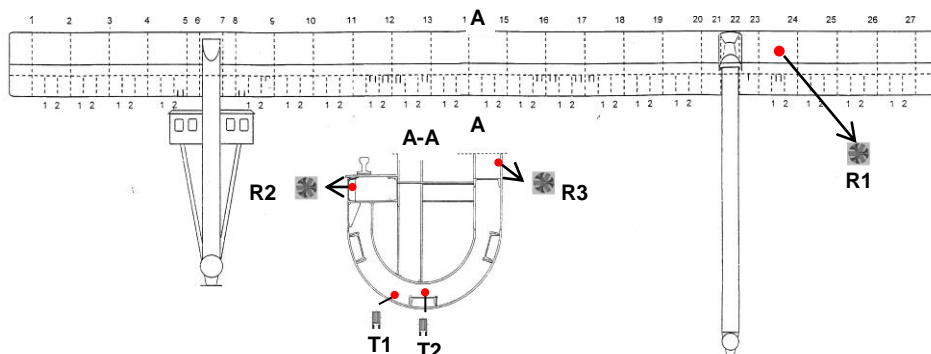
Do pomiarów stanu odkształcenia (naprężenia) wykorzystano trzy rozety tensometryczne oznaczone R1, R2, R3 typu **TFxy-4/120** oraz dwa tensometry T1 oraz T2. Tensometry pomiarowe czynne były kompensowane temperaturowo przez czujniki kompensacyjne. Całość pomiarów obejmowała cztery cykle pomiarowe. Pierwsze trzy cykle obejmowały jazdę wózka przy zatrzymanym moście. Czwarty cykl obejmował jazdę całego mostu przy wózku zaparkowanym na podporze krótkiej. Po każdym cyklu pomiarowym następowało zapisanie zarejestrowanych danych i powtórne wyskalowanie aparatury. Zalecenia eksploatacyjne mostu nie pozwalały na jazdę całego mostu przy równoczesnej jeździe

wózka czerpakowego wewnątrz konstrukcji, stąd cykle pomiarowe składały się z następujących faz: jazda wózka przy zatrzymanym moście i odwrotnie.

Opis cykli pomiarowych:

- Cykl I** - jazda wózka „na pusto” z podpory krótkiej do podpory długiej  
**Cykl II** - jazda od podpory krótkiej do długiej (w obszarze podpory długiej nabranie rudy)  
 - jazda do podpory krótkiej z urobkiem  
 - powrót do podpory długiej i zrzucenie ładunku  
 - postój w osi podpory długiej  
**Cykl III** - wózek w osi podpory długiej (następuje załadunek rudy)  
 - jazda z rudą do osi podpory krótkiej  
 - jazda z rudą do osi podpory długiej (następuje zrzucenie rudy)  
 - jazda „na pusto” do osi podpory krótkiej  
**Cykl IV** - jazdę całego mostu przy wózku zaparkowanym na podporze krótkiej

Schemat rozmieszczenia tensometrycznych czujników pomiarowych R1, R2, R3 oraz T1, T2 na moście przeladunkowym pokazano na rys. 7. W środku rozpiętości przęsła mostu w obszarze belki podszynowej pomiędzy wręgami nr 14 i 15 po stronie zachodniej zamontowano rozety R2 i R3 oraz tensometry T1 i T2. Na powłoce po stronie zachodniej mostu za podporą długą umieszczona została rozeta tensometryczna R1 przedstawiona na rys. 7.



Rys. 7. Schemat rozmieszczenia czujników tensometrycznych

Fig. 7. Positions of strain gauges inside the charging bridge

## 4.2. Aparatura pomiarowa

Do pomiarów wykorzystano wzmacniacz pomiarowy HBM MGCplus z możliwością pomiarów czujnikami rezystancyjnymi i indukcyjnymi. Mostek zasilany był z akumulatorów żelowych 12V-12Ah a całość podłączono do komputera przenośnego laptop, który wyposażony w profesjonalny program „Cat-

man” firmy HBM rejestrował przebieg pomiarów. Zestaw aparatury użytej do pomiarów przedstawia rys. 8.



Rys. 8. Aparatura pomiarowa

Fig 8. Measuring equipment

### 4.3. Opracowanie wyników pomiarów

#### 4.3.1. Wyniki pomiarów dla tensometrów osiowych T1 i T2

Maksymalne zmierzone wartości naprężeń zostały zarejestrowane podczas „Cyklu II” oraz „Cyklu III” na podłużnicy z ceownika C300 w dolnej części belki podszynowej, gdzie naklejono tensometr T2 oraz na dolnej części powłoki gdzie naklejony był tensometr T1 (rys. 9, rys 11). Wzrost naprężeń w postaci charakterystycznych „pików” pokazanych na rys. 9 oraz rys. 11 związany jest z przejazdem wózka po szynie nad zamontowanymi w okolicy podszynowej tensometrami T1 i T2. W trakcie przebywania wózka w osi podpory krótkiej lub długiej, naprężenia w środkowej części rozpiętości mostu są praktycznie zerowe a ich wzrost następuje w trakcie przemieszczania się wózka do obszaru między podporowego gdzie osiągają wartości maksymalne.

Nabieranie przez czerpak rudy związane jest z pojawieniem się dodatkowych naprężeń w konstrukcji oscylujących w okolicach 2÷3 MPa. Tak niewielkie wartości spowodowane są tym, że w trakcie nabierania rudy przez czerpak wózek znajdował się w osi podpory długiej, która przejmowała dodatkowe obciążenie. Przejazd wózka od nogi długiej do krótkiej z załadowanym czerpakiem powodował wzrost naprężeń zarejestrowanych przez tensometry T1 i T2 o około 5 MPa w stosunku do przejazdu wózka z pustym czerpakiem. W trakcie przejazdu wózka największy „impulsowy” wzrost naprężeń został zarejestrowany przy najeździe pierwszej osi kół wózka w stosunku do drugiej co może być spowodowane nierównomiernym rozłożeniem masy wózka na obie osie oraz zaparkowaniem czerpaka przy pierwszej osi.

Wartości i charakter zmiany naprężeń dla „Cyklu I” (przejazd pustego wózka z podpory krótkiej na długą) odpowiadał analogicznym fragmentom zarejestrowanym przez tensometry T1 i T2 w trakcie „Cyklu II” oraz „Cyklu III” stąd pominięto graficzne przedstawienie tych wyników.

Podczas jazdy całego mostu – „cykl IV”, dla tensometrów T1 i T2 występują dwustronne cykle niesymetryczne o niewielkiej amplitudzie zmiany naprężenia wynoszącej około 1,5MPa. Związane jest to z rejestracją przez tensometr osiowy naprężeń tylko w jego osi, a jazda całego mostu odbywa się w kierunku prostopadłym osi tensometrów.

#### 4.3.2. Wyniki pomiarów dla rozet tensometrycznych R1, R2 oraz R3

Dla rozet R2 i R3 wzrost wartości naprężeń obserwowano w trakcie zbliżania się wózka do płaszczyzny zamontowania rozet, gdzie największe naprężenie występowało w trakcie najazdu kół wózka w miejscu naklejenia rozety, a następnie w trakcie oddalania się wózka naprężenia malały. Największe naprężenia zarejestrowane zostały przez rozetę R2 (rys. 10 i rys. 12) znajdującą się pod belką podszynową i wynosiły około 31 MPa, a dla rozety R3 na powłoce mostu naprężenia wynosiły około 10 MPa.

Dla rozety R1 zamontowanej na powłoce mostu za podporą długą zauważyć można wzrost naprężeń w miarę zbliżania się wózka do podpory długiej, gdzie maksymalna ich wartość wynosiła około 10 MPa. Należy zaznaczyć że wózek zawsze kończył jazdę w osi podpory długiej, nie wjeżdżając na przewieszenie za podporą, gdzie zamontowana była rozeta R1. Na rys. 10 i 12, tylko dla rozety R2 można zaobserwować skokowy wzrost wartości naprężeń wynoszący około 15 MPa, co stanowi połowę największych naprężeń zarejestrowanych przez tę rozetę. Spowodowane mogło to być zamocowaniem rozety R2 na belce podszynowej w najmniejszej odległości od szyny wózka ze wszystkich tensometrów zastosowanych w pomiarach.

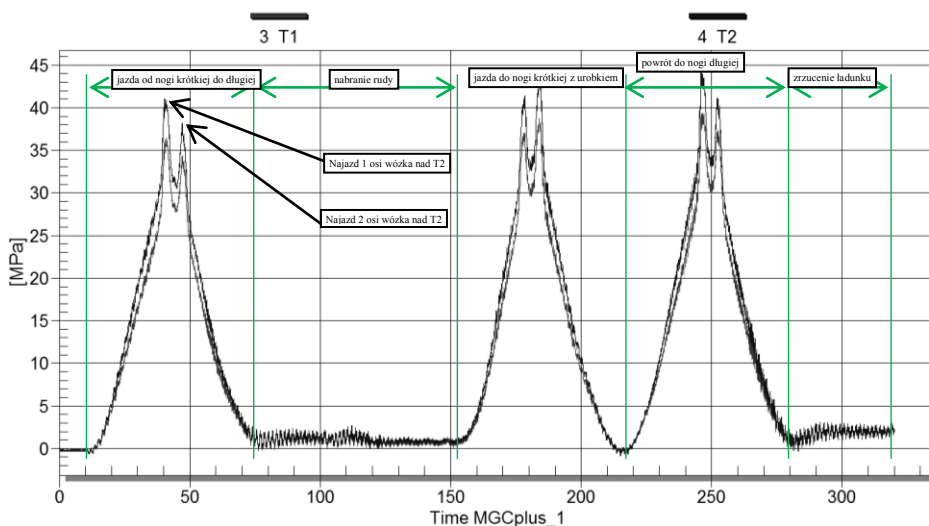
Naprężenia dla rozety R3 zamontowanej w dolnej części na powłoce mostu naprzeciw rozety R2, były ponad trzykrotnie mniejsze od zarejestrowanych przez rozetę R2 i wynosiły 10 MPa. Dla rozety R3 można również zaobserwować wzrost zarejestrowanych naprężeń w trakcie zbliżania się wózka, ale nie zachodzą gwałtowne skoki zmiany naprężeń w trakcie najazdu kół wózka jak dla rozety R2.

Odczytane przebiegi wartości naprężeń dla rozety R1 zamocowanej na przewieszeniu za nogą długą wskazują, że maksymalny wzrost naprężeń dla przejazdu z pustym czerpakiem wynosi około 5 MPa (rys. 10), a po załadowaniu czerpaka 10 MPa. Niezależnie czy czerpak był pusty czy pełny, maksymalne naprężenia obserwujemy w okolicach  $\frac{1}{4}$  długości między podporowej od podpory długiej, zarówno dla jazdy wózka od podpory długiej do krótkiej czy odwrotnie.

Podczas jazdy całego mostu – „cykl IV”, dla rozet R1, R2, R3 wartości naprężeń zredukowanych nie przekraczały 4 MPa. Brak powrotu rozet R1 oraz R3 do stanu „zerowego” po zakończonej jeździe całego mostu można tłumaczyć niewielkim skoszeniem mostu po zakończeniu przejazdu w stosunku do stanu początkowego.

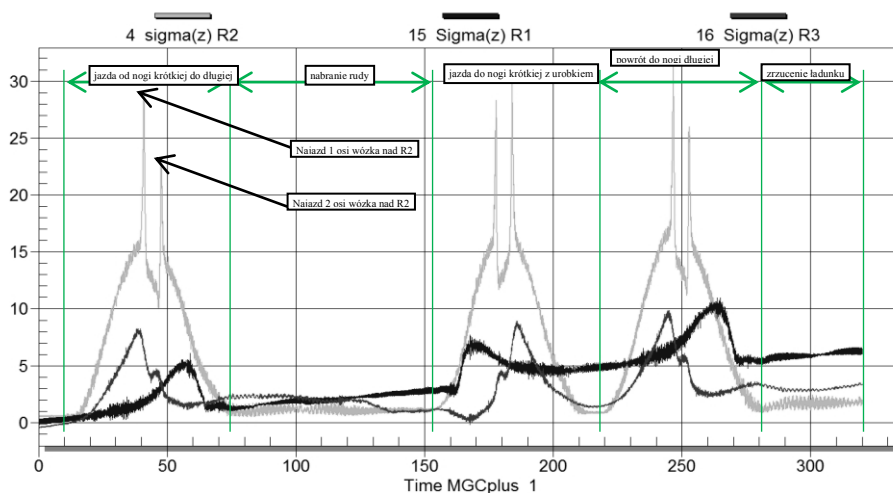
### 4.3.3. Graficzne przedstawienie wyników pomiarów

Na rys. 9 pokazano wykresy naprężeń dla „Cyklu II” zarejestrowane przez tensometry osiowe T1 i T2, a na rys. 10 wykresy naprężeń dla „Cyklu II” zarejestrowane dla rozet R1, R2, R3.



Rys. 9. Wykres naprężeń  $\sigma_1$  w czasie cyklu II pracy mostu zarejestrowany przez tensometry T1 i T2

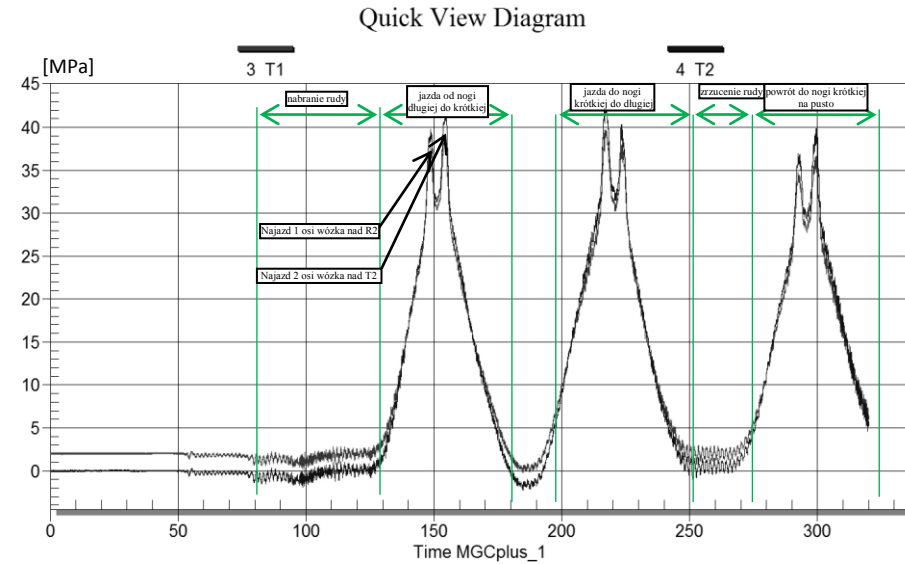
Fig. 9. Normal stress  $\sigma_1$  registered by strain gauges T1 and T2 during the cycle II bridge work



Rys. 10. Wykres naprężeń zredukowanych  $\sigma_Z$  dla rozet R1, R2, R3 w czasie cyklu II pracy mostu

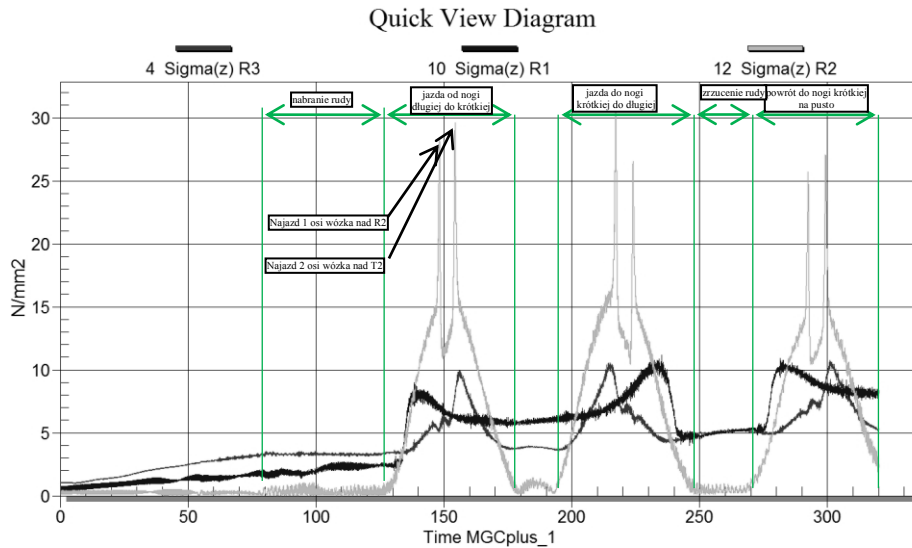
Fig. 10. Reduced stress  $\sigma_Z$  registered by rosettes R1, R2, R3 during the cycle II bridge work

Na rys. 11 pokazano wykresy naprężeń dla cyklu III zarejestrowany przez tensometry osiowe T1 i T2, natomiast na rys. 12 wykresy naprężeń dla cyklu III zarejestrowane dla rozet R1, R2, R3.



Rys. 11. Wykres naprężeń  $\sigma_1$  w czasie cyklu III pracy mostu zarejestrowany przez tensometry T1 i T2

Fig. 11. Normal stress  $\sigma_1$  registered by strain gauges T1 and T2 during the cycle III bridge work



Rys. 12. Wykres naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  dla rozet R1, R2, R3 w czasie cyklu III pracy mostu

Fig. 12. Reduced stress  $\sigma_z$  registered by rosettes R1, R2, R3 during the cycle III bridge work



W tabeli 2 zestawiono największe naprężenia zredukowane  $\sigma_z$  [MPa] dla rozet R1, R2, R3 oraz naprężenia osiowe  $\sigma_1$  [MPa] dla tensometrów T1 i T2, które zarejestrowano dla poszczególnych cykli pomiarowych. Różnica wartości naprężeń uzyskanych na podstawie pomiarów tensometrycznych, w porównaniu z wynikami przeprowadzonej analizy MES [3] nie przekracza 10 %.

Tabela 2. Wartości maksymalnych naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  [MPa] uzyskane w poszczególnych cyklach pomiarowych

Table 2. Reduced stress  $\sigma_z$  [MPa] obtained in each measuring cycles

Nazwa czujnika	Cykl I	Cykl II	Cykl III	Cykl IV
	$\sigma_z$ [MPa]	$\sigma_z$ [MPa]	$\sigma_z$ [MPa]	$\sigma_z$ [MPa]
R1	6	10	10	2.5
R2	24	31	31	1.5
R3	5	10	10	4
	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_1$ [MPa]
T1	31	39	39	1
T2	35	45	44	2

## 5. Wnioski końcowe

Wykonane badania nieniszczące mostu przeładunkowego wykazały występowanie licznych pęknięć o charakterze zmęczeniowym, głównie w obszarze belek podszynowych, których źródła powstawania nie zostały wyeliminowane w wyniku wykonywania doraźnych napraw.

Na podstawie przeprowadzonej analizy MES oraz wykonanych pomiarów tensometrycznych odkształceń (naprężeń), określono najbardziej wyjątkowe obszary konstrukcji mostu, odpowiadające miejscom występowania pęknięć zmęczeniowych. Dobra zgodność wyników pomiarów tensometrycznych z wynikami obliczeń komputerowych MES wskazuje na poprawność przeprowadzonych pomiarów odkształceń oraz wykonanej analizy wytrzymałościowej MES, a uzyskane wartości maksymalne naprężeń uznać można jako wiarygodne.

Ekstremalne wartości naprężeń zredukowanych dla belek podszynowych wynoszące 65MPa, uzyskano dla obszaru występowania pęknięć pachwinowych złączy spawanych typu „B” oraz „Z”, przy czym źródłem często wykrywanych pęknięć typu „O” jest prawdopodobnie ich sąsiedztwo z pęknięciami typu „B” i „Z”, od których najczęściej rozwijały się pęknięcia typu „O”.

Dla rozważanych obiektów nie jest znana historia ich eksploatacji, jednak biorąc pod uwagę kategorię zmęczeniową dla obszaru występowania wzmiankowanych pęknięć określoną jako 57 MPa [4], jako przyczynę powstawania i rozwoju pęknięć zmęczeniowych w obszarze belek podszynowych wskazać można przekroczenie wartości wytrzymałości zmęczeniowej rozważanych złączy spawanych. Wykonane obliczenia i pomiary posłużyć mogą, do wykonania dokładniejszej analizy trwałości zmęczeniowej najbardziej wyjątkowych obszarów.

rów konstrukcji i stanowiły podstawę do wykonania odpowiednich wzmocnień konstrukcji mostów.

### Literatura

- [1] Ładecki B. i in.: Ekspertyzy mostu przeładunkowego w Zakładzie Wielkie Piece. PREH Sp. z o.o., Kraków 2003, 2010 i 2013.
- [2] Ładecki B., Borowiec W.: Monitoring geodezyjny jako nieniszcząca metoda oceny stanu technicznego konstrukcji. Materiały 39 Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących, Szczyrk 2010.
- [3] Ładecki B., Badura S., Matachowski F.: Strength analysis of a gantry crane of coating structure. *Mechanics and control*, Vol. 31, No 3, 2012, s. 102-107.
- [4] PN-90/B-03200 Konstrukcje stalowe. Obliczenia i projektowanie.
- [5] Ładecki B., Badura S.: Pomiary odkształceń mostu powłokowego. Praca niepublikowana. AGH, KWZMiK. Kraków listopad 2009.

## DYNAMIC ANALYSIS OF CHARGING BRIDGE OF A SHELL STRUCTURE

### Summary

Gantry cranes with shell construction are used in Polish steel industry much less than truss bridges. Charging bridge of a shell structure characterized by increased susceptibility to mechanical vibration, resulting in their greater sensitivity to fatigue cracking. In this paper shows strain (stress) measurements charging bridge for which periodically carried out non-destructive testing, which revealed the presence of numerous fatigue cracks mainly in the area of a beam pad. Periodically carried out repairs and strengthening of bridges have not eliminated the problem of the emergence of more fatigue cracks. Made dynamic analysis Charging bridge in conjunction with the carried out calculations FEM has exceeded the limit values for stress due to the effect material fatigue. The results of dynamic analysis can serve as the basis for to perform more accurate analysis of the fatigue life the most efforts areas of the bridge.

**Keywords:** metal structures, state of stress, FEM, strain measurements, NDT examination

DOI:10.7862/rb.2014.32

*Przesłano do redakcji: 29.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Waldemar LATAS<sup>1</sup>

## OPTIMAL TUNING OF THE TUNABLE TRANSLATIONAL-ROTATIONAL DYNAMIC ABSORBERS IN GLOBAL VIBRATION CONTROL PROBLEMS IN BEAMS

The paper deals with vibration of the beam subjected to the concentrated and distributed harmonic forces, with the translational-rotational dynamic vibration absorbers attached. The linear Euler-Bernoulli beam model is assumed, the solution of the equation of motion is found with the use of Fourier method. The time-Laplace transformation allows to obtain the displacement amplitude in the frequency domain. Numerical examples present a problem of minimization of the kinetic energy of the whole or the part of the beam by optimal tuning the translational-rotational dynamic vibration absorber. The results of calculation confirm the effectiveness of using the translational-rotational dynamic absorbers in beams. In the examples studied the optimal tuning strategies minimizing the kinetic energy are determined.

**Keywords:** dynamic vibration absorber, beam vibration, vibration reduction, tuning, de-tuning

### 1. Introduction

Due to the application in a number of constructions, much attention has been paid to proper selection of parameters of the dynamic vibration absorbers [DVA] – mainly the most common passive tuned mass dampers [TMD] – in beam structures [1–7,10–12,15].

For continuous structures usually the best location of a vibration absorber is a point of application of the excitation force. If it is technically impossible or in the case of distributed loading, an important issue is the correct location of the absorber, especially in the global or non-collocated optimization problems [1,11,13].

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Waldemar Łatas, Cracow University of Technology, Institute of Applied Mechanics, 31-864 Cracow, Al. Jana Pawła II 37, Poland, tel. +48 12 6283746, e-mail: latas@mech.pk.edu.pl

To improve the efficiency of vibration reduction there are used systems of tuned mass dampers [MTMD], tuned in the most general case for a single or several resonant frequencies (for broadband excitation) [8–11,13,14].

Because of the simple control algorithm it is preferable to use the tunable dynamic absorbers. The drawback of such a solution is that there may emerge the new natural frequencies of the resulting structure, depending on the position of absorbers, which coincide with the excitation frequency, so the proper location of the tunable absorbers is very important, the better performance may be also obtained by de-tuning the absorbers [1,4,8].

The present paper deals with vibration of the Euler-Bernoulli beam subjected to the concentrated and distributed harmonic forces, with a system of the translational-rotational vibration absorbers attached. The aim of the study is to demonstrate the effectiveness of the rotational absorbers [3,7] and to determine the optimal tuning strategy in problems of minimizing the kinetic energy of the beam.

The rotational absorbers may significantly improve the vibration reduction because they may be effective even when placed at nodal points of the host structure, where the translational absorbers have no effect; whereas de-tuning may be advantageous by shifting the resonance frequencies beyond the excitation band [1,4].

## 2. Theoretical model

A system considered in the study is shown in Figure 1. The Euler-Bernoulli beam of length  $l$ , mass density  $\rho$ , cross-section area  $A$ , geometrical moment of inertia  $I$  and Young's modulus  $E$  is subjected to the concentrated and distributed harmonic forces, the translational-rotational dynamic vibration absorbers are attached along the beam.

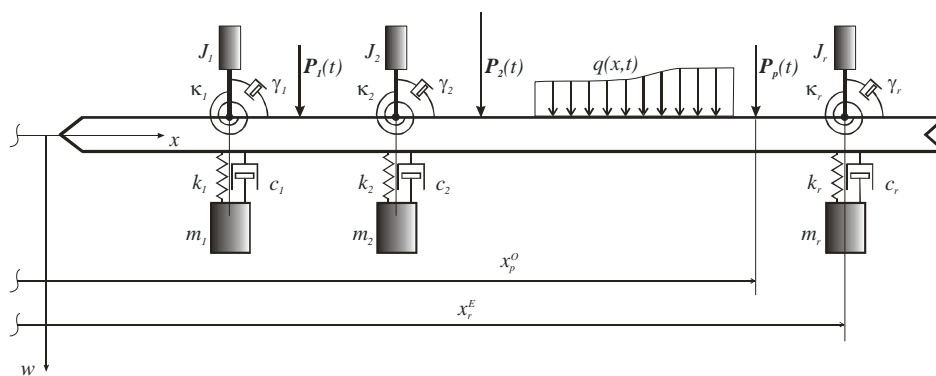


Fig. 1. Beam with a system of translational-rotational vibration absorbers

Rys. 1. Belka z układem translacyjno-rotacyjnych tłumików drgań

Assuming small linear vibration the equation of motion takes the form [3,7]:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q(x, t) + \sum_{j=1}^p P_j(t) \delta(x - x_j^o) + \sum_{j=1}^r F_j(t) \delta(x - x_j^E) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial M_j(t) \delta(x - x_j^E)}{\partial x} \quad (1)$$

where the following notations are introduced:

$q(x, t)$  – distributed force;

$P_j(t)$  –  $j$ -th concentrated force applied at the point of coordinate  $x_j^o$ ;

$F_j(t)$  –  $j$ -th concentrated force applied from the translational vibration absorber at the location of coordinate  $x_j^E$ ;

$M_j(t)$  –  $j$ -th concentrated torque applied from the rotational vibration absorber at the location of coordinate  $x_j^E$ ;

$m_j, c_j, k_j$  – mass, damping and stiffness coefficients of the  $j$ -th translational vibration absorber;

$J_j, \gamma_j, \kappa_j$  – moment of inertia, damping and stiffness coefficients of the  $j$ -th rotational vibration absorber;

$p$  – number of concentrated forces;

$r$  – number of translational-rotational vibration absorbers.

The internal damping in beam is described by parameter  $\alpha$  (Voigt-Kelvin model).

The method of separation of variables is utilized:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \varphi_i(x) \quad (2)$$

The functions  $\varphi_i(x)$  in series (2) are the eigenfunctions of the beam without absorbers attached and with the internal damping neglected. It is assumed the following form of the distributed loading:  $q(x, t) = h(t)g(x)$ . The functions of time  $q_i(t)$  need to be determined.

Substitution of the series (2) into equation (1) and performing the time Laplace transformation (with zero initial conditions for beam) leads to:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\rho A s^2 Q_i(s) + EI \alpha \beta_i^4 s Q_i(s) + EI \beta_i^4 Q_i(s) - a_i H(s) - \sum_{j=1}^p d_{ji} P_j(s) - \sum_{j=1}^r b_{ji} F_j(s) - \sum_{j=1}^r e_{ji} M_j(s)] \varphi_i(x) = 0 \quad (3)$$

where it is introduced:  $\beta_i^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega_i^2$ ;  $\omega_i$  is the  $i$ -th natural angular frequency of the beam without vibration absorbers attached and with the internal damping neglected ( $\alpha = 0$ ). The symbols:  $Q_i(s)$ ,  $H(s)$ ,  $P_j(s)$ ,  $F_j(s)$ ,  $M_j(s)$  denote the Laplace transforms of the:  $q_i(t)$ ,  $h(t)$ ,  $P_j(t)$ ,  $F_j(t)$ ,  $M_j(t)$  respectively.

Assuming that the eigenfunctions  $\varphi_i(x)$  are orthogonal with the weight function  $\eta(x)$ , the numerical coefficients in equation (3) are expressed as:

$$a_i = \frac{\int_0^l g(x) \varphi_i(x) dx}{K_i^2}, \quad d_{ji} = \frac{\varphi_i(x_j^O)}{K_i^2}, \quad b_{ji} = \frac{\varphi_i(x_j^E)}{K_i^2}, \quad e_{ji} = \frac{-\varphi_i'(x_j^E)}{K_i^2} \quad (4)$$

where it is introduced the notation:  $K_i^2 = \int_0^L \eta(x) \varphi_i^2(x) dx$ .

Linear independence of the eigenfunctions  $\varphi_i(x)$  in equation (3) leads to the expression for the Laplace transform of the beam deflection and slope:

$$W(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i H(s) + \sum_{j=1}^p d_{ji} P_j(s) + \sum_{j=1}^r b_{ji} F_j(s) + \sum_{j=1}^r e_{ji} M_j(s)}{\rho A s^2 + EI(1 + \alpha s) \beta_i^4} \varphi_i(x) \quad (5)$$

$$\frac{\partial W(x, s)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i H(s) + \sum_{j=1}^p d_{ji} P_j(s) + \sum_{j=1}^r b_{ji} F_j(s) + \sum_{j=1}^r e_{ji} M_j(s)}{\rho A s^2 + EI(1 + \alpha s) \beta_i^4} \varphi_i'(x) \quad (6)$$

Transforms of the force  $F_j(s)$  and torque  $M_j(s)$ , applied on the beam from the  $j$ -th translational-rotational vibration absorber attached at the point of coordinate  $x_j^E$ , are given by (with zero initial conditions for absorbers) [3]:

$$F_j(s) = -W(x_j^E, s) \frac{(c_j s + k_j) m_j s^2}{m_j s^2 + c_j s + k_j} \quad (7)$$

$$M_j(s) = -\Theta(x_j^E, s) \frac{(\gamma_j s + \kappa_j) J_j s^2}{J_j s^2 + \gamma_j s + \kappa_j} \quad (8)$$

where it is introduced the symbol:  $\Theta(x, s) = -\frac{\partial W(x, s)}{\partial x}$ .

Substituting the transforms (7)–(8) into expressions (5)–(6) furnishes with the transforms of the beam deflection and slope, which should be satisfied at the points where the translational-rotational absorbers are attached to the beam, resulting in the system of  $2r$  linear algebraic equations to determine  $W_k$  and  $\Theta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ):

$$\begin{aligned} W_k \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki} \frac{\varphi_{ik}}{B_i} \right] + \sum_{j=1, j \neq k}^r \sum_{i=1}^{\infty} W_j D_{ji} \frac{\varphi_{ik}}{B_i} + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_j E_{ji} \frac{\varphi_{ik}}{B_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{\varphi_{ik}}{B_i} \\ \Theta_k \left[ \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki} \frac{\varepsilon_{ik}}{B_i} - 1 \right] + \sum_{j=1, j \neq k}^r \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_j E_{ji} \frac{\varepsilon_{ik}}{B_i} + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{\infty} W_j D_{ji} \frac{\varepsilon_{ik}}{B_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{\varepsilon_{ik}}{B_i} \end{aligned} \quad (9)$$

where in order to simplify the expressions the following symbols are introduced:

$$\begin{aligned} W(x_j^E, s) &= W_j, \quad \Theta(x_j^E, s) = \Theta_j, \quad \varphi_i(x_j^E) = \varphi_{ij}, \quad \varphi_i'(x_j^E) = \varepsilon_{ij}, \\ a_i H(s) + \sum_{j=1}^p d_{ji} P_j(s) &= A_i, \quad \rho A s^2 + EI(1 + \alpha s) \beta_i^4 = B_i, \\ \frac{(c_j s + k_j) m_j s^2}{m_j s^2 + c_j s + k_j} b_{ji} &= D_{ji}, \quad \frac{(\gamma_j s + \kappa_j) J_j s^2}{J_j s^2 + \gamma_j s + \kappa_j} e_{ji} = E_{ji} \end{aligned} \quad (10)$$

Solution of the system (9) allows to determine from formulae (7)–(8) the transforms of the forces  $F_j(s)$  and torques  $M_j(s)$ , and further to obtain from expressions (5)–(6) the transforms of the deflection and slope of the beam. After substituting  $s = j\omega$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) (steady state vibration) it may be obtained the expressions for the deflection and slope of the beam in the frequency domain.

### 3. Numerical results: tunable translational-rotational vibration absorber

Because a simple control algorithm can be used, from the practical point of view it is preferable to use the tunable absorbers. The disadvantage of this method is the possibility of occurrence of the new resonant frequencies in the resulting structure [1,4,7].

A subject of the numerical calculations is a cantilever beam, excited by a uniform distributed force in the given region, with only one translational-rotational dynamic vibration absorber attached (Figure 2; translational one and rotational one are placed at the same point).

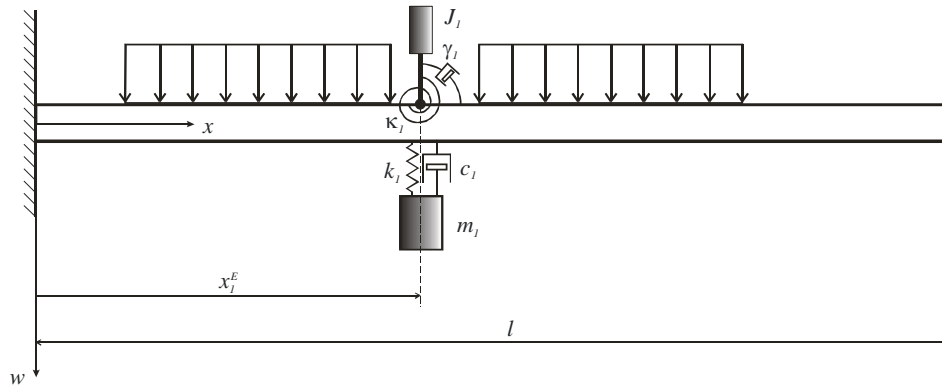


Fig. 2. Cantilever beam excited by a uniformly distributed harmonic force with a translational-rotational absorber attached

Fig. 2. Belka wspornikowa poddana harmonicznemu obciążeniu równomiernie rozłożonemu z dołączonym tłumikiem translacyjno-rotacyjnym

The beam of length  $l = 1.0\text{ m}$  is made of steel ( $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ), has a rectangular cross-section with a width of  $b = 0.05 \text{ m}$ , a height of  $h = 0.005 \text{ m}$ , the internal damping of the beam is neglected ( $\alpha = 0$ ). The first four natural frequencies of the presented beam are:  $f_1 = 4.19 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 26.26 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 73.54 \text{ Hz}$ ,  $f_4 = 144.11 \text{ Hz}$ .

The results of numerical calculations presented in sections 3.1, 3.2 relate to the problem of minimization of the kinetic energy of the whole or the part of the beam by the proper tuning of the translational-rotational vibration dynamic absorber. It is assumed in further calculations that the absorbers do not have any energy dissipating appliances ( $c_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ ).

Tuning of the translational-rotational absorber is described by the ratios between the natural frequencies of the translational and rotational absorbers and



the frequency of the harmonic excitation force:  $e = \frac{\omega_T}{\omega}$ ,  $f = \frac{\omega_R}{\omega}$ , where:

$\omega_T = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_R = \sqrt{\frac{\kappa_1}{J_1}}$ . For  $e=1.0$  and  $f=1.0$  the translational and rotational absorbers are tuned to be resonant at each frequency, when  $f=0.0$  it means that there is only the translational dynamic vibration absorber attached.

### 3.1. Example 1 – reduction of the kinetic energy of the whole beam

A system considered in Example 1 is shown in Figure 3 – the beam is excited by the harmonic force uniformly distributed along the whole length, the translational-rotational dynamic vibration absorber is attached at the end of the beam.

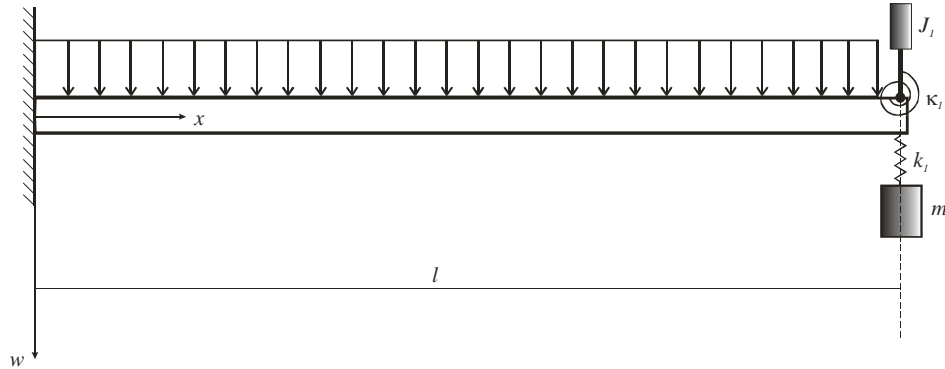


Fig. 3. Loading distribution and position of the absorber considered in Example 1

Rys. 3. Rozkład obciążenia oraz położenie tłumika rozpatrywanego w przykładzie nr 1

The task of the absorber is reduction of vibration – the aim is to determine the optimal tuning of the absorber minimizing the time-averaged kinetic energy of the whole beam, used as a global measure of vibration.

The calculated time-averaged kinetic energy is shown in Figure 4, for comparison, for three cases:

- the beam alone, without any vibration absorber attached;
- only the translational vibration absorber attached to the beam;
- the translational-rotational vibration absorber attached to the beam.

The calculations performed show that applying the translational-rotational absorber may significantly improve the effectiveness of vibration reduction when compared to the case when the translational absorber only is used.

In the example investigated the translational-rotational one ( $e=1.0$ ,  $f=1.0$ ) is more effective than the translational one ( $e=1.0$ ,  $f=0.0$ ) in band

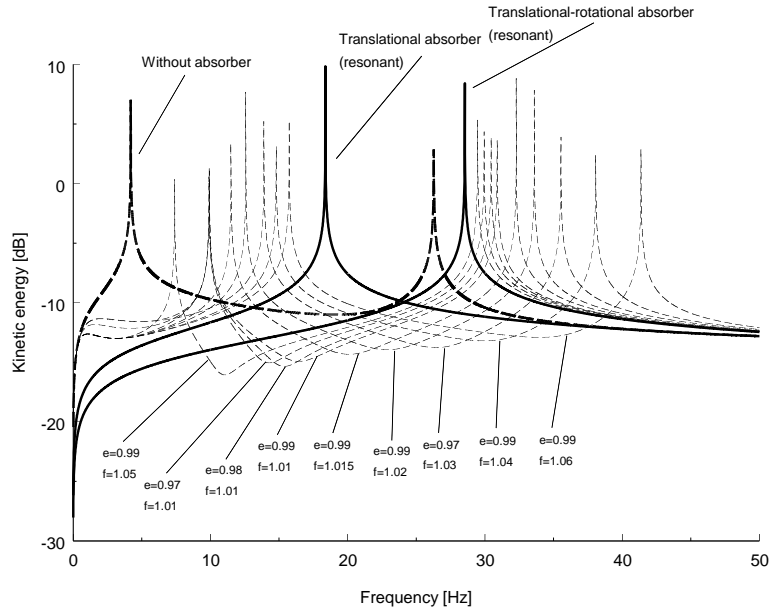


Fig. 4. Kinetic energy of the whole beam for different values of tuning parameters

Fig. 4. Energia kinetyczna całej belki przy różnych wartościach parametrów strojenia

[0.0-24.0 Hz], but there appears a new natural frequency of the structure equal 28.54 Hz. It occurs advantageous using only the translational absorber in band [24.0-50.0 Hz].

Effectiveness of vibration reduction can be significantly improved by a slightly detuning the absorbers. The curves shown in Figure 4 are obtained for different values of the tuning parameters  $e$  and  $f$ . It occurs beneficial slightly decreasing the value of  $e$  and increasing the value of  $f$ .

The envelope of the obtained curves gives the minimum of the kinetic energy of the beam possible to obtain, it allows also to obtain the optimal tuning algorithm.

There is a significant improvement in vibration reduction obtained by detuning the absorber, but it is also apparent the high sensitivity of the optimal solutions to inaccurate tuning.

### 3.2. Example 2 – reduction of the kinetic energy of a part of the beam

A system considered in Example 2 is shown in Figure 5 – the beam is excited by the harmonic force uniformly distributed along half the length, the translational-rotational dynamic vibration absorber is attached in the middle of the beam.

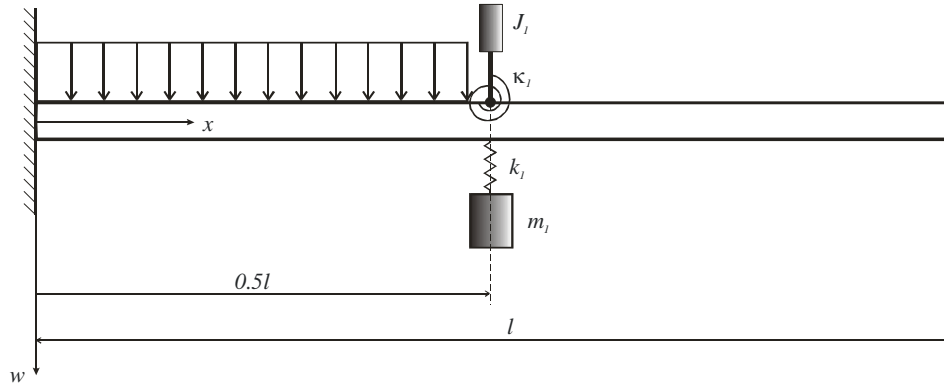


Fig. 5. Loading distribution and position of the absorber considered in Example 2

Rys. 5. Rozkład obciążenia oraz położenie tłumika rozpatrzone w przykładzie nr 2

The task of the absorber is isolation of vibration transferred from the loaded to the unloaded area of the beam – the aim is determine the optimal tuning of the absorber minimizing the time-averaged kinetic energy of the unloaded part of the beam, used as a global measure of vibration.

The calculated time-averaged kinetic energy is shown in Figure 6, for comparison, for three cases:

- the beam alone, without any vibration absorber attached;
- only the translational vibration absorber attached to the beam;
- the translational-rotational vibration absorber attached to the beam.

The calculations performed show that the best vibration reduction in bands [0.0-16.0 Hz] and [18.25-50.0 Hz] gives the resonant translational-rotational absorber ( $e=1.0$ ,  $f=1.0$ ). There is a new natural frequency of the structure equal 17.11 Hz; it occurs that the best way to eliminate the resonance is to apply only the translational absorber tuned for  $e=0.98$ .

The following tuning parameters describe the optimal vibration control strategy:

- band [0.0-16.0 Hz]  $-(e=1.0, f=1.0)$
- band [16.0-18.25 Hz]  $-(e=0.98, f=0.0)$
- band [18.25-50.0 Hz]  $-(e=1.0, f=1.0)$

Comparing to the example discussed in section 3.1, slightly detuning the translational-vibrational absorber in the vicinity of values  $e=1.0$ ,  $f=1.0$  does not improve here the effectiveness of vibration reduction.

If using only the translational absorber, the optimal values of the tuning parameters would be as follows:

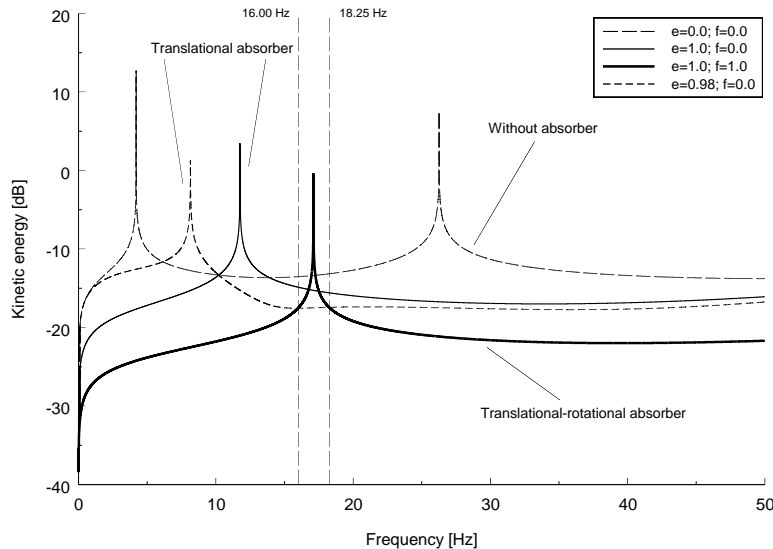


Fig. 6. Kinetic energy of the unloaded part of the beam for different values of tuning parameter

Rys. 6. Energia kinetyczna nieobciążonej części belki dla różnych wartości parametrów strojenia

- band [0.0-10.25 Hz]  $-(e = 1.0)$
- band [10.25-50.0 Hz]  $-(e = 0.98)$

Although there is a significant improvement in vibration reduction, which can be obtained by detuning the absorber, it is visible also the high sensitivity of the optimal solutions to inaccurate tuning.

#### 4. Conclusions

It can be seen from the results of calculations presented in sections 3.1, 3.2 that there may be obtained much improvement in vibration reduction efficiency when the rotational absorbers are added to the translational ones.

Translational absorbers have no effect when are placed at nodal points of the host structure, but the rotational ones may be the most effective when located at these points. Translational and rotational absorbers applied together may be very efficient, because they can absorb and isolate both the translational and rotational motion of the beam.

In the numerical examples shown in the paper only one rotational-translational absorber is applied, but of course vibration reduction can be improved by applying, if it is admissible, several absorbers in different locations.

Additional resonances which occur after applying the tunable absorbers depend on their location. In the examples presented the position of the absorbers is

fixed, but if it would be changed, it could be possible to shift the resonances beyond the excitation band [1,4].

The proper tuning of the absorbers can greatly improve the efficiency of vibration attenuation, but the theoretically calculated minimum kinetic energy of the system may be difficult to obtain in practice. This is due to high sensitivity to inaccurate tuning and location. Adding damping to the absorbers can be useful. If it would be admissible, the appropriately tuned absorbers with distributed parameters may be also the option.

The computational model presented can be used in local and global problems of optimal choice of position and parameters of the system of translational-rotational vibration absorbers in beams.

## References

- [1] Brennan M.J., Dayou J., Global control of vibration using a tunable vibration neutralizer, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 232, no. 3, 2000, pp. 585–600.
- [2] Caetano E., Cunha Á., Magalhães F., Moutinho C., Studies for controlling human-induced vibration of the Pedro e Inês footbridge, Portugal. Part 2: Implementation of tuned mass dampers, *Engineering Structures*, vol. 32, 2010, pp. 1082–1091.
- [3] Cheung Y.L., Wong W.O., Isolation of bending vibration in a beam structure with a translational vibration absorber and a rotational vibration absorber, *Journal of Vibration and Control*, vol. 14, no. 8, 2008, pp. 1231–1246.
- [4] Dayou J., Brennan M.J., Global control of structural vibration using multiple-tuned tunable vibration neutralizers, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258, no. 2, 2002, pp. 345–357.
- [5] Esmalizadeh E., Jalili N., Optimal design of vibration absorbers for structurally damped Timoshenko beams, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 120, 1998, pp. 833–841.
- [6] Łatas W., Martynowicz P., Modeling of vibration of wind turbine tower-nacelle system with dynamic absorber (in Polish), *Modelowanie Inżynierskie*, vol. 44, no. 13, 2012, pp. 187–198.
- [7] Łatas W., Multiple tuned tunable translational-rotational vibration absorbers in beam, *Vibrations in Physical Systems*, vol. 26, 2014, pp. 145–152.
- [8] Li H.N., Ni X.L., Optimization of non-uniformly distributed multiple tuned mass damper, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 308, 2007, pp. 80–97.
- [9] Li J., Su M., Fan L., Vibration control of railway bridges under high-speed trains using multiple tuned mass dampers, *ASCE Journal of Bridge Engineering*, vol. 10, no. 3, 2005, pp. 312–320.

- [10] Li Quan., Fan J., Nie J., Li Quanyang., Chen Y., Crowd-induced random vibration of footbridge and vibration control using multiple tuned mass dampers, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, 2010, pp. 4068–4092.
- [11] Luu M., Zabel V., Könke C., An optimization method of multi-resonant response of high-speed train bridges using TMDs, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 53, 2012, pp. 13–2.
- [12] Yang F., Sedaghati R., Vibration suppression of non-uniform curved beams under random loading using optimal tuned mass damper, *Journal of Vibration and Control*, vol. 15, no. 2, 2009, pp. 233–261.
- [13] Yau J.D., Yang Y.B., A wideband MTMD system for reducing the dynamic response of continuous truss bridges to moving train loads, *Journal of Structural Engineering*, vol. 26, 2004, pp. 1795–1807.
- [14] Yau J.D., Yang Y.B., Vibration reduction for cable-stayed bridges traveled by high-speed trains, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, 2004, pp. 341–359.
- [15] Younesian D., Esmailzadeh E., Sedaghati R., Passive vibration control of beams subjected to random excitations with peaked PSD, *Journal of Vibration and Control*, vol. 12, no. 9, 2006, pp. 941–953.

## OPTYMALNE STROJENIE TRANSLACYJNO-ROTACYJNEGO TŁUMIKA DYNAMICZNEGO W GLOBALNYCH ZAGADNIENIACH REDUKCJI DRGAŃ W BELKACH

### Streszczenie

Praca dotyczy drgań belki poddanej działaniu skupionych i rozłożonych sił harmoniczych, z dołączonymi translacyjno-rotacyjnymi tłumikami dynamicznymi. W obliczeniach przyjęto liniowy model belki Eulera-Bernoulliego, równanie ruchu rozwiązano przy użyciu metody Fouriera. Zastosowanie czasowej transformacji Laplace'a pozwala na wyznaczenie amplitudy drgań w funkcji częstości. Przykłady obliczeń numerycznych dotyczą zagadnień minimalizacji energii kinetycznej całej belki lub jej części poprzez odpowiednie dostrojenie translacyjno-rotacyjnego tłumika drgań. Wyniki obliczeń numerycznych potwierdzają skuteczność stosowania translacyjno-rotacyjnych tłumików dynamicznych w belkach. W badanych przykładach wyznaczono optymalną strategię dostrajania tłumików minimalizującą energię kinetyczną.

**Słowa kluczowe:** dynamiczny tłumik drgań, drgania belki, tłumienie drgań, strojenie

DOI:10.7862/rb.2014.33

*Przesłano do redakcji: 30.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Katarzyna MISIUREK<sup>1</sup>

Paweł ŚNIADY<sup>2</sup>

## STOCHASTYCZNE DRGANIA BELKI SANDWICZOWEJ WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM. ANALIZA KORELACYJNA.

W pracy rozpatrywane są stochastyczne drgania belki sandwiczowej swobodnie podpartej wywołane stochastyczną siłą poruszającą się ze stałą prędkością. Korzystając z podstawowych technik analitycznych przeprowadzono analizę korelacyjną dla stochastycznych drgań belki. Przedstawiono dla wariacji rozwiązanie częściowo w formie zamkniętej. Rezultatem pracy jest zaprezentowanie wpływu prędkości z jaką porusza się siła na losową charakterystykę drgań, m.in. wariacji przemieszczeń pionowych i obrotu belki sandwiczowej. Wyprowadzono również zależność na dynamiczny współczynnik dla obciążeń stochastycznych.

**Słowa kluczowe:** belka sandwiczowa, stochastyczne drgania, obciążenie ruchome, losowy współczynnik dynamiczny

### 1. Wstęp

W konstrukcjach inżynierskim często spotykanym zjawiskiem jest występowanie drgań wywołanych poruszającym się obciążeniem. W rzeczywistości ruchome obciążenie działające na konstrukcję obok składowej deterministycznej może mieć składową nieregularną mającą charakter procesu stochastycznego. W pracy przedstawione zostanie rozwiązanie dla problemu drgań tłumionych belki sandwiczowej swobodnie podpartej wywołanych poruszającą się ze stałą prędkością siłą skupioną, która jest stacjonarnym procesem stochastycznym.

Konstrukcje sandwiczowe, zwane również konstrukcjami przekładkowymi lub warstwowymi, są układami mającymi trójwarstwową budowę. Konstrukcje te zbudowane są z dwóch cienkich warstw zewnętrznych charakteryzujących się

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Katarzyna Misiurek, Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Wroclawska, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, tel. +48 728 347 386, e-mail: katarzyna.misiurek@pwr.wroc.pl

<sup>2</sup> Paweł Śniady, Wydział Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji, Uniwersytet Przyrodniczy, pl. Grunwaldzki 24, 50-363 Wrocław, tel. 71 320 5506, e-mail: pawel.sniady@wp.pl

wysokimi właściwościami wytrzymałościowymi pomiędzy którymi znajduje się gruba warstwa środkowa o niskich właściwościach mechanicznych [1-3]. Konstrukcje sandwiczowe znajdują obecnie zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu i wykonuje się je z najbardziej zaawansowanych technologicznie materiałów. Obszar ich zastosowania ciągle się poszerza, dzięki przede wszystkim idei samych konstrukcji, które mogą być wytrzymałe tak samo jak konstrukcje jednorodne, ale cechują się znacznie niższą wagą.

Zagadnienie związane z obciążeniem stochastycznym dla belki Bernoulli-Eulera w zakresie teorii korelacyjnej rozpatrywał L. Fryba [4-6]. W pracy [12] rozpatrywano stochastyczne drgania belki, gdy siła porusza się ruchem przyspieszonym, hamującym i jednostajnym. Drgania belki nieskończenie długiej, której przemieszczenie opisane jest ruchem Browna rozpatrywane były w pracy [8]. Problem stochastycznych drgań belek wywołanych ruchomym obciążeniem analizowany był między innymi w pracach [10-12].

W niniejszej pracy przedstawione zostanie rozwiązanie w zakresie teorii korelacyjnej. Pomimo, że poruszająca się siła jest stacjonarnym procesem stochastycznym reakcja belki jest niestacjonarnym procesem stochastycznym co wynika z faktu, że siła działa na belkę przez skończony okres. Metodyka zastosowana w pracy opiera się na założeniach dotyczących konstrukcji sandwiczowych [7]. Poniższa praca stanowi kontynuację i poszerzenie rozważań zaprezentowanych w pracy [9], w której zaprezentowano rozwiązanie drgań nietłumionych dla deterministycznej siły ruchomej. Zastosowano podstawowy model jakim jest belka swobodnie podparta w celu zaprezentowania algorytmu rozwiązania dla stochastycznych drgań konstrukcji sandwiczowych.

## 2. Rozwiązanie ogólne

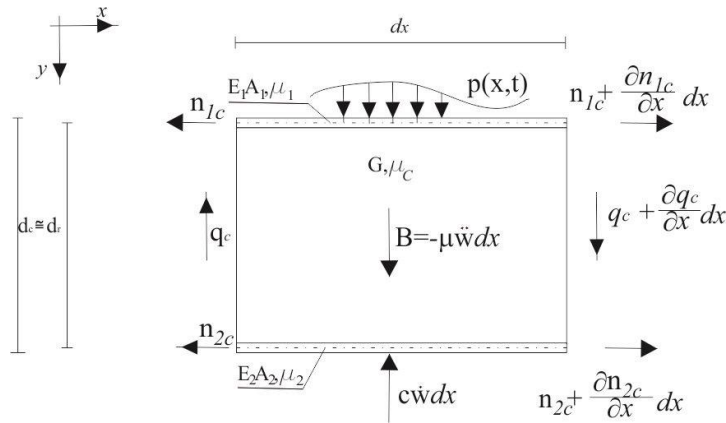
Rozpatrywana jest klasyczna belka sandwiczowa o prostokątnym przekroju poprzecznym składająca się z dwóch cienkich, sztywnych a zarazem elastycznych okładzin zewnętrznych i grubego rdzenia. Przyjęto następujące założenia przy analizie drgań belki wywołanych ruchomym obciążeniem:

- Ważne jest prawo Hooke'a,
- w porównaniu z okładzinami rdzeń charakteryzuje się dużą podatnością, zapewniając jednocześnie stały odstęp pomiędzy okładzinami,
- okładziny przenoszą tylko siły osiowe,
- siły ścinające są przenoszone przez rdzeń,
- ugięcie wszystkich warstw oraz przemieszczenie w kierunku normalnym jest identyczne,
- warstwy okładzinowe są elastyczne, izotropowe i nie ulegają deformacją podczas ścinania,
- elastyczny rdzeń przenosi tylko ścinanie i w płaszczyźnie normalnej naprężenia są pomijane;



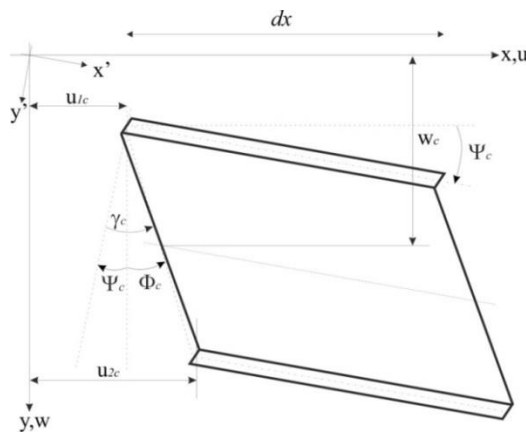
- Inercja podłużnych drgań może zostać pominięta, natomiast inercja poprzeczna jest dominująca [7, 9].

Na poniższych ilustracjach zaprezentowano przyjęty dodatni zwrot sił i przemieszczenia dla wyciętego elementu belki.



Rys. 1. Geometria belki sandwiczowej oraz wypadkowe sił (na podstawie [7])

Fig. 1. Geometry of a sandwich beam section and internal forces (based on [7])



Rys. 2. Schemat deformacji i przemieszczeń elementu belki sandwiczowej (na podstawie [7])

Fig. 2. Deformations and displacements in a sandwich beam section (based on [7])

Tłumione drgania belki w modelu ciągnowym opisuje układ równań różniczkowych

$$-Gbd_c \left[ \frac{\partial^2 w_c(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi_c(x,t)}{\partial x} \right] + c \frac{\partial w_c(x,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 w_c(x,t)}{\partial t^2} = P(t) \delta(x-vt), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_c(x,t)}{\partial x^2} - \frac{Gb}{\zeta d_c} \Phi_c(x,t) - \frac{Gb}{\zeta d_c} \frac{\partial w_c(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

gdzie symbol  $\delta(\cdot)$  oznacza deltę Diraca,  $\zeta = \frac{E_{1c} A_{1c} E_{2c} A_{2c}}{E_{1c} A_{1c} + E_{2c} A_{2c}}$ , przy czym

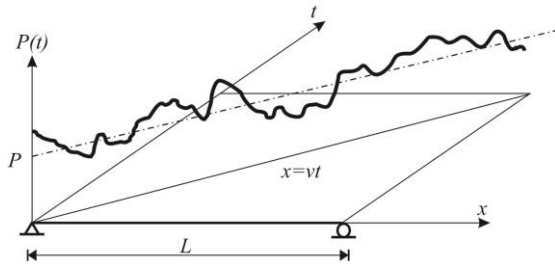
$0 \leq t \leq \frac{L}{v}$ . Symbolem  $\mu$  oznaczono masę przypadającą na jednostkę długości belki a przez  $c$  parametr tłumienia. Symbolem  $w_c = w_c(x,t)$  oznaczono przemieszczenie belki prostopadłe do jej osi a symbol  $\Phi_c = \Phi_c(x,t)$  oznacza kąt wynikający z wzajemnego przesunięcia się warstw zewnętrznych. Symbolem  $b$  oznaczono szerokość belki, symbol  $d_c$  oznacza wysokość belki. Przyjęto, że ruchoma siła skupiona  $P(t)$  poruszająca się ze stałą prędkością  $v$  (rys.3) jest stacjonarnym procesem stochastycznym w szerszym sensie i przedstawiamy ją w postaci sumy wartości średniej  $\bar{P}$  odpowiadającej deterministycznej części siły i fluktuacji losowej  $\tilde{P}(t)$ :

$$P(t) = \bar{P} + \tilde{P}(t) \quad (3)$$

Przy czym

$$E[P(t)] = \bar{P} = const. , \quad E[\tilde{P}(t)] = 0. \quad (4)$$

Symbolem  $E[\cdot]$  oznaczono operację wartości oczekiwanej.



Rys. 3. Ruch losowej siły  $P(t)$  po długości belki

Fig. 3. The motion of the random Force  $P(t)$  along the beam.

Przyjęto, że funkcja kowariancyjna ruchomej siły jest znana i jest równa

$$C_{PP}(t_1, t_2) = E[\tilde{P}(t_1)\tilde{P}(t_2)] = C_{PP}(t_2 - t_1) = C_{PP}(t). \quad (5)$$

Rozwiązanie od składowej stałej  $\bar{P}$  dla drgań nietłumionych przedstawiono w pracy [9]. W pracy zajmiemy się tylko fluktuacją losową  $\tilde{P}(t)$  rozpatrując drgania belki swobodnie podpartej. Dla belki swobodnie podpartej rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$w_c(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{cn}(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (6)$$

$$\Phi_c(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{cn}(t) \cos n\pi \frac{n\pi x}{L}. \quad (7)$$

Podstawiając powyższe szeregi do równań (1), (2) i zastąpieniu  $P(t)$  wielkością  $\tilde{P}(t)$  oraz wykonaniu odpowiednich operacji przedstawionych wcześniej otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$y_{cn}(t) = \frac{2}{\mu L} \int_0^t h_{y_{cn}}(t-\tau) \tilde{P}(\tau) \sin \frac{n\pi v\tau}{L} d\tau, \quad (8)$$

$$\varphi_{cn}(t) = \frac{2}{\mu L} \int_0^t h_{\varphi_{cn}}(t-\tau) \tilde{P}(\tau) \sin \frac{n\pi v\tau}{L} d\tau. \quad (9)$$

Impulsowe funkcje przejścia mają postać

$$h_{y_{cn}}(t) = e^{-\bar{\alpha}t} \frac{\sin \bar{\Omega}_{cn} t}{\bar{\Omega}_{cn}}, \quad (10)$$

$$h_{\varphi_{cn}}(t) = -\frac{b_{2c}^2 (n\pi) e^{-\bar{\alpha}t} \sin \bar{\Omega}_{cn} t}{(n\pi)^2 + b_{2c}^2 L} \frac{1}{\bar{\Omega}_{cn}}, \quad (11)$$

gdzie:  $\bar{\Omega}_{cn}^2 = \bar{\omega}_{cn}^2 - \bar{\alpha}_c^2$  przy czym  $\bar{\omega}_{cn}^2 = \frac{Gbd_c (n\pi)^4}{\mu L^2 [(n\pi)^2 + b_{2c}^2 L]}$ ,  $2\bar{\alpha}_c = \frac{c}{\mu}$ .

Korzystając ze wzorów (8), (9) otrzymuje się rozwiązanie dla funkcji kowariancyjnych współrzędnych uogólnionych

$$C_{y_{kc}y_{cn}}(t_1, t_2) = \frac{4}{(\mu L)^2} \cdot \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_{y_{ck}}(t_1 - \tau_1) h_{y_{cn}}(t_2 - \tau_2) C_{PP}[(\tau_1 - \tau_2)] \sin \frac{k\pi v\tau_1}{L} \sin \frac{n\pi v\tau_2}{L} d\tau_1 d\tau_2, \quad (12)$$

$$C_{\varphi_{ck}\varphi_{cn}}(t_1, t_2) = \left[ \frac{b_{2c}^2(k\pi)}{(k\pi)^2 + b_{2c}^2 L} \right] \left[ \frac{b_{2c}^2(n\pi)}{(n\pi)^2 + b_{2c}^2 L} \right] C_{y_{ck}y_{cn}}(t_1, t_2). \quad (13)$$

Stąd otrzymamy szukane funkcje kowariancji dla przemieszczeń belki

$$C_{w_c w_c}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{y_{ck}y_{cn}}(t_1, t_2) \sin \frac{k\pi x_1}{L} \sin \frac{n\pi x_2}{L}, \quad (14)$$

$$C_{\Phi_c \Phi_c}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{\varphi_{ck}\varphi_{cn}}(t_1, t_2) \cos \frac{k\pi x_1}{L} \cos \frac{n\pi x_2}{L}. \quad (15)$$

Wariancję przemieszczeń otrzymuje się ze wzorów (14), (15) przyjmując  $x_1 = x_2 = x$  i  $t_1 = t_2 = t$ .

Warto podkreślić, że gdy poruszająca się siła jest procesem o rozkładzie normalnym to funkcje przemieszczeń belki ( $w_c(x, t)$ ,  $\Phi_c(x, t)$ ) są także procesami o rozkładzie normalnym i wówczas wyznaczone wartości oczekiwane (od siły stałej) i funkcja kowariancji jednoznacznie określają ten rozkład. Założenie, że proces wzbudzenia drgań (ruchoma siła) jest procesem normalnym jest w pełni uzasadnione, gdyż często jest on sumą wielu przypadkowych i niezależnych czynników. Przykładowo losowość obciążenia wynika z poruszania się pojazdu po nierównej nawierzchni drogowej, której profil zmienia się w sposób przypadkowy.

Bazując na rozwiązaniach powyżej, możliwe jest wyznaczenie dynamicznego współczynnika dla obciążenia losowego, które wyraża się jako stosunek odchylenia standardowego dla ugięcia dynamicznego do odchylenia standardowego dla ugięcia statycznego wywołanego siłą w punkcie  $x_0$

$$\gamma_2(x, t) = \frac{\sigma_{\max w_{cn}^d}(x, t)}{\sigma_{\max w_{cn}^{st}}(x, x_0)}, \quad (16)$$

$$\text{gdzie: } \sigma_{w_{cn}^{st}}(x, x_0) = \frac{2\sigma_p L}{Gbd_c} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\left[ (n\pi)^2 + b_{2c}^2 L \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L}}{(n\pi)^4} \right]^2}.$$

Dynamiczny współczynnik dla obciążeń losowych może być wykorzystywany przy określaniu wartości charakterystycznej dla równoważnego obciążenia statycznego.

### 3. Rozwiązanie szczegółowe

Funkcja kowariancyjna ruchomej siły może mieć różną postać. Przyjmijmy, że poruszająca się siła jest stacjonarnym procesem stochastycznym normalnym typu „biały szum” a więc funkcja kowariancji jest określona wzorem  $C_{PP}(t) = \sigma_p^2 \delta(t)$ . Proces stochastyczny typu „biały szum” często stosowany jest do aproksymacji procesów szeroko widmowych. Po podstawieniu tej funkcji kowariancji do wzoru (12) otrzymuje się wyrażenie

$$\begin{aligned}
 C_{y_{ck}y_{cn}}(t_1, t_2) = & \\
 & \frac{4\sigma_p^2}{(\mu L)^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_{y_{ck}}(t_1 - \tau_1) h_{y_{cn}}(t_2 - \tau_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) \sin \frac{k\pi v \tau_1}{L} \sin \frac{n\pi v \tau_2}{L} d\tau_1 d\tau_2 = \\
 & \frac{4\sigma_p^2}{(\mu L)^2} \int_0^t h_{y_{ck}}(t_1 - \tau) h_{y_{cn}}(t_2 - \tau) \sin \frac{k\pi v \tau}{L} \sin \frac{n\pi v \tau}{L} d\tau,
 \end{aligned} \tag{17}$$

W szczególnym przypadku gdy  $t_1 = t_2 = t$  i  $n = k$  po wykonaniu odpowiednich całkowań otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 C_{y_{cn}y_{cn}}(t, t) = \sigma_{y_{cn}}^2(t) = & \frac{4\sigma_p^2}{(\mu L)^2 \bar{\Omega}_{cn}^2} \int_0^t e^{-2\bar{\alpha}_c(t-\tau)} \sin^2 \bar{\Omega}_{cn}(t-\tau) \sin^2 \frac{n\pi v \tau}{L} d\tau \\
 = & \frac{\sigma_p^2}{(\mu L)^2 \bar{\Omega}_{cn}^2} [K_{cn1}(t) + K_{cn2}(t) + K_{cn3}(t) + K_{cn4}(t)]
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$C_{\varphi_{ck}\varphi_{cn}}(t, t) = \left[ \frac{b_{2c}^2(n\pi)}{(n\pi)^2 + b_{2c}^2 L} \right]^2 \frac{\sigma_p^2}{(\mu_c L)^2 \bar{\Omega}_{cn}^2} \left[ \frac{K_{cn1}(t) + K_{cn2}(t)}{K_{cn3}(t) + K_{cn4}(t)} \right] \tag{19}$$

gdzie:

$$K_{cn1}(t) = \int_0^t e^{-2\bar{\alpha}_c(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2\bar{\alpha}_c} (1 - e^{-2\bar{\alpha}_c t})$$

$$\begin{aligned}
K_{cn2}(t) &= -\int_0^t e^{-2\bar{\alpha}_c(t-\tau)} \cos 2\frac{n\pi v\tau}{L} d\tau = \\
&= \frac{\bar{\alpha}_c e^{-2\bar{\alpha}_c t} - \bar{\alpha}_c \cos 2\frac{n\pi v t}{L} - \frac{n\pi v}{L} \sin 2\frac{n\pi v t}{L}}{2\left[\bar{\alpha}_c^2 + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2\right]} \\
K_{cn3}(t) &= -\int_0^t e^{-2\bar{\alpha}_c(t-\tau)} \cos 2\bar{\Omega}_{cn}(t-\tau) d\tau = \\
&= \frac{\bar{\alpha}_c + e^{-2\bar{\alpha}_c t} (\bar{\Omega}_{cn} \sin 2\bar{\Omega}_{cn} t - \bar{\alpha}_c \cos 2\bar{\Omega}_{cn} t)}{2(\bar{\alpha}_c^2 + \bar{\Omega}_{cn}^2)} \\
K_{cn4}(t) &= \int_0^t e^{-2\bar{\alpha}_c(t-\tau)} \cos 2\bar{\omega}_{cn}(t-\tau) \cos 2\frac{n\pi v\tau}{L} d\tau = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\bar{\alpha}_c \cos 2\frac{n\pi v t}{L} + \left(\frac{n\pi v}{L} - \bar{\Omega}_{cn}\right) \sin 2\frac{n\pi v t}{L}}{\bar{\alpha}_c^2 + \left(\frac{n\pi v}{L} - \bar{\Omega}_{cn}\right)^2} \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\bar{\alpha}_c \cos 2\frac{n\pi v t}{L} + \left(\frac{n\pi v}{L} + \bar{\Omega}_{cn}\right) \sin 2\frac{n\pi v t}{L}}{\bar{\alpha}_c^2 + \left(\frac{n\pi v}{L} + \bar{\Omega}_{cn}\right)^2} \\
&- \frac{1}{4} e^{-2\bar{\alpha}_c t} \left( \frac{\bar{\alpha}_c \cos 2\bar{\Omega}_{cn} t + \left(\frac{n\pi v}{L} - \bar{\Omega}_{cn}\right) \sin 2\bar{\Omega}_{cn} t}{\bar{\alpha}_c^2 + \left(\frac{n\pi v}{L} - \bar{\Omega}_{cn}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{\alpha}_c \cos 2\bar{\Omega}_{cn} t - \left(\frac{n\pi v}{L} + \bar{\Omega}_{cn}\right) \sin 2\bar{\Omega}_{cn} t}{\bar{\alpha}_c^2 + \left(\frac{n\pi v}{L} + \bar{\Omega}_{cn}\right)^2} \right)
\end{aligned}$$

Pomijając wzajemną kowariancję między różnymi współrzędnymi szukane wariancje obliczane ze wzorów uproszczonych (18), (19) przyjmują postać:

$$\sigma_{w_{cn}}^2(x, t) \cong \frac{\sigma_P^2}{(\mu L)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\Omega}_{cn}^2} [K_{cn1}(t) + K_{cn2}(t) + K_{cn3}(t) + K_{cn4}(t)] \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \quad (20)$$

$$\sigma_{\phi_{cn}}^2(x, t) \cong \frac{\sigma_P^2}{(\mu L)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{b_{2c}^2(n\pi)}{(n\pi)^2 + b_{2c}^2 L} \right]^2 \frac{1}{\bar{\Omega}_{cn}^2} [K_{cn1}(t) + K_{cn2}(t) + K_{cn3}(t) + K_{cn4}(t)] \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \quad (21)$$

Dynamiczny współczynnik dla obciążeń losowych dla środkowej przekroju przęśla wynosi:

$$\gamma_2\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{Gbd_c}{2\mu L^2} \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\Omega}_{cn}^2} [K_{cn1}(t) + K_{cn2}(t) + K_{cn3}(t) + K_{cn4}(t)] \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{[(n\pi)^2 + b_{2c}^2 L] \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{(n\pi)^4} \right]^2}} \quad (22)$$

#### 4. Przykład numeryczny

W tej części pracy analizowane jest zachowanie się belki sandwiczowej swobodnie podpartej obciążone losową siłą ruchomą poruszającą się ze stałą prędkością  $v$  po długości belki  $L$ .

Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone dla następujących założeń:

- okładziny wykonane są ze stali,
- rdzeń wykonany jest z drewna klejonego warstwowo.

Przyjęto następujące parametry obliczeniowe:  $L = 5m$ ,  $d_c = 0.4m$ ,  $b = 0.2m$ ,

$t_{1c} = t_{2c} = 0.01m$ ,  $E = 205GPa$ ,  $G_r = 780MPa$ ,  $P = 1kN$ .

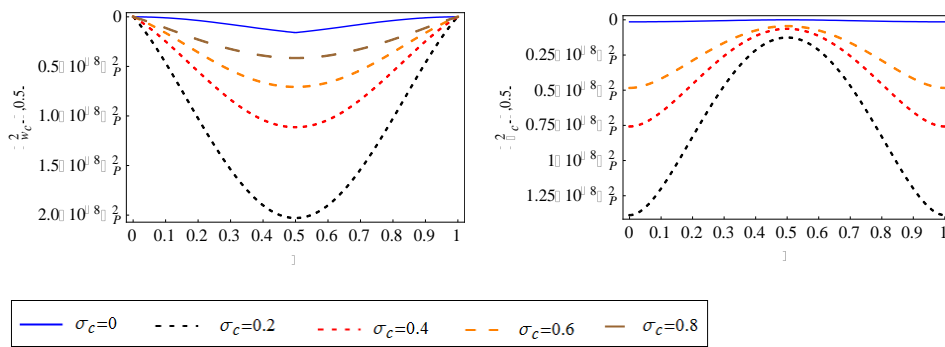
W przykładzie obliczeniowym przeanalizowano różne prędkości z jaką porusza-

ła się siła:  $\sigma_c = 0$ ,  $\sigma_c = 0.2$ ,  $\sigma_c = 0.4$ ,  $\sigma_c = 0.8$ , gdzie  $\sigma_c = \frac{v}{v_c}$  i  $v_c = \sqrt{\frac{Gbd_c}{\mu}}$

jest prędkością fali ścinającej w rdzeniu belki sandwiczowej. Analiza numerycz-

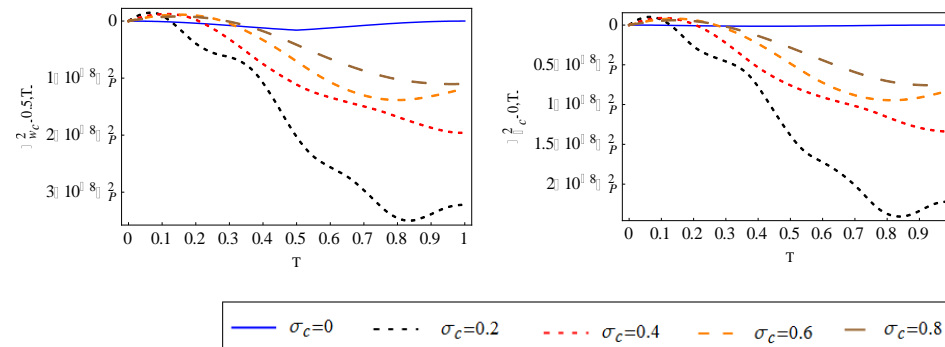
na została przeprowadzona dla zmiennych bezwymiarowych  $\xi = \frac{x}{L}$  oraz  $T = \frac{vt}{L}$ , gdzie  $\xi \in [0,1]$  oraz  $T \in [0,1]$ .

Na rysunkach nr 4 i 5 przedstawiono wykresy wariancji dla przemieszczeń pionowych i obrotu belki sandwiczowej w czasie przejazdu siły oraz w przekrojach charakterystycznych. Wraz ze wzrostem prędkości z jaką porusza się siła zmniejsza się wartość wariancji – jest to związane z zależnością ugięcia belki od prędkości przejazdu siły.



Rys. 4. Wykres wariancji dla ugięcia i obrotu belki, gdy siła dojechała do środka belki

Fig. 4. The variance for deflection and rotation of the beam when random moving force is inside the beam



Rys. 5. Wariancja ugięcia środka przęsa i obrotu belki na podporze w czasie przejazdu siły

Fig. 5. The variance of the center span deflection and the variance of the beam rotation on the support during the passage of forces



## 5. Wnioski

W pracy zaprezentowana została analiza korelacyjna belki sandwiczowej swobodnie podpartej, obciążonej stochastyczną siłą poruszającą się ze stałą prędkością. Analiza korelacyjna została przeprowadzona dla drgań tłumionych. W celu wyznaczenia funkcji kowariancji wyprowadzono wzory na impulsowe funkcje przejścia. Przyjęto również pewne uproszczenia, m.in. pominięto wzajemną korelację. Dla wariacji ugięcia i obrotu rozwiązanie przedstawiono częściowo w formie zamkniętej. Analiza numeryczna przeprowadzona została przy założeniu, że poruszająca się siła jest stacjonarnym procesem stochastycznym normalnym typu „biały szum”. W ramach analizy numerycznej przedstawiono wpływ prędkości z jaką porusza się siła na losową charakterystykę drgań: wariację przemieszczeń pionowych i obrotu belki sandwiczowej. Wyprowadzono zależność na dynamiczny współczynnik dla obciążeń stochastycznych.

## Literatura

- [1] Plantema F. J., Sandwich construction 1966, John Wiley & Sons.
- [2] Vinson JR, Sierakowski RL. The behavior of structures composed of composite materials. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff, 1989.
- [3] Matthews FL, Rawlings RD. Composite materials: engineering and science. London: Chapman & Hall, 1994.
- [4] Fryba L. Vibration of solids and structures under moving loads. Noordhoff International, 1972.
- [5] Fryba L. Non-stationary response of a beam to a moving random force. Journal of Sound and Vibration 1976;46:323–38.
- [6] Fryba L, Nakagiri S, Yoshikawa N. Stochastic finite elements for a beam on a random foundation with uncertain damping under a moving force. Journal of Sound and Vibration 1993;163:31–45.
- [7] Howson W.P., Zare A.: Exact dynamic stiffness matrix for flexural vibration of tree-layered sandwich beams, Journal of Sound and Vibration 282 (2005)
- [8] Knowles J. K., On the dynamic response of a beam to a randomly moving load, Journal of Applied Mechanics 1968, 35, 1-6.
- [9] Misiurek K., Sniady P, Vibrations of sandwich beam due to a moving force, Composite Structures, Vol. 104, pp. 85–93, 2013.
- [10] Tung CC. Random response of highway bridges to vehicle loads. Proc. ASCE, J Eng Mech Div 1967;93:73–94.
- [11] Tung CC. Response of highway bridges to renewal traffic loads. Proc. ASCE, J Eng Mech Div 1967;95:41–57.
- [12] Zibdeh H. S., Abu-Hilal M., Stochastic vibration of laminated composite coated traversed by a random moving load 2003, Engineering Structures.

*Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/N/ST8/02544.*

## STOCHASTIC VIBRATIONS OF SANDWICH BEAM TRAVERSED BY RANDOM MOVING LOAD

### Streszczenie

Praca dotyczy drgań belki poddanej działaniu skupionych i rozłożonych sił harmonicznym, z dołączonymi translacyjno-rotacyjnymi tłumikami dynamicznymi. W obliczeniach przyjęto liniowy model belki Eulera-Bernoulliego, równanie ruchu rozwiązano przy użyciu metody Fouriera. Zastosowanie czasowej transformacji Laplace'a pozwala na wyznaczenie amplitudy drgań w funkcji częstości. Przykłady obliczeń numerycznych dotyczą zagadnień minimalizacji energii kinetycznej całej belki lub jej części poprzez odpowiednie dostrojenie translacyjno-rotacyjnego tłumika drgań. Wyniki obliczeń numerycznych potwierdzają skuteczność stosowania translacyjno-rotacyjnych tłumików dynamicznych w belkach. W badanych przykładach wyznaczono optymalną strategię dostrajania tłumików minimalizującą energię kinetyczną.

**Słowa kluczowe:** dynamiczny tłumik drgań, drgania belki, tłumienie drgań, strojenie

DOI:10.7862/rb.2014.34

*Przesłano do redakcji: 16.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Stanisław NOGA<sup>1</sup>

## VIBRATION ANALYSIS OF A THIN RING INTERACTING WITH THE ANNULAR PLATE TREATED AS AN ELASTIC FOUNDATION

In this paper the free in-plane flexural vibration of a thin ring with elastic foundation of a Winkler type is analysed on the basis of the analytical and numerical methods. Mathematical model of the three-parameter elastic foundation is proposed. The separation of variables method is used to obtain the general solution of the considered system free vibration. Then the eigenvalue problem is solved by using the finite element method. Natural frequencies and normal modes of the system vibration are determined. The achieved results of calculation are discussed and verified by experimental data. FE model is formulated by using ANSYS software. It is important to note that the problems discussed in the paper bring practical advice for engineers dealing with dynamics of circular ring systems like aviation gears and railway wheels, respectively.

**Keywords:** in-plane flexural vibration, ring with foundation, three-parameter elastic foundation, circular systems

### 1. Introduction

The vibration theory of thin rings with wheel-plate as an elastic foundation finds application in several fields of engineering including the railway and aviation industries, and others [1, 2, 6]. The fundamental vibration theory of circular rings is presented in monograph [5]. The theory of thin circular rings is employed in paper [6] for a vibration analysis of a ring gear. Vibration of rotating rings with foundation are studied in paper [1]. The introductory investigation related to the systems of the rings with wheel-plate as the elastic foundation are conducted in articles [3,4]. In paper [2] the analytical model of foundation which consists of a special three-parameter Winkler elastic foundation is proposed. In the present paper the free in-plane flexural vibration of a circular ring with

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Stanisław Noga, Rzeszow University of Technology, al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, tel.: 178651639, e-mail: noga@prz.edu.pl

wheel–plate as a special three–parameter elastic foundation is studied using the classical thin ring theory, and the finite element (FE) formulation. The procedure of determining the substitute mass density of a system consisting of a ring with massless elastic foundation is presented. The achieved solutions are discussed and compared with experimental data. An experimental test is conducted by applying an object with arbitrary chosen geometry.

## 2. Theoretical formulation

Mechanical model of the system under consideration consists of a plane circular thin ring with wheel–plate as a special three–parameter, elastic foundation. It is assumed that the ring is perfectly elastic and that the centerline of the ring has radius  $R$  and an element of the ring, designed by angle  $\theta$ , displaces in the radial and circumferential direction, respectively (see Fig. 1). Moreover, it is assumed that the ring has homogeneous, rectangular cross–sectional area. The small displacements in these directions are denoted  $u(\theta, t)$  and  $w(\theta, t)$ , respectively, and  $t$  is time. Similarly as in paper [2], the foundation is formulated by the special three–parameter Winkler model. The coefficients  $k_f$ ,  $k_p$  and  $k_s$  represent the radial and tangential stiffness per length unit, and the ring cross–section angle rotation stiffness modulus, respectively.

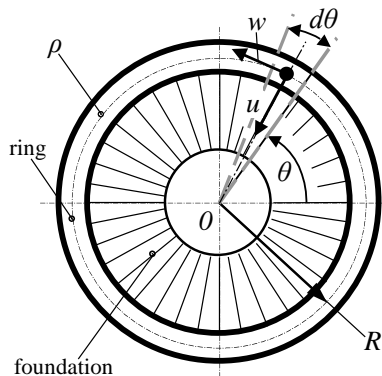


Fig. 1. Vibrating system under study

Rys. 1. Model układu drgającego

According to the vibrating thin rings classical theory [2,5], the partial differential equations of motion for the free in–plane flexural vibration can be combined into an one equation in terms of radial deflection  $u(\theta, t)$  as

$$\begin{aligned} \frac{EI_1}{R^3} \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) - \frac{k_s}{R} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) + \\ \left( k_f \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - k_p u \right) R + \rho AR \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where:  $E$  – Young's modulus,  
 $I_1$  – the rim cross section area moment of inertia,  
 $\rho$  – the mass density,  
 $A$  – the cross section area.

The general solution of equation (1) is assumed in the form

$$u(\theta, t) = U(\theta) e^{i\omega t} \quad (2)$$

where:  $\omega$  – the natural frequency,  
 $i = \sqrt{-1}$  – the imaginary unit.

After substitution (2) into equation (1), it becomes

$$\begin{aligned} \frac{d^6 U}{d\theta^6} + (2 - h_1) \frac{d^4 U}{d\theta^4} + (1 - 2h_1 + a_1) \frac{d^2 U}{d\theta^2} - \\ (c_1 + h_1) U - \omega^2 b_1 \left( \frac{d^2 U}{d\theta^2} - U \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

where:

$$a_1 = \frac{k_f R^4}{EI_1}, \quad b_1 = \frac{\rho AR^4}{EI_1}, \quad c_1 = \frac{k_p R^4}{EI_1}, \quad h_1 = \frac{k_s R^2}{EI_1}. \quad (4)$$

The solution of equation (3) is assumed as

$$U(\theta) = \sum_{j=1}^3 D_{jn} \sin(n\theta + \varphi_{jn}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (5)$$

where:  $D_{jn}, \varphi_{jn}$  – constants.

When equation (5) is substituted into equation (3), it yields the natural frequencies of vibration as

$$\omega_n^2 = \frac{n^6 - (2 - h_1)n^4 + (1 - 2h_1 + a_1)n^2 + (c_1 + h_1)}{b_1(n^2 + 1)}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6)$$

As denoted in the previously presented equations,  $n$  must be an integer with a value greater than 1. For the case when  $n$  is equal 1 only the pure rigid body oscillation without any alteration of ring shape exists.

### 3. The finite element representation

In this section the discrete model of the system under study is formulated using finite element method (ANSYS program). To find the eigenpairs (eigenvalue, eigenvector) connected with the natural frequencies and normal modes of the ring system, the block Lanczos method is employed [5]. The principal problem of this section is the elaboration of the FE model of the system with proper value of the ring substitute mass density  $\rho_z$  and massless elastic foundation, respectively. The analysed object has the geometry as it is displayed in Fig. 2. The proposed FE model is realized as follows. The ring part is modeled as the solid body and the foundation part is prepared as the massless solid body.

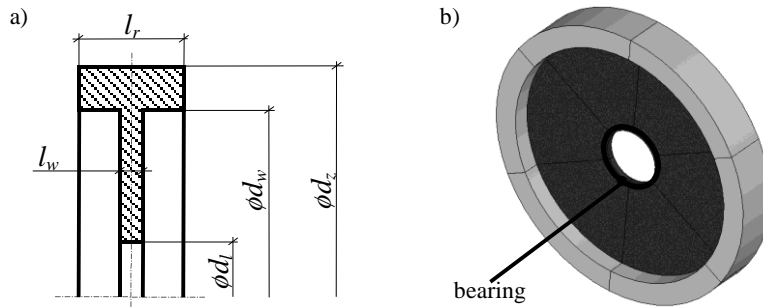


Fig. 2. (a) geometrical dimensions, (b) model of the system

Rys. 2. (a) wymiary geometryczne, (b) model układu

The ten node tetrahedral element (solid187) with three degrees of freedom in each node is utilized to solve the considered problem. The proper value of the substitute mass density  $\rho_z$  of the ring system is selected during simulation to minimise the so-called frequency error defined by [2]

$$\varepsilon_n = \left( \omega_n^f - \omega_n^c \right) / \omega_n^c \cdot 100\% \quad (7)$$

where:  $\omega_n^f$  – the natural frequency of the model,

$\omega_n^c$  – the natural frequency of the object.

The elaborated FE model includes 54858 solid elements.

#### 4. Numerical analysis

Numerical solutions for free vibration analysis of the circular ring with wheel-plate, models suggested earlier, are obtained. For all results presented here, the first seven natural frequencies and corresponding normal modes are discussed.

Table 1. Parameters characterizing the system of ring with foundation

Tabela 1. Parametry techniczne rozważanego układu pierścieniowego

$d_z$ [m]	$d_w$ [m]	$h$ [m]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$R$ [m]	$d_l$ [m]	$l_r$ [m]	$l_w$ [m]	$E$ [Pa]	$\nu$
0.179	0.171	0.004	$7.85 \cdot 10^3$	0.0875	0.02	0.008	0.002	$2.1 \cdot 10^{11}$	0.28

Table 1 shows the parameters characterizing the considered system. In this Table,  $h$  is the depth of the ring,  $\nu$  is the Poisson ratio and the rest of geometrical dimensions are defined as displayed in Fig. 2. Firstly, the computations are conducted to determine the ring substitute mass density  $\rho_z$  of the FE model related to the corresponding object. Satisfactory results are achieved for the value of  $\rho_z = 1.5 \cdot 10^4$  [kg/m<sup>3</sup>]. The same value of  $\rho_z$  is included in the analytical solution. Then the proper values of stiffness modulus  $k_f$ ,  $k_p$  and  $k_s$  in the analytical model are evaluated during numerical simulation. The results of calculations of the natural frequencies are displayed in Table 2.

Table 2. Results of calculations related to the system under study

Tabela 2. Wyniki obliczeń odnoszących się do badanego układu

$n$	$k_f$ [N/m <sup>2</sup> ]	$k_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$k_s$ [N/m]	2	3	4	5	6	7	8
natural frequencies of the considered model $\omega_n$ [Hz] (analytical solution)										
	$2.44 \cdot 10^9$	$6 \cdot 10^8$	$3.5 \cdot 10^6$	12362	16550	21072	25767	30569	35450	40396
natural frequencies of the considered model $\omega_n$ [Hz] (FE solution)										
	–	–	–	13877	19877	23744	26896	29690	32268	34704

In the Figs. 3 and 4 four normal modes come from the FE model are shown.

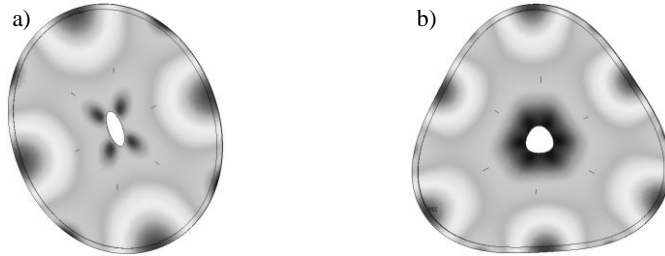


Fig. 3. Mode shapes related to the following frequencies: (a)  $\omega_2$ , (b)  $\omega_3$

Rys. 3. Postacie drgań własnych odpowiadające częstościom (a)  $\omega_2$ , (b)  $\omega_3$

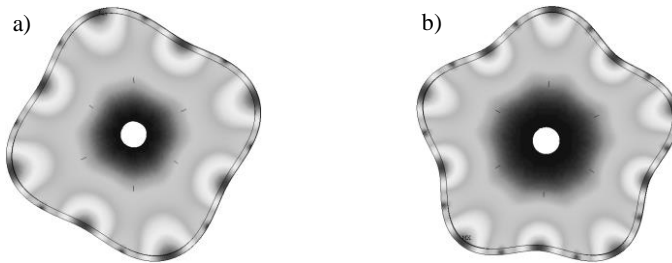


Fig. 4. Mode shapes related to the following frequencies: (a)  $\omega_4$ , (b)  $\omega_5$

Rys. 4. Postacie drgań własnych odpowiadające częstościom (a)  $\omega_4$ , (b)  $\omega_5$

## 5. Experimental investigation

In this section the results related to the experimental verification of the considered analytical and numerical models of the system under study are discussed. LMS measurement set is employed in the experimental investigation. The measuring set consisted of the PCB model 086C03 type modal hammer equipped with a gauging point made of steel, accelerometer PCB model 353B18, LMS SCADA data acquisition system, and SCM-V4E type measuring module supported by LMS Test.Lab software. The experimental investigation is conducted to identify natural frequencies and corresponding normal modes related to the in-plane flexural vibration of the object under study. The values of the excited natural frequencies are displayed in Table 3. These values are compared with the values of natural frequencies from the FE and analytical model, respectively. In the same Table the values of the frequency error related to the discussed models are included. The achieved results are satisfactory and a better fit is obtained for the analytical model (especially for the frequency  $\omega_7$ , see Table 3).

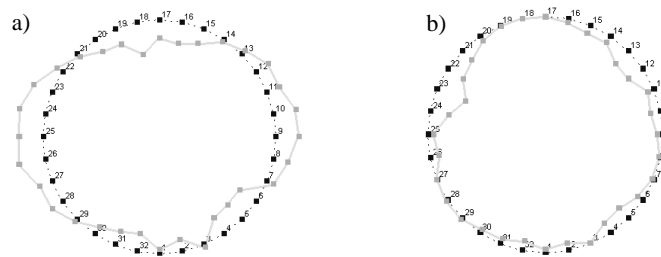


Table 3. Results of verification of the system under study

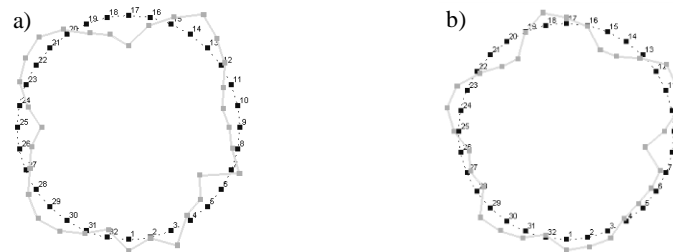
Tabela 3. Wyniki badań doświadczalnych rozważanego układu

$n$	2	3	4	5	6	7	8
natural frequencies of the considered object $\omega_n$ [Hz] (experimental data)							
	11732	17215	22934	27451	31482	35206	39488
frequency error $\varepsilon_n$ [%] (comes from the analytical solution)							
	5.37	-3.86	-8.12	-6.14	-2.9	0.69	2.3
frequency error $\varepsilon_n$ [%] (comes from the FE solution)							
	18.28	15.46	3.53	-2.02	-5.69	-8.34	-12.11

In the Figs. 5 and 6 four normal modes come from the experimental test are shown.

Fig. 5. Mode shapes related to the following frequencies: (a)  $\omega_2$ , (b)  $\omega_3$ 

Rys. 5. Postacie drgań własnych odpowiadające częstościom (a)  $\omega_2$ , (b)  $\omega_3$

Fig. 6. Mode shapes related to the following frequencies: (a)  $\omega_4$ , (b)  $\omega_5$ 

Rys. 6. Postacie drgań własnych odpowiadające częstościom (a)  $\omega_4$ , (b)  $\omega_5$

## 6. Conclusions

In this paper, a comprehensive study of the free in-plane flexural vibration analysis of thin ring with wheel-plate as a special three-parameter Winkler foundation is investigated on basis of the analytical method and numerical simu-

lation. The separation of variables method is employed to solve the free vibration problem. The obtained analytical and numerical solutions are verified successfully during experimental investigation.

### Literatura

- [1] Bert C.W., Chen T.L.C.: On vibration of a thick flexible ring rotating at high speed, *Journal of Sound and Vibration*, 61, 1978, pp. 517–530.
- [2] Noga S., Bogacz R., Markowski T.: Vibration analysis of wheels composed of a ring and wheel–plate modeled as the three–parameters elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.019>.
- [3] Noga S., Markowski T., Bogacz R.: Natural frequencies of flexural vibration of a ring with wheel–plate as the Winkler elastic foundation, *Symulacja w Badaniach i Rozwoju*, vol. 3, no. 1, 2012, pp. 39–46.
- [4] Noga S., Markowski T.: In plane flexural vibration of a ring interacting with the Winkler foundation, *Vibration in Physical System*, vol. XXV, 2012, pp. 305–310.
- [5] Rao S.S.: *Vibration of Continuous Systems*, Wiley, Hoboken, 2007.
- [6] Wu X., Parker R.G.: Vibration of rings on a general elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 295, 2006, pp. 194–213.

## ANALIZA DRGAŃ CIENKIEGO PIERŚCIENIA WSPÓLPRACUJĄCEGO Z PŁYTĄ PIERŚCIENIOWĄ, TRAKTOWANĄ JAKO PODŁOŻE SPRĘŻYSTE

### Streszczenie

W pracy analizowane są drgania giętne w płaszczyźnie cienkiego pierścienia współpracującego z podłożem sprężystym typu Winklera, w oparciu o metody analityczne i numeryczne. Zaproponowano trzyparametryczny model matematyczny podłoża sprężystego. Zagadnienie drgań własnych układu rozwiązano metodą rozdzielania zmiennych. Następnie wykorzystując metodę elementów skończonych, rozwiązano zagadnienie własne omawianego układu. Otrzymane rozwiązania zweryfikowano badaniami doświadczalnymi. Wymagane modele MES opracowano w środowisku obliczeniowym ANSYS. Warto podkreślić, że omawiane w pracy zagadnienia mogą być pomocne inżynierom, zajmującym się obliczeniami dynamiki układów kołowych (kół zębatych, kół kolejowych).

**Słowa kluczowe:** drgania giętne w płaszczyźnie, pierścień z podłożem sprężystym, trzyparametryczne podłoże sprężyste, układy kołowe

DOI:10.7862/rb.2014.35

*Przesłano do redakcji: 13.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Karol PERETA<sup>1</sup>

## WPLYW BRAMY WJAZDOWEJ NA SKUTECZNOŚĆ EKRANU AKUSTYCZNEGO

Jednym z największych problemów ochrony przed hałasem, którego źródłami są pojazdy samochodowe jest prawidłowe zaprojektowanie ekranów akustycznych, ich wysokości, długości oraz zapewnienie możliwości wjazdu na posesję tak by nie obniżał on skuteczności projektowanego ekranu. W niniejszym artykule przedstawiono doświadczalną i obliczeniową ocenę skuteczności ekranu akustycznego z bramą wjazdową oraz wpływ bramy na skuteczność ekranu. Głównym zadaniem badanego ekranu, jest zapewnienie komfortu akustycznego mieszkańcom chronionego obiektu. W celu wyznaczenia skuteczności ekranu in-situ, zastosowano metodę pośrednią zgodnie z [2]. Wyniki z badań terenowych porównano z trzema metodami analitycznymi. W metodach analitycznych uwzględniono temperaturę powietrza, a na jej podstawie prędkość i długość fali dźwiękowej w określonych częstotliwościach. Wykazano stosunkowo niewielką skuteczność wynikającą przede wszystkim z niedostatecznej długości i wysokości ekranu. Wpływ bramy wjazdowej na skuteczność ekranu jest znikomy i waha się od 0.37 do 0.62 dB. Niewielki wpływ bramy wjazdowej na poprawę klimatu akustycznego w obszarze chronionych wynika z prześwitu pod bramą, mniejszej wysokości bramy (ok. 30 cm) od wysokości ekranu oraz prześwitów pomiędzy bramą a ekranami, widocznych dopiero po jej zasunięciu.

**Słowa kluczowe:** ekran akustyczny, hałas komunikacyjny, skuteczność ekranów, brama wjazdowa

### 1. Wstęp

Zaobserwowany szybki rozwój motoryzacji oraz zwiększająca się liczba pojazdów kołowych na polskich drogach spowodowała zwiększenie zanieczyszczenia środowiska hałasem i towarzyszącymi mu wibracjami. Fakt ten odczuwalny jest najbardziej przez ludzi zamieszkujących większe aglomeracje oraz bliskie sąsiedztwo szlaków komunikacji samochodowej. Zgodnie z [1] ocenia się, że głównym składnikiem nadmiernego poziomu dźwięku w Polsce jest hałas komunikacyjny, zwłaszcza hałas drogowy. Narastający hałas komunikacyjny wymusił budowę ekranów akustycznych wzdłuż szlaków komunikacyjnych,

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Karol Pereta, Politechnika Rzeszowska, ul. Poznańska 2, 35-084 Rzeszów, tel. +48 17 8651618, e-mail: kpereta@prz.edu.pl

między jezdniami a zabudową mieszkaniową. Ze względu na konieczność wjazdu na posesję, ekrany wyposażane są w bramy wjazdowe, których wpływ na skuteczność całego ekranu jest znikomy. Taki właśnie przypadek rozważono w niniejszym artykule.

## 2. Opis badanego ekranu

Przedmiotem badań był ekran akustyczny, pochłaniająco – odbijający, o długości 104 m i wysokości 3.4 m, zlokalizowany wzdłuż drogi krajowej o średnim dobowym natężeniu ruchu 18.660 pojazdów. Droga znajduje się na nasypie o wysokości ok. 1.2 m. Głównym celem budowy ekranu była ochrona akustyczna budynku jednorodzinnego, usytuowanego w odległości 35.6 m od krawędzi jezdni. Ekran został wyposażony w przesuwную bramę z Plexiglass'u, umożliwiającą wjazd na posesję (rys. 1). Brama jest o 0.3 m niższa od ekranu, a między spodem bramy a drogą dojazdową do posesji zmierzono szczelinę o wysokości ok. 0.15 m. Ekran wykonano z płyt betonowych o gr. 90 mm i dźwiękochłonnej wykładziny ze zrębkobetonu gr. 110 mm. Do produkcji wykładziny zastosowano mechanicznie rozdrobnione kawałki drewna iglastego oraz zaprawę cementową.



Rys. 1. Widok ekranu akustycznego od strony drogi

Fig. 1. Acoustic screen view from the road side



Rys. 2. Widok bramy wjazdowej

Fig. 2. Entry gate view

### 3. Doświadczalna ocena skuteczności ekran

Ze względu na brak możliwości pomiaru ciśnienia akustycznego w sytuacji „przed” instalacją istniejącego ekranu akustycznego, ocenę skuteczności wykonano metodą pomiaru pośredniego zgodnie z [2]. Szacunkowy poziom ciśnienia akustycznego „przed” instalacją ekranu wyznaczono po-przez wykonanie pomiaru w miejscu będącym równoważnikiem miejsca badań zasadniczych.

Czas trwania pomiarów przyjęto na podstawie przewidywanego zakresu zmienności poziomu dźwięku zgodnie z [2]. Czas ten był równy 30 min.

#### 3.1. Aparatura pomiarowa

Do badań akustycznych użyto sprzęt firmy Brüel&Kjær, tj. dwukanałowy, ręczny miernik typu 2270, mikrofony typu 4189 z osłonami przeciwwietrznymi UA-0237, UA-1650 oraz statywy mikrofonowe (rys. 3). Warunki atmosferyczne mierzono przenośną stacją meteorologiczną HOBO U30-NRC wyposażoną w anemometr, higrometr, termometr i rejestrator.



Rys. 3. Mikrofon odbioru, miernik B&K, mikrofon odniesienia

Fig. 3. Reception microphone, measurer B&K 2270, reference microphone

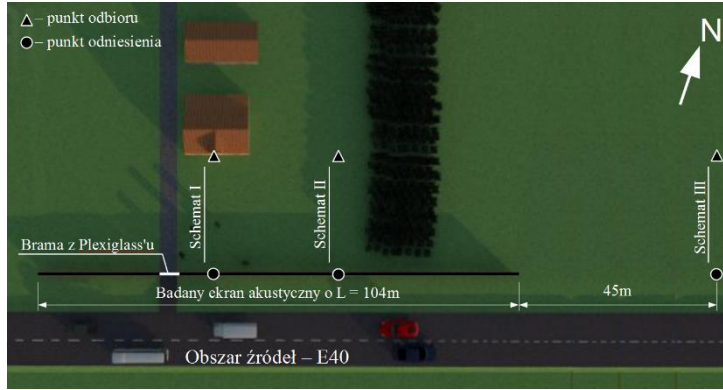
#### 3.2. Punkty i schematy pomiarowe

Na rys. 4 przedstawiono obszar objęty badaniami i rozmieszczenie punktów pomiarowych. Oznaczono również schematy pomiarowe.

Pomiary przeprowadzono w trzech schematach:

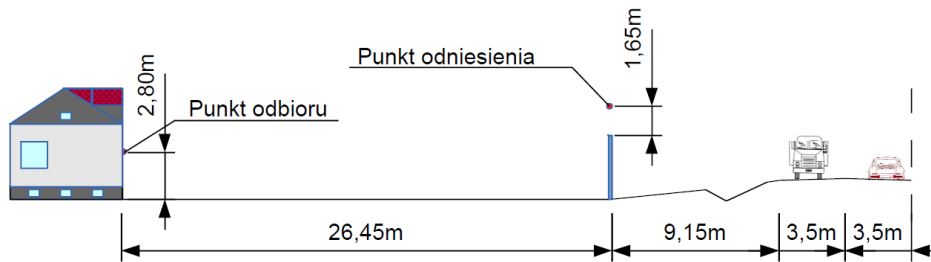
- schemat I w którym punkt odbioru znajdował się bezpośrednio przy elewacji budynku 2.80 m nad poziomem terenu, a punkt odniesienia 1.65 m nad górną krawędzią ekranu akustycznego (rys. 5),
- schemat II to pomiary w obszarze podlegającym ochronie przed hałasem, w miejscu gdzie nie było budynku; punkt pomiarowy usytuowano w takich samych odległościach od źródła jak w schemacie I (rys. 6),
- schemat III to pomiary w obszarze porównawczym służącym określeniu poziomu dźwięku „przed” instalacją ekranu (obszar porównawczy wybrano

zgodnie z [2]), punkt odbioru zlokalizowano w takiej samej odległości od źródła jak w schemacie I i II (rys. 7).



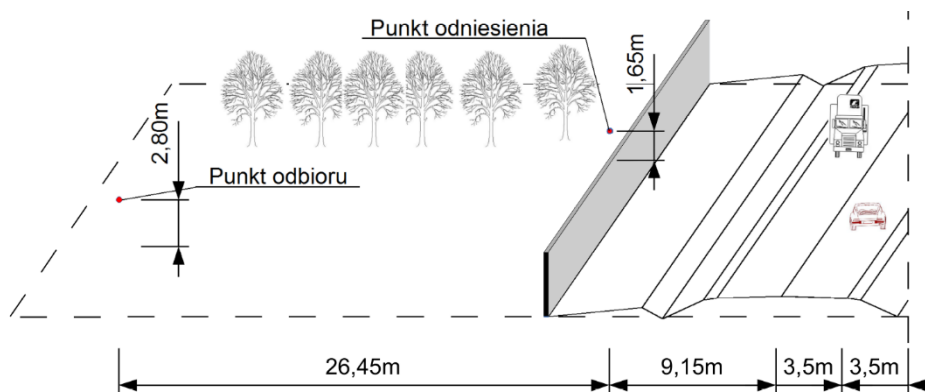
Rys. 4. Obszar badań

Pic. 4. Area of study



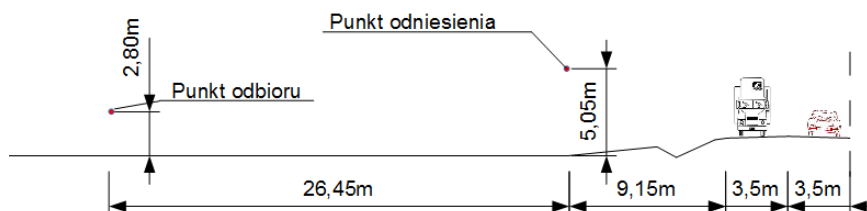
Rys. 5. Schemat pomiarowy I

Fig. 5. Measurement scheme I



Rys. 6. Schemat pomiarowy II

Fig. 6. Measurement scheme II



Rys. 7. Schemat pomiarowy III

Fig. 7. Measurement scheme III

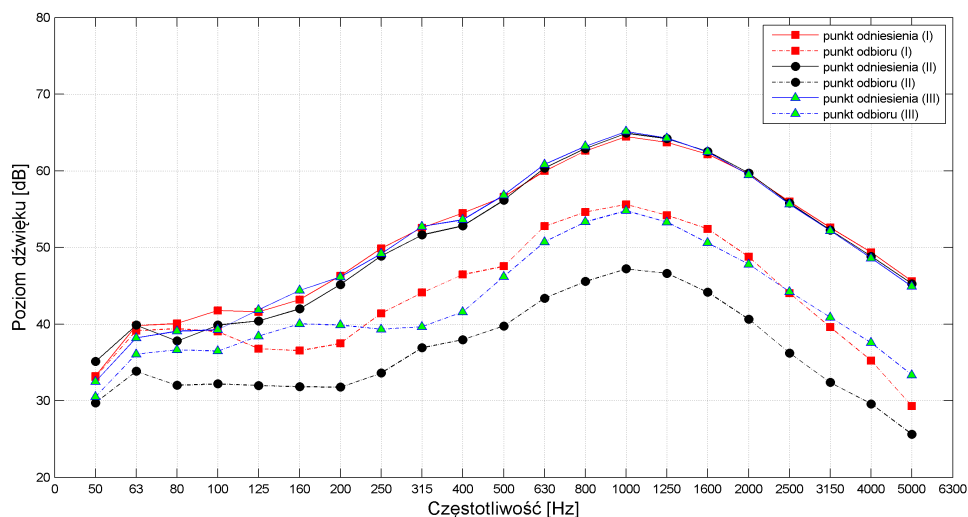
### 3.3. Wyniki pomiarów

Maksymalna temperatura jaką zanotowano w czasie badań to 17.32°C a minimalna 14.17°C. Wilgotność względna powietrza wahała się w granicach 29.8% do 42.1%, prędkość wiatru nie przekroczyła 3.9 m/s. Zachmurzenie zostało zakwalifikowane do klasy pierwszej.

Poziom ciśnienia akustycznego rejestrowano w pasmach tercjowych, w zakresie od 50 Hz do 5 kHz. Zastosowano charakterystykę korekcyjną „A”. Rejestracja ciśnienia akustycznego w punkcie odniesienia i punkcie odbioru była równoczesna. Przykładowe widma hałasu w punkcie odniesienia i punkcie odbioru przedstawiono na rys. 8.

Zarejestrowane w pasmach tercjowych poziomy dźwięku przeliczono na równoważny poziom dźwięku stosując wzór:

$$L = 10 \log \left( \sum_{i=1}^{21} 10^{0.1L_i} \right) \quad (1)$$



Rys. 8. Widmo dźwięku w punkcie odniesienia i punkcie odbioru – schemat I, II i III

Fig. 8. Sound spectrum at the reference and reception point – scheme I, II and III

gdzie:  $L_i$  – poziom dźwięku w paśmie tercjowym.

Wartości równoważnych poziomów dźwięku w poszczególnych punktach pomiarowych, dla poszczególnych pomiarów i schematów pomiarowych przedstawiono w Tab. 1.

Tabela 1. Równoważne poziomy dźwięku w [dB] dla poszczególnych schematów pomiarowych  
Table 1. Equivalent sound levels on [dB] for each measurement scheme

Schemat I [dB]	$I_{zam}$	Punkt odniesienia ( $L_{ref,AIzam}$ )	70.91
		Punkt odbioru ( $L_{r,AIzam}$ )	61.98
	$I_{otw}$	Punkt odniesienia ( $L_{ref,AIotw}$ )	71.64
		Punkt odbioru ( $L_{r,AIotw}$ )	63.33
Schemat II [dB]	$II_{otw}$	Punkt odniesienia ( $L_{ref,AIIotw}$ )	71.52
		Punkt odbioru ( $L_{r,AIIotw}$ )	54.44
	$II_{zam}$	Punkt odniesienia ( $L_{ref,AIIzam}$ )	71.16
		Punkt odbioru ( $L_{r,AIIzam}$ )	53.71
Schemat III [dB]		Punkt odniesienia ( $L_{ref,B}$ )	71.34
		Punkt odbioru ( $L_{r,B}$ )	60.73

Różnice poziomów dźwięku w punkcie odniesienia i punkcie odbioru obliczono uwzględniając usytuowanie punktu odbioru, korzystając ze wzorów:

$$\Delta L_B = L_{ref,B} - (L_{r,B} - C_r) = 71.34 - (60.73 - 0) = 10.61 \text{ dB},$$

$$\Delta L_{A1zam} = L_{ref,AIzam} - (L_{r,AIzam} - C_r') = 70.91 - (61.98 - 6) = 14.93 \text{ dB},$$

$$\Delta L_{A1otw} = L_{ref,AIotw} - (L_{r,AIotw} - C_r') = 71.64 - (63.33 - 6) = 14.31 \text{ dB},$$

$$\Delta L_{A2otw} = L_{ref,AIIotw} - (L_{r,AIIotw} - C_r) = 71.52 - (54.44 - 0) = 17.08 \text{ dB},$$

$$\Delta L_{A2zam} = L_{ref,AIIzam} - (L_{r,AIIzam} - C_r) = 71.16 - (53.71 - 0) = 17.45 \text{ dB},$$

gdzie:  $C_r$  i  $C_r'$  to współczynniki korekcyjne, przyjęte zgodnie z [2]:

- dla pola swobodnego w obszarze półkulistym:  $C_r = 0 \text{ dB}$ ,
- dla punktu odbioru „na powierzchniach odbijających”:  $C_r' = 6 \text{ dB}$ .

Zmierzona pośrednio skuteczność ekranu  $D_{IL}'$  wynosi:

- na powierzchni odbijającej (brama zamknięta):

$$D_{IL1zam}' = \Delta L_{A1zam} - \Delta L_B = 14.93 - 10.61 = 4.32 \approx 4 \text{ dB},$$

- na powierzchni odbijającej (brama otwarta):

$$D_{IL1otw}' = \Delta L_{A1otw} - \Delta L_B = 14.31 - 10.61 = 3.70 \approx 4 \text{ dB},$$



- dla pola swobodnego (brama otwarta):

$$D_{IL2otw}' = \Delta L_{A2otw} - \Delta L_B = 17.08 - 10.61 = 6.47 \approx 6 \text{ dB},$$

- dla pola swobodnego (brama zamknięta):

$$D_{IL2zam}' = \Delta L_{A2zam} - \Delta L_B = 17.45 - 10.61 = 6.84 \approx 7 \text{ dB}.$$

#### 4. Obliczeniowe określenie efektywności ekranu

Miarą skuteczności akustycznej ekranu jest efektywność akustyczna  $\Delta L_E$ , obliczana jako różnica pomiędzy poziomem ciśnienia akustycznego w sąsiedztwie obiektu chronionego przy braku ekranu  $L_1$  i poziomem ciśnienia akustycznego w obecności ekranu  $L_2$ :

$$\Delta L_E = L_1 - L_2 \quad (3)$$

Metody obliczeniowe określenia efektywności akustycznej opierają się na założeniu nieskończenie długiego ekranu w postaci cienkiej pionowej płyty. W analizowanym przypadku uwzględniono warunki atmosferyczne, w jakich wykonano pomiary. Średnią prędkość dźwięku  $V$  [m/s] skorygowano, uwzględniając rzeczywistą temperaturę powietrza, korzystając ze wzoru:

$$V = 331.5 + 0.6 \cdot \Theta \quad (4)$$

gdzie:  $\Theta$  – temperatura powietrza w [°C],  $\Theta = 15.67$  °C.

Długości fal  $\lambda$  [m] dla częstotliwości w zakresie od 50 Hz do 5 kHz obliczono ze wzoru:

$$\lambda = \frac{V}{f} \quad (5)$$

gdzie:  $V$  – średnia prędkość dźwięku w powietrzu,  $f$  – częstotliwość [Hz].

Wyniki obliczeń przedstawiono w Tab. 2.

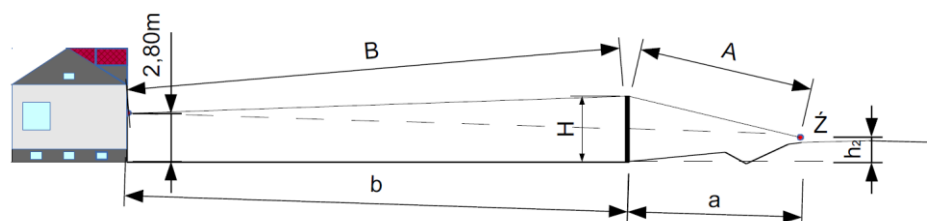
Efektywność akustyczną ekranu obliczono w poszczególnych pasmach częstotliwości trzema metodami: Rettingera, Meakawy i Rathego [4]. Parametry geometryczne przedstawiono na rys. 9. Wartości parametrów są następujące:  $h_2 = 1.25$  m,  $h_1 = 2.8$  m,  $a = 9.43$  m,  $b = 26.2$  m,  $H = 3.40$  m,  $A = 9.41$  m,  $B = 26.46$  m.

Wyniki obliczeń zamieszczono w Tab. 3. W tabeli tej zamieszczono również efektywność określoną na podstawie pomiarów in-situ, obliczoną jako różnicę zmierzonych wartości poziomu ciśnienia akustycznego w punkcie odbioru przy braku ekranu (schemat III) i w punkcie odbioru w obecności ekranu (schemat I i II). W celu lepszego zobrazowania otrzymanych wyników, przedstawiono je na rys. 10 i 11.

Tabela 2. Długość fali dźwiękowej w temperaturze powietrza 15.67 °C

Table 2. Sound wave length at air temperature 15.67 °C

f [Hz]	50	63	80	100	125	160	200
$\lambda$ [m]	6.818	5.411	4.261	3.409	2.727	2.131	1.704
f [Hz]	250	315	400	500	630	800	1000
$\lambda$ [m]	1.364	1.082	0.852	0.682	0.541	0.426	0.341
f [Hz]	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000
$\lambda$ [m]	0.273	0.213	0.170	0.136	0.108	0.085	0.068



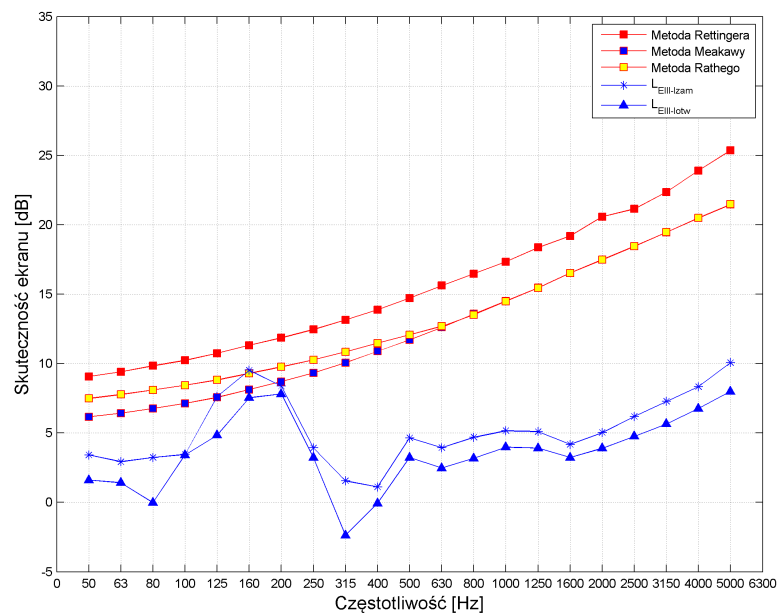
Rys. 9. Parametry geometryczne badanego obiektu

Fig. 9. Geometry parameters of the tested object

## 5. Podsumowanie i wnioski

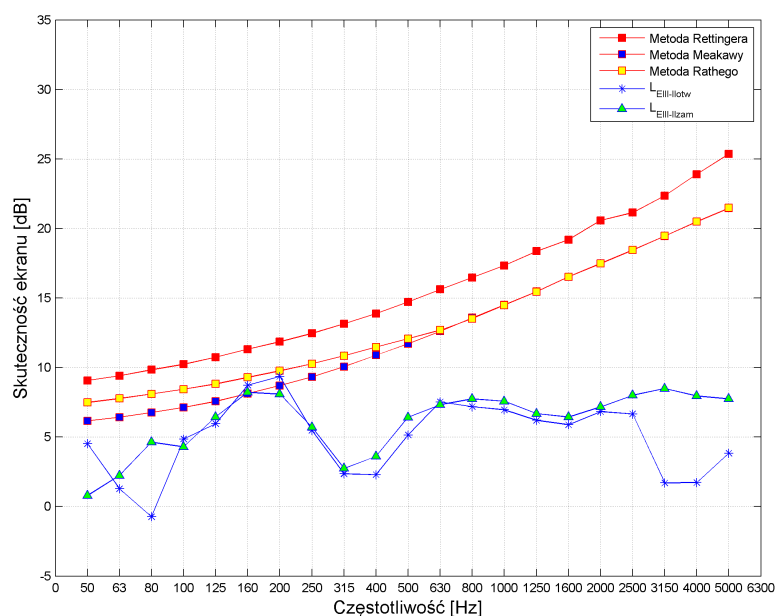
Wyznaczona doświadczalnie skuteczność ekranu mieści się w przedziale, 4-7 dB. Skuteczność badanych ekranów akustycznych może być sklasyfikowana jako skuteczność „tolerowana” w przypadku dolnej granicy przedziału i wystarczająca (dostateczna), w przypadku górnej granicy przedziału. Przyjęty współczynnik korekcyjny  $Cr'$  uwzględniający zjawisko odbicia fali dźwiękowej wydaje się poprawnie opisywać to zjawisko fizyczne dla większości częstotliwości fali dźwiękowej. Ujemne wartości przedstawione w Tab. 3 wystąpiły wyłącznie w schematach, w których brama wjazdowa była otwarta. Przyczyną uzyskania skuteczności mieszczącej się na granicy przedziałów, skuteczności „tolerowanej” i dostatecznej jest przede wszystkim zbyt mała wysokość i długość ekranu oraz brama wjazdowa ze szczeliną i wysokością mniejszą od pozostałych segmentów ekranu. Na skuteczność ma również wpływ usytuowanie drogi na nasypie. Wpływ bramy na skuteczność ekranów jest znikomy. Zamknięcie bramy w schemacie I spowodowało wzrost skuteczności ekranu o 0.62 [dB], zaś w schemacie II o 0.37 [dB]. Porównanie efektywności w poszczególnych pasmach częstotliwości pozwala na stwierdzenie, że żadna z zastosowanych metod obliczeniowych nie daje wyników bliskich wynikom pomiarów.

Znikomy wpływ bramy wjazdowej na skuteczność ekranu zmusza nas do postawienia pytania: czy wyposażenie ekranu w bramę wjazdową miało sens?



Rys. 10. Porównanie skuteczności ekranu akustycznego dla schematu I

Fig. 10. Comparison of the effectiveness of the acoustic screen at scheme I



Rys. 11. Porównanie skuteczności ekranu akustycznego dla schematu II

Fig. 11. Comparison of the effectiveness of the acoustic screen at scheme II

Według mieszkańców budynku, zasunięcie bramy „sprawia iż jest ciszej”. Na ile jednak możemy być pewni że jest to wpływ zamknięcia bramy wjazdowej a nie efekt psychologiczny? Przeprowadzone badania jednoznacznie wskazują iż wpływ bramy na poprawę środowiska akustycznego w obszarze chronionym jest znikomy.

## Literatura

- [1] Marczak P. Zagrożenie hałasem. Wybrane zagadnienia. Kancelaria Senatu, Warszawa 2012
- [2] PN-ISO 10847:2002, Akustyka. Wyznaczanie "In Situ" skuteczności zewnętrznych ekranów akustycznych wszystkich rodzajów.
- [3] Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 16 czerwca 2001r. w sprawie wymagań w zakresie prowadzenia pomiarów w środowisku substancji lub energii przez zarządzającego drogą, linią kolejową, linią tramwajową, lotniskiem, portem (Dz. U. 2001 nr 140 poz. 824)
- [4] Zakrzewski T., Żuchowski R. Kompendium akustyki architektonicznej wraz z przykładami metod obliczeniowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2009

## INFLUENCE OF ENTRY GATE ON EFFICIENCY OF AN ACOUSTIC SCREEN

### Summary

One of the biggest problems of traffic noise protection is the proper design of noise barriers, their location, length, height and entry gate in such a way so as not lowered efficiency of acoustic screen. An experimental and analytical efficiency method of traffic noise protection against traffic noise and influence entry gate, have been presented in this paper. Primary objective this screen is assurance property acoustic climate for people who have lived in protected home. The efficiency of this screen has been evaluated by an indirect method. In this case research survey on site has been made. The calculations have been made with the use of three methods. The results of measurements and calculations have been compared. The temperature has been used to calculated speed and length sound wave in analytical method. A low efficiency acoustic screen has been demonstrated, whereas its low efficiency mainly resulted from the low height and length of acoustic screen. The entry gate has had low influence on efficiency of acoustic screen and it is up 0.37 to 0.62 dB. Insignificant influence has resulted from a slot under the gate, lower height than the height screen and slots between gate and the screens. We can see this slots after closed the gate.

**Keywords:** acoustic screen, traffic noise, efficiency of an acoustic screen, entry gate

DOI:10.7862/rb.2014.36

*Przesłano do redakcji: 27.08.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Dariusz SZYBICKI<sup>1</sup>  
Krzysztof KURC<sup>2</sup>  
Magdalena MUSZYŃSKA<sup>3</sup>  
Miroslaw SOBASZEK<sup>4</sup>

## DYNAMIKA GAŚNIENICOWEGO ROBOTA INSPEKCYJNEGO

W artykule opisano sposób modelowania dynamiki gaśnicowego robota inspekcyjnego. Robot został zbudowany w ramach projektu finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki i jest przeznaczony do inspekcji rur, kanałów wentylacyjnych „suchych” jak i zalanych wodą. Robot zbudowany jest modułowo, ma dwie niezależne, wodoszczelne gaśnice. Moduł główny robota stanowi korpus zbudowany ze stopu aluminium. W korpusie znajduje się elektronika sterująca, kamera oraz systemy łączności. Dynamika robota została opisana przy pomocy równań Lagrange’a II rodzaju dla układu nieholonomicznego. W celu wyeliminowania mnożników Lagrange’a z równań ruchu posłużono się formalizmem Maggieo. Przeprowadzając analizę dynamiki wzięto pod uwagę takie czynniki jak: poślizg gaśnicy zależny od odkształceń szponów oraz podłoża, siłę oporu hydrodynamicznego, siłę wyporu oraz siłę oporu hydrodynamicznego. Prototyp robota przeszedł pozytywne testy w Miejskim Przedsiębiorstwie Wodociągów i Kanalizacji w Krakowie.

**Słowa kluczowe:** robot gaśnicowy, dynamika, równania Lagrange’a, robot inspekcyjny

### 1. Wstęp

Model fizyczny oraz opis kinetyki robota gaśnicowego są kluczowe w procesie projektowania mechatronicznego [4]. Umożliwiają one przeprowa-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Dariusz Szybicki, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, e-mail: dszybicki@prz.edu.pl

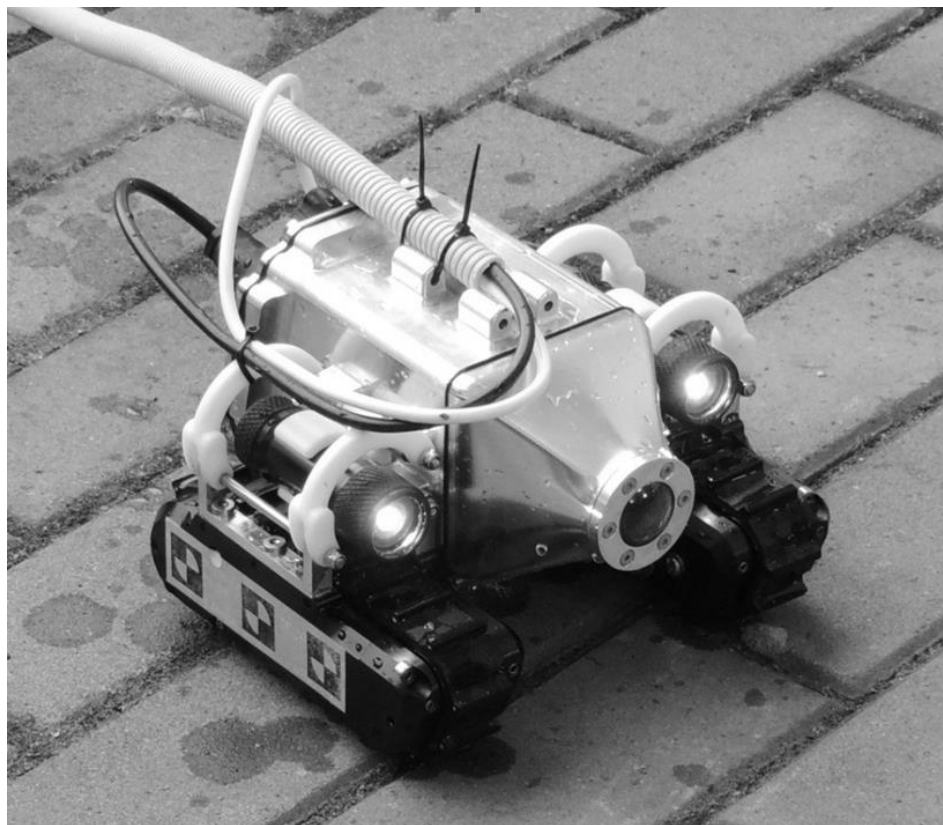
<sup>2</sup> Krzysztof Kurc, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, e-mail: kkurc@prz.edu.pl

<sup>3</sup> Magdalena Muszyńska, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, e-mail: magdaw@prz.edu.pl

<sup>4</sup> Miroslaw Sobaszek, Katedra Podstaw Elektroniki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, e-mail: somirek@prz.edu.pl

dzenie symulacji oraz są niezbędne przy projektowaniu układów sterowania.

Sam robot (Rys. 1) został zaprojektowany do inspekcji rur oraz kanałów wentylacyjnych, może pracować na głębokości do 30 m pod wodą.



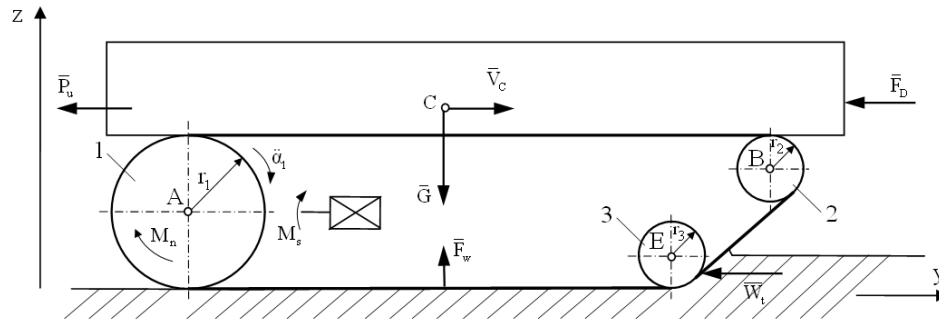
Rys. 1. Prototyp robota inspekcyjnego

Fig. 1. The prototype of inspection robot

Opis i modelowanie gąsienicowych układów napędowych jest zadaniem skomplikowanym, gdyż oddziałują na nie różnego typu czynniki zmienne w czasie. Dynamika robota zostanie opisana przy pomocy równań Lagrange'a II rodzaju dla układu nieholonomicznego.

## 2. Opis dynamiki robota

Do opisu dynamiki użyto równań Lagrange'a II rodzaju dla układu nieholonomicznego [2, 5]. Układ napędowy analizowanego robota gąsienicowego są to dwa moduły (Rys. 2.) odsunięte od siebie równoległe i połączone ramą.



Rys. 2. Model matematyczny robota modułu robota

Fig. 2. The dynamic model of the robot module

Siły oraz momenty działające na robota przedstawiono na rys. 3. Na rysunku zaznaczono następujące siły i momenty:

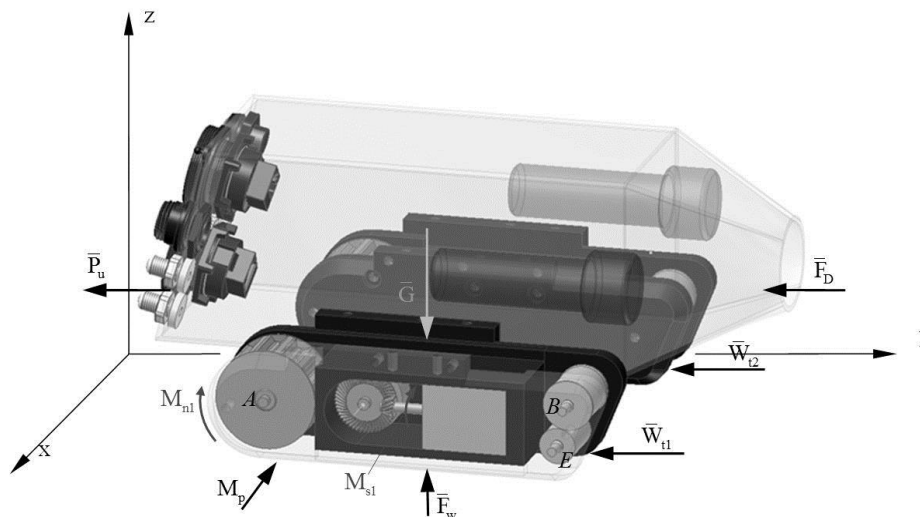
$P_u$  - siła wynikająca z ciągniętego przewodu;

$F_D$  - siła oporu hydrodynamicznego;

$F_w$  - siła wyporu;

$M_{n1}$  - moment na kole napędowym;

$M_{s1}$  - moment na silniku;



Rys. 3. Siły oraz momenty działające na robota

Fig. 3. Forces and torques acting on the robot

$M_p$  - moment oporów poprzecznych;

$W_{t1}, W_{t2}$  - siły oporu toczenia gąsienicy.

Siły i momenty działające na robota wyznaczono na podstawie danych literaturowych [1],[3]. Współczynniki niezbędne do określenia sił i momentów uzyskano na podstawie symulacji komputerowych i testów wykonanych na prototypie robota.

Równania Lagrange'a II rodzaju układu nieholonomicznego, mają postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial E}{\partial q} \right)^T = Q + J^T(q) \lambda \quad (1)$$

gdzie:  $q$  - wektor współrzędnych konfiguracyjnych;

$E = E(q, \dot{q})$  - energia kinetyczna układu;

$Q$  - wektor sił konfiguracyjnych;

$J(q)$  - jacobian;

$\lambda$  - wektor mnożników Lagrange'a.

Należy przyjąć, że energia kinetyczna robota  $E$  jest sumą energii poszczególnych jego elementów, a więc:

$$E = E_R + E_{M1} + E_{M2}, \quad (2)$$

gdzie:  $E_R$  - energia kinetyczna ramy robota;

$E_{M1}$  - energia kinetyczna lewego modułu napędowego robota;

$E_{M2}$  - energia kinetyczna prawego modułu napędowego robota.

Energia kinetyczna ramy robota jest sumą energii  $E_{R1}$ , wynikającej z ruchu postępowego ramy oraz energii  $E_{R2}$  wynikającej z ruchu obrotowego względem chwilowego środka obrotu  $O$ . Na podstawie analizy kinematyki robota energia kinetyczna ramy jest równa:

$$E_R = \frac{1}{2} m_R (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2} I_R \dot{\beta}^2 \quad (3)$$

gdzie:  $m_R$  - masa ramy robota;

$I_R$  - masowy moment bezwładności ramy robota;

$\dot{\beta}$  - prędkość kątowa względem chwilowego środka obrotu;



$\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C$  - składowe prędkości środka ramy robota wyznaczone z kinematyki.

Kolejny etap obliczeń to wyznaczenie energii kinetycznej pojedynczego modułu napędowego:

$$E_M = E_{K1} + E_{K2} + E_{K3} + E_O, \quad (4)$$

gdzie:  $E_{K1}$  - energia kinetyczna koła napędowego gašienicy;

$E_{K2}$  - energia kinetyczna koła napinającego;

$E_{K3}$  - energia kinetyczna koła prowadzącego;

$E_O$  - energia kinetyczna obudowy modułu napędowego.

Energię kinetyczną każdego z kół napędowych pojedynczego, modułu można przedstawić jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego, ruchu obrotowego, względem osi obrotu koła oraz ruchu obrotowego względem chwilowego środka obrotu. Co zapisano jako:

$$\begin{aligned} E_{K1} &= \frac{1}{2} m_{K1} V_A^2 + \frac{1}{2} I_{x1} \dot{\alpha}_{K1}^2 + \frac{1}{2} I_{z1} \dot{\beta}^2, \\ E_{K2} &= \frac{1}{2} m_{K2} V_B^2 + \frac{1}{2} I_{x2} \dot{\alpha}_{K2}^2 + \frac{1}{2} I_{z2} \dot{\beta}^2, \\ E_{K3} &= \frac{1}{2} m_{K3} V_E^2 + \frac{1}{2} I_{x3} \dot{\alpha}_{K3}^2 + \frac{1}{2} I_{z3} \dot{\beta}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:  $m_{Ki}$  - masa koła i-tego;

$I_{xi}$  - masowy moment bezwładności koła i-tego względem osi obrotu x;

$I_{zi}$  - masowy moment bezwładności koła i-tego względem osi z;

$\dot{\alpha}_{Ki}$  - prędkość kątowa koła i-tego w analizowanym module napędowym;

$V_A, V_B, V_E$  - prędkości charakterystycznych punktów (Rys. 3).

Energia kinetyczna obudowy modułu napędowego jest zbiorczym ujęciem energii kinetycznej korpusu napędu, gašienicy oraz elementów przekładni.

$$E_O = \frac{1}{2} m_O V_O^2 + \frac{1}{2} I_{xO} \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zO} \dot{\beta}^2, \quad (6)$$

gdzie:  $m_O$  - masa obudowy modułu napędowego;

$I_{xO}$  - masowy moment bezwładności elementów znajdujących się w ruchu obrotowym;

$I_{zO}$  - masowy moment bezwładności modułu napędowego względem osi z.

Energia kinetyczna pojedynczego modułu napędowego jest więc równa:

$$E_M = \frac{1}{2} m_{K1} V_A^2 + \frac{1}{2} I_{x1} \dot{\alpha}_{K1}^2 + \frac{1}{2} I_{z1} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_{K2} V_B^2 + \frac{1}{2} I_{x2} \dot{\alpha}_{K2}^2 + \frac{1}{2} I_{z2} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_{K3} V_E^2 + \frac{1}{2} I_{x3} \dot{\alpha}_{K3}^2 + \frac{1}{2} I_{z3} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_O V_O^2 + \frac{1}{2} I_{xO} \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zO} \dot{\beta}^2, \quad (7)$$

Po uproszczeniu i odpowiednich podstawieniach otrzymano zależność na energię kinetyczną modułu napędowego:

$$E_M = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\beta}^2. \quad (8)$$

Do tej pory analizowano pojedynczy moduł napędowy i pomijano indeks, oznaczający jego numer. Przechodząc z analizy ogólnej na bardziej szczegółową, ponownie wprowadzono indeks numeru napędu i otrzymano zależności na energię kinetyczną robota:

$$E = \frac{1}{2} m_R (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2} I_R \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m \left( (\dot{x}_C - \dot{\beta} H \sin \beta)^2 + (\dot{y}_C - \dot{\beta} H \cos \beta)^2 + \dot{z}_C^2 \right) + \frac{1}{2} I_x \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m \left( (\dot{x}_C + \dot{\beta} H \sin \beta)^2 + (\dot{y}_C + \dot{\beta} H \cos \beta)^2 + \dot{z}_C^2 \right) + \frac{1}{2} I_x \dot{\alpha}_2^2, \quad (9)$$

Na podstawie analizy kinematyki wiadomo że:

$$\dot{x}_C = \frac{r \dot{\alpha}_1 (1 - s_1) + r \dot{\alpha}_2 (1 - s_2)}{2} \sin \beta, \quad (11)$$

$$\dot{y}_C = \frac{r\dot{\alpha}_1(1-s_1) + r\dot{\alpha}_2(1-s_2)}{2} \cos\beta \cos\gamma, \quad (12)$$

$$\dot{z}_C = \frac{r\dot{\alpha}_1(1-s_1) + r\dot{\alpha}_2(1-s_2)}{2} \sin\gamma, \quad (13)$$

$$\dot{\beta} = \frac{r\dot{\alpha}_2(1-s_2) - r\dot{\alpha}_1(1-s_1)}{H}, \quad (14)$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{V_C - 0,5\dot{\beta}H}{r(1-s_1)}, \quad (15)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{V_C + 0,5\dot{\beta}H}{r(1-s_2)}, \quad (16)$$

$$V_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2}. \quad (17)$$

Otrzymane wyrażenia podstawiono do równania Lagrange'a II-go rodzaju, obliczono pochodne energii kinetycznej po prędkościach konfiguracyjnych, a następnie ich pochodne po czasie. Wyznaczono wyrażenia, będące lewą stroną równań Lagrange'a. Wyznaczając prawą stroną równań Lagrange'a, skorzystano z równań więzów kinematycznych narzuconych na układ:

$$\dot{x}_C - \frac{1}{2}r\dot{\alpha}_1(1-s_1)\sin\beta - \frac{1}{2}r\dot{\alpha}_2(1-s_2)\sin\beta = 0, \quad (18)$$

$$\dot{y}_C - \frac{1}{2}r\dot{\alpha}_1(1-s_1)\cos\beta\cos\gamma - \frac{1}{2}r\dot{\alpha}_2(1-s_2)\cos\beta\cos\gamma = 0, \quad (19)$$

$$\dot{z}_C - \frac{1}{2}r\dot{\alpha}_1(1-s_1)\sin\gamma - \frac{1}{2}r\dot{\alpha}_2(1-s_2)\sin\gamma = 0. \quad (20)$$

Ostatecznie otrzymano układ równań opisujących ruch badanego robota:

$$\begin{aligned}
m_R \ddot{x}_C + 2m \ddot{x}_C &= \lambda_1, \\
m_R \ddot{y}_C + 2m \ddot{y}_C &= \lambda_2, \\
m_R \ddot{z}_C + 2m \ddot{z}_C &= \lambda_3, \\
I_R \ddot{\beta} + 2I_z \ddot{\beta} + 2m \ddot{\beta} H^2 &= -M_p, \\
I_x \ddot{\alpha}_1 &= M_{s_1} \eta i + (-0,5P_u - 0,5F_D - 0,5G \sin \gamma + 0,5F_w \sin \gamma - 0,5W_{t1}) r (1-s_1), \\
I_x \ddot{\alpha}_2 &= M_{s_2} \eta i + (-0,5P_u - 0,5F_D - 0,5G \sin \gamma + 0,5F_w \sin \gamma - 0,5W_{t2}) r (1-s_2). \quad (21)
\end{aligned}$$

Gdy do układu równań (21) dodano równania więzów nieholonomicznych otrzymano układ równań na podstawie których można wyznaczyć sześć współrzędnych uogólnionych:  $x_C, y_C, z_C, \beta, \alpha_1, \alpha_2$  oraz trzy mnożniki Lagrange'a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Uzyskanie rozwiązania tych równań wymaga jednoczesnego wyznaczenia mnożników oraz współrzędnych uogólnionych  $q_r$ . W celu wyeliminowania mnożników Lagrange'a z równań ruchu posłużono się formalizmem Maggiiego.

Dzięki takiemu podejściu wyrażono sześć prędkości uogólnionych dwoma parametrami kinematycznymi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \dot{z}_C \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin \beta & \frac{1}{2} r (1-s_2) \sin \beta \\ \frac{1}{2} r (1-s_1) \cos \beta \cos \gamma & \frac{1}{2} r (1-s_2) \cos \beta \cos \gamma \\ \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin \gamma & \frac{1}{2} r (1-s_2) \sin \gamma \\ -\frac{r(1-s_1)}{H} & \frac{r(1-s_2)}{H} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Wynikające z zastosowanego formalizmu macierz C ma więc postać

$$C(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin \beta & \frac{1}{2} r (1-s_1) \cos \beta \cos \gamma & \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin \gamma & -\frac{r(1-s_1)}{H} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} r (1-s_2) \sin \beta & \frac{1}{2} r (1-s_2) \cos \beta \cos \gamma & \frac{1}{2} r (1-s_2) \sin \gamma & \frac{r(1-s_2)}{H} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$C(q) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} \right] = C(q) Q \quad (24)$$

gdzie:  $C(q)$ - macierz transformacji prędkości uogólnionych na parametry kinematyczne;

$E$  - energia kinematyczna układu;

$q$  - wektor współrzędnych uogólnionych;

$\dot{q}$  - wektor prędkości uogólnionych.

Po przekształceniach otrzymano:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_C (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin\beta + \ddot{y}_C (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_1) \cos\beta \cos\gamma + \\ & + \ddot{z}_C (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin\gamma - \ddot{\beta} (I_R + 2I_z + 2mH^2) \frac{r(1-s_1)}{H} + I_x \ddot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (25)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_C (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_2) \sin\beta + \ddot{y}_C (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_2) \cos\beta \cos\gamma + \\ & + \ddot{z}_C (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_2) \sin\gamma + \ddot{\beta} (I_R + 2I_z + 2mH^2) \frac{r(1-s_2)}{H} + I_x \ddot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (26)$$

Równania Maggiego, opisujące ruch robota gašienicowego, są następujące:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1 (1-s_1) + \ddot{\alpha}_2 (1-s_2)] \sin\beta + \right. \\ & \left. + \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1 (1-s_1) + \ddot{\alpha}_2 (1-s_2)] \frac{r\ddot{\alpha}_2 (1-s_2) - r\ddot{\alpha}_1 (1-s_1)}{H} \cos\beta \right) (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin\beta + \\ & + \left( \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1 (1-s_1) + \ddot{\alpha}_2 (1-s_2)] \cos\beta \cos\gamma - \right. \\ & \left. + \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1 (1-s_1) + \ddot{\alpha}_2 (1-s_2)] \frac{r\ddot{\alpha}_2 (1-s_2) - r\ddot{\alpha}_1 (1-s_1)}{H} \sin\beta \cos\gamma \right) (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_1) \cos\beta \cos\gamma + \\ & + \left( \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1 (1-s_1) + \ddot{\alpha}_2 (1-s_2)] \sin\gamma \right) (m_R + 2m) \frac{1}{2} r (1-s_1) \sin\gamma + \\ & - \left( \frac{r\ddot{\alpha}_2 (1-s_2) - r\ddot{\alpha}_1 (1-s_1)}{H} \right) (I_R + 2I_z + 2mH^2) \frac{r(1-s_1)}{H} + I_x \ddot{\alpha}_1 = \\ & = M_{ni} + (-0,5P_u - 0,5F_D - 0,5G \sin\gamma + 0,5F_w \sin\gamma - 0,5W_{ii}) r (1-s_1) + M_p \frac{r(1-s_1)}{H} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1(1-s_1) + \ddot{\alpha}_2(1-s_2)] \sin\beta + \right. \\
& \left. + \frac{r}{2} [\dot{\alpha}_1(1-s_1) + \dot{\alpha}_2(1-s_2)] \frac{r\ddot{\alpha}_2(1-s_2) - r\dot{\alpha}_1(1-s_1)}{H} \cos\beta \right) (m_R + 2m) \frac{1}{2} r(1-s_2) \sin\beta + \\
& + \left( \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1(1-s_1) + \ddot{\alpha}_2(1-s_2)] \cos\beta \cos\gamma - \right. \\
& \left. + \frac{r}{2} [\dot{\alpha}_1(1-s_1) + \dot{\alpha}_2(1-s_2)] \frac{r\ddot{\alpha}_2(1-s_2) - r\dot{\alpha}_1(1-s_1)}{H} \sin\beta \cos\gamma \right) (m_R + 2m) \frac{1}{2} r(1-s_2) \cos\beta \cos\gamma + \\
& + \left( \frac{r}{2} [\ddot{\alpha}_1(1-s_1) + \ddot{\alpha}_2(1-s_2)] \sin\gamma \right) (m_R + 2m) \frac{1}{2} r(1-s_2) \sin\gamma + \\
& + \left( \frac{r\ddot{\alpha}_2(1-s_2) - r\dot{\alpha}_1(1-s_1)}{H} \right) (I_R + 2I_z + 2mH^2) \frac{r(1-s_2)}{H} + I_x \ddot{\alpha}_2 = \\
& = M_{n2} + (-0,5P_u - 0,5F_D - 0,5G \sin\gamma + 0,5F_w \sin\gamma - 0,5W_{l2}) r(1-s_2) - M_p \frac{r(1-s_2)}{H}
\end{aligned} \tag{28}$$

gdzie:  $r$  - promień kół napędowych gąsienice;

$H$  - odległość pomiędzy osiami gąsienic;

$m$  - masa modułu gąsienicowego;

$m_R$  - masa ramy;

$I_R, I_z, I_x$  - masowe momenty bezwładności;

$\beta$  - kąt obrotu ramy robota;

$\ddot{\alpha}_1$  - przyspieszenie kątowe koła napędowego gąsienicę 1;

$\ddot{\alpha}_2$  - przyspieszenie kątowe koła napędowego gąsienicę 2;

$\dot{\alpha}_1$  - prędkość kątowa koła napędowego gąsienicę 1;

$\dot{\alpha}_2$  - prędkość kątowa koła napędowego gąsienicę 2;

$s_1, s_2$  - poślizg gąsienicy 1 oraz 2.

Po uporządkowaniu równań (27) i (28) i wstawieniu wszystkich współczynników otrzymano rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki dla analizowanego robota inspekcyjnego.

### 3. Podsumowanie

W artykule przedstawiono opis dynamiki inspekcyjnego robota gąsienicowego. Kinematyka robota była przedmiotem wcześniejszych publikacji więc ograniczono się tylko do opisu dynamiki. Wartości sił i momentów działających

na robota wyznaczono na podstawie danych literaturowych oraz symulacji numerycznych. Dynamika została opisana przy pomocy równań Lagrange'a II rodzaju dla układu nieholonomicznego. By wyeliminować mnożniki Lagrange'a z równań ruchu wykorzystany został formalizm Maggiiego. Otrzymane rozwiązania zadania odwrotnego oraz prostego dynamiki posłużyły do zbudowania modelu matematycznego zaprojektowanego i zbudowanego robota. Symulacje oraz identyfikacja otrzymanego modelu matematycznego robota będą przedmiotem dalszych publikacji.

### Literatura

- [1] Burdziński Z.: Teoria ruchu pojazdu gašienicowego, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1972.
- [2] Ciszewski M., Buratowski T., Giergiel M., Kurc K., Małka P.: The pipes mobile inspection robots, Polskie Towarzystwo Diagnostyki Technicznej, nr 3 s. 9-15, 2012
- [3] Dajniak H.: Ciągniki teoria ruchu i konstruowanie, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1985
- [4] Giergiel J., Hendzel Z., Żylski W.: Kinematyka, dynamika i sterowanie mobilnych robotów kołowych w ujęciu mechatronicznym, monografia, Wyd. IMiR, AGH Kraków, 2000
- [5] Giergiel M., Kurc K., Małka P., Buratowski T., Szybicki D.: Kinematics of underwater inspection robot, Pomiary Automatyka Robotyka nr 12/2012, s. 112-116, 2012

## DYNAMICS OF INSPECTION ROBOT WITH CRAWLER DRIVE

### Summary

In this article authors present the problem connected with the dynamics modeling mobile robot with crawler drive. This robot has been designed to enable monitoring and analysis of the technical state of pipes and water tanks. On the crawler module track drive different types of variables interact over time. Description of crawler motion in real conditions, with the uneven ground with variable parameters, it is very complicated and therefore it is necessary to use simplified models. The description of the robot's dynamic based on the energetic method based on Lagrange equation. In order to avoid modeling problems connected with decoupling Lagrange multipliers Maggi equation are used.

**Keywords:** inspection robot, dynamics, underwater robot, robot with crawler drive, Lagrange equation

DOI:10.7862/rb.2014.37

*Przesłano do redakcji: 07.07.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*





Dariusz SZYBICKI<sup>1</sup>

Łukasz RYKAŁA<sup>2</sup>

Magdalena MUSZYŃSKA<sup>3</sup>

## WYRÓWNOWAŻANIE MAS W RUCHU OBROTOWYM

Problem poruszany w artykule dotyczy zjawiska wyrównoważania (wyważania) mas w ruchu obrotowym. W celu rozwiązania danego zagadnienia opracowano algorytm dotyczący problemu wyważania przy pomocy mas próbnych. Ponadto dokonano prezentacji autorskiego projektu urządzenia i omówiono procedury wyważania na omawianym stanowisku. Zaprezentowano również wyniki badań symulacyjnych oraz weryfikacyjnych przeprowadzonych na zbudowanym urządzeniu.

**Słowa kluczowe:** wyważanie, drgania, elementy wirujące, stanowisko do wyważania

### 1. Wprowadzenie

Postęp techniczny wymusza nieustanny wzrost prędkości obrotowych maszyn i urządzeń. Ze względu na to, iż są one w znacznym stopniu lżejsze i bardziej wydajne niż ich wolnoobrotowe odpowiedniki, dlatego w bliskiej przyszłości można doszukiwać się zwiększenia prędkości obrotowych elementów wirujących. W przypadku, gdy masy wirujących elementów są rozmieszczone symetrycznie względem osi obrotu, to spowodowane przez nie siły odśrodkowe równoważą się obopólnie. W wyniku tego oddziaływania w elementach wirujących powstają tylko naprężenia kinetostatyczne. Takie elementy nazwano wyważonymi. Z kolei stan urządzeń i maszyn z wyważonymi elementami, które pracują spokojnie, bez drgań oraz hałasów, określa się ogólnie jako dobry stan dynamiczny maszyny. Każda niewielka asymetria mas wirującego elementu przy

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Dariusz Szybicki, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, tel. (17) 865 1843, e-mail: dszybicki@prz.edu.pl

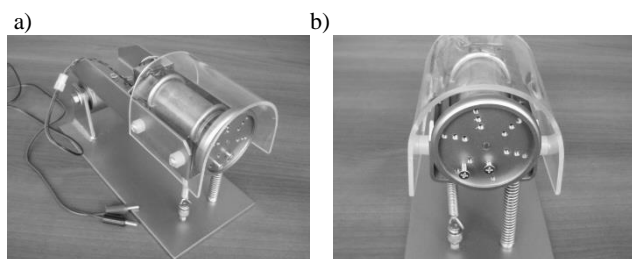
<sup>2</sup> Łukasz Rykała, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, tel. (17) 865 1843, e-mail: lrykala@prz.edu.pl

<sup>3</sup> Magdalena Muszyńska, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, tel. (17) 865 1843, e-mail: magdaw@prz.edu.pl

znacznych prędkościach obrotowych jest przyczyną powstania stanu niewyważenia. Charakteryzuje się on powstaniem niezrównoważonej siły odśrodkowej wywołującej zły stan dynamiczny maszyny, np. wzmożone drgania wirnika, łożysk, kadłuba oraz fundamentów. Wspomniane drgania mocno pogarszają niezawodność maszyny oraz skracają jej żywotność. Zły stan dynamiczny maszyny staje się zasadniczą przyczyną małej dokładności realizowanych procesów technologicznych, a to z kolei wpływa na pogorszenie się jakości produkowanych wyrobów. Ze względu na to, iż większość maszyn i urządzeń ma wirujące elementy ich wyważanie stało się niezbędną i powszechnie stosowaną operacją technologiczną.

## 2. Stanowisko do opisu zjawiska wyrównowazania mas w ruchu obrotowym

W ramach prac badawczych zostało zbudowane stanowisko do opisu zjawiska wyrównowazania mas w ruchu obrotowym, rys. 1. Urządzenie składa się z ruchomej platformy, nieruchomej podstawy, silnika prądu stałego, zabezpieczającej osłony, wirującej tarczy oraz pary sprężyn. W omawianym stanowisku zastosowano silnik prądu stałego. Wykonana tarcza jest mocowana do osi silnika przy pomocy kołka zaciskowego. W ten sposób omawiany element nie jest montowany na stałe na osi silnika oraz jest łatwy w demontażu, co znacznie zwiększa możliwy zakres badań o kolejne elementy. Tarcza składa się z 18 otworów, 4 rozmieszczonych względem środka tarczy na trzech średnicach.

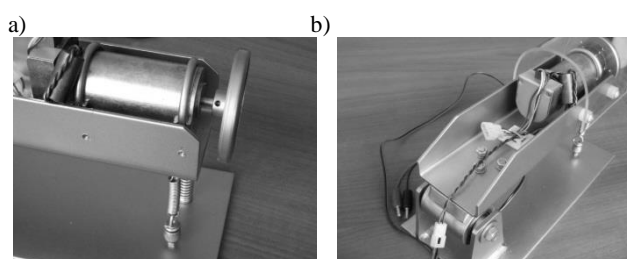


Rys. 1. a) Stanowisko laboratoryjne do opisu zjawiska wyrównowazania mas w ruchu obrotowym, b) stanowisko z masami korekcyjnymi

Fig. 1. a) Laboratory stand for describing the phenomenon of balancing masses in angular rate, b) stand with correction mass

Do jednej z dwóch możliwych do zastosowania dla tej konstrukcji metod wyważania omawianej tarczy należy wkręcanie w wymienione otwory śrub o wcześniej dobranej długości. Drugim dodatkowym sposobem wyważania jest zakładanie fragmentów plasteliny na specjalnie przygotowanym rowku znajdującym się na wewnętrznym obwodzie tarczy i widocznym na rys. 1b. Rys. 2a przedstawia boczny widok konstrukcji ze zdjętą osłoną zabezpieczającą. Ponad-

to rys. 2a dobrze obrazuje sposób mocowania wirującej tarczy do osi silnika. Specjalnie wykonana przezroczysta osłona zapewnia bezpieczeństwo pracy z wirującymi elementami. Platforma jest przymocowana do podstawy za pomocą 3 śrub (rys. 2a). Do łożyskowania konstrukcji wykorzystano dwa łożyska kulkowe. Urządzenie wyposażone jest również w komplet sprężyn: naciskowej oraz naciągowej. Współczynnik sprężystości omawianej sprężyny wyznaczony doświadczalnie wynosi około 800 [N/m]. Sprężyna ta jest niewiele „twardsza” od sprężyny naciągowej. Z kolei współczynnik sprężystości sprężyny naciągowej wyznaczony doświadczalnie wynosi około 700 [N/m].



Rys. 2.a) Boczny widok konstrukcji ze zdjętą osłoną, b) boczny widok stanowiska

Fig. 2. a) Side view of the construction with the removed cover, b) side view of the stand

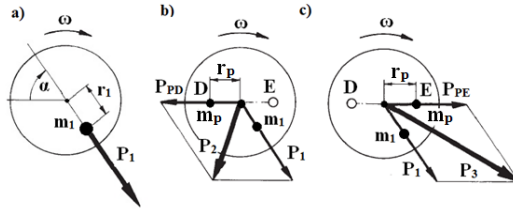
### 3. Procedura wyważania

Opisywana platforma jest osadzona obrotowo w podstawie i podparta sprężynami w drugim końcu. Jeżeli wirnik w postaci tarczy będzie znajdował się w ruchu obrotowym, to siły bezwładności mas niewyważonych będą powodować wychylenie się platformy wokół punktu podparcia układu w łożyskach. Wspomniane wychylenie ramy z położenia równowagi będzie wywołane przez siły bezwładności niewyważenia odpowiadające płaszczyźnie korekcji  $\pi$  znajdującej się na powierzchni tarczy z otworami. Wartość omawianego niewyważenia jest możliwa do obliczenia korzystając, np. z pomocy akcelerometru. Wynik pomiaru, a mianowicie amplituda drgań układu  $A$  jest proporcjonalna do siły wymuszającej  $P_w$ . Dla uproszczenia zapisu przyjęto, iż  $P_w = P_1$ . Wartość pomiaru można przedstawić następującym wzorem (1):

$$A_1 = kP_1 \quad (1)$$

gdzie:  $k$  – współczynnik proporcjonalności,  $P_1$  – siła bezwładności niewyważenia odniesiona do płaszczyzny  $\pi$  [4]. W celu określenia wartości współczynnika  $k$  należy przeprowadzić następujące kroki. Określona w badaniach doświadczalnych wartość  $A_1$  (wyznaczona przy prędkości rezonansowej) wynika z faktu

działania siły  $P_1$  (rys. 3). Wspomniana siła jest nieznaną, ponieważ niewiadomymi są również masa niewyważenia  $m_1$  oraz parametry jej położenia:  $r_1$  i  $\alpha$  [4].



Rys. 3. Siły bezwładności w poszczególnych fazach wyważania

Fig. 3. Forces of inertia in the individual phases of the balancing

Następnie mocowana jest w dowolnym miejscu, np. w punkcie D (rys.3) dowolna (o znanej wartości) masa próbna  $m_p$  na również znanym promieniu  $r_p$ . Po kolejnym uruchomieniu wirnika dokonywany jest pomiar i odczytywana jest wartość  $A_2$ , która w tym przypadku jest proporcjonalna do wypadkowej siły bezwładności obu mas  $m_1$  oraz  $m_p$ .

$$A_2 = kP_2 \quad (2)$$

gdzie:

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + \bar{P}_{PD} \quad (3)$$

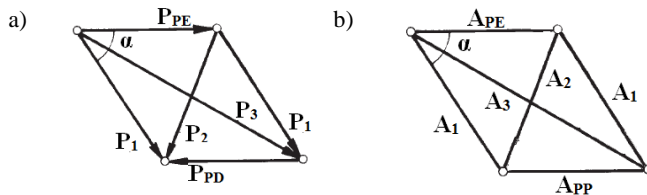
Identyczny pomiar przeprowadzany jest ponownie z tą różnicą, iż masa próbna  $m_D$  jest umieszczana po przeciwnej stronie wirnika w punkcie E (rys. 3c). Użytkuje się wtedy kolejną amplitudę  $A_3$  określoną wzorem (4):

$$A_3 = kP_3 \quad (4)$$

gdzie:

$$\bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_{PE} \quad (5)$$

Występujące siły  $P_1$ ,  $P_{PE}$ ,  $P_{PD}$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  tworzą plan sił przedstawiony na rys. 4a.



Rys. 4. Wyznaczanie położenia masy korekcyjnej a) na elemencie wyważanym, b) na wyważanym podzespole

Fig. 4. Determining the position of the correction masses a) on a balanced element, b) on a balanced component

Z kolei widoczny na rys. 4b plan pozwala wyliczyć nie znaną dotychczas amplitudę  $A_p$  przypadającą na masę próbną  $m_p$  [4].

$$2A_p^2 + 2A_1^2 = A_2^2 + A_3^2 \quad (6)$$

Z równania (6) wynika zależność (7):

$$A_p = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}} \quad (7)$$

Wiadome jest, że spełniona jest równość (8):

$$A_p = kP_p \quad (8)$$

Z kolei po prostym przekształceniu powyższego wzoru otrzymujemy zależność (9):

$$k = \frac{A_p}{P_p} \quad (9)$$

Natomiast korzystając z poprzednich wzorów można otrzymać następujące równanie:

$$P_1 = \frac{A_1}{k} = \frac{A_1}{A_p} P_p \quad (10)$$

Po porównaniu wzoru (10) ze wzorem (1) można uzyskać następującą zależność:

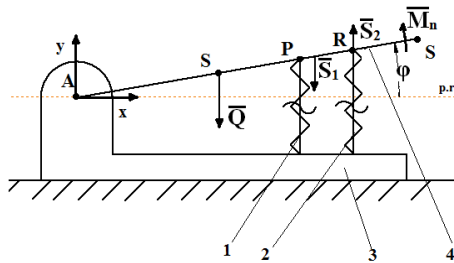
$$P_1 = m_1 r_1 = \frac{A_1}{A_v} m_p r_p \quad (11)$$

W ten sposób wyznaczamy nieznane dotychczas niewyważenie  $P_1$  w płaszczyźnie  $\pi$ . Korzystając ze wzoru (12) można również określić miejsce masy niewyważonej [4].

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A_1^2 + A_p^2 - A_2^2}{2A_1 A_p}\right) \quad (12)$$

### 3.1. Badania symulacyjne, kinematyka układu

Rozważany układ można przedstawić w postaci jak na rys. 5, gdzie: 1 - wstępnie ściśnięta sprężyna naciskowa, 2 - wstępnie rozciągnięta sprężyna naciągowa, 3 – nieruchoma podstawa układu, 4 – obracająca się platforma.



Rys. 5. Rozpatrywany układ mechaniczny

Fig. 5. Considered mechanical system

Zaprezentowany na powyższym rysunku układ jest nieliniowy, jednakże przyjęto założenie, że kąt  $\varphi$  jest mały. W takim przypadku można przyjąć, iż:

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad (13)$$

Tak, więc korzystając z zależności (13) otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} y_p &= |AP| \sin \varphi \approx |AP| \varphi \\ y_r &= |AR| \sin \varphi \approx |AR| \varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Obydwe sprężyny zostały umieszczone obok siebie w tej samej odległości  $|AP|$  od punktu podparcia platformy do podstawy. Przyjęte wcześniej oznaczenia zostały sformułowane właśnie w taki sposób ze względu na niemożliwość przedstawienia obydwu sprężyn w jednym rzucie.  $|AP| = |AR|$ , a z tego wynika, iż:  $y_p = y_r$  [2]. Wiadomo jest również, iż w stanie równowagi statycznej siła wstępnego napięcia sprężyny równoważy ciężar układu i z tego względu w różniczkowych równaniach ruchu pomimo działania ciężaru konstrukcji  $Q$  [2].

### 3.2. Masowy moment bezwładności platformy

Masowy moment bezwładności platformy wyznaczono doświadczalnie wykorzystując poniższy wzór:

$$I_o = \frac{Q_p |AS|}{\omega^2} \quad (15)$$

gdzie:  $Q_p = 17[\text{N}]$  - ciężar drgającej platformy,  $|AS| = 15[\text{cm}]$  - odległość punktu mocowania platformy od jego środka masy,  $\omega = 7.2013[\text{rad/s}]$  - częstość własna platformy [2, 4]. Z zależności (15) otrzymano, iż masowy moment bez-

władności drgającej platformy wynosi  $I_o = 0.0482[\text{kgm}^2]$ . Współczynnik tłumienia jednostkowego  $h$  został wyznaczony doświadczalnie i wynosi  $h=0.075$ .

### 3.3. Różniczkowe równania ruchu układu

Przedstawiony układ wykonuje ruch obrotowy wokół punktu A, co sprawia, iż różniczkowe równania ruchu są równaniami ruchu obrotowego (16):

$$I_o \ddot{\varphi} = M_n + S_1 |AP| + S_2 |AR| \quad (16)$$

Z kolei wymuszenie układu  $M_n$  jest równe zależności (17):

$$M_n = m_p r_p |AT| \omega_w^2 \cos(\omega_w t) \quad (17)$$

gdzie:  $m_p$  – masa próbna wywołująca niewyważenie wirującego elementu,  $r_p$  – promień na, którym zamocowana jest masa  $m_p$  na tarczy,  $|AT|=|AK|$  – odległość od punktu do miejsca mocowania tarczy,  $\omega_w$  – prędkość kątowa wirującej tarczy [2, 4]. Natomiast siły reakcji sprężyn:  $S_1$  oraz  $S_2$  są z kolei opisane następującymi zależnościami:

$$S_1 = -k_1 y_p \quad (18)$$

$$S_2 = -k_2 y_r \quad (19)$$

gdzie:  $k_1, k_2$  – współczynniki sprężystości sprężyn 1 oraz 2 [2, 4]. Wstawiając do równania (16) przedstawione zależności (18) oraz (19) otrzymuje się następującą poniższą zależność:

$$I_o \ddot{\varphi} = m_p r_p |AT| \omega_w^2 \cos(\omega_w t) - k_1 y_p |AP| + k_2 y_r |AR| \quad (20)$$

Drgania wymuszone tłumione (z tarciem wiskotycznym) opisane są wzorem (21):

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_o^2 \varphi = q \cos(\omega t) \quad (21)$$

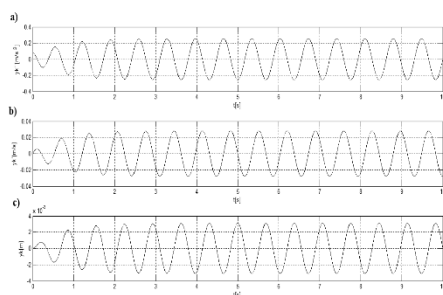
gdzie:  $\omega_o$  – to częstość drgań własnych układu,  $h$  – współczynnik tłumienia jednostkowego,  $q$  – to wymuszenie jednostkowe [2,4]. Zależność (20) można przekształcić do formy (21) oraz dodając znane już  $h$ , otrzymać zależność (22):

$$\ddot{\varphi} + \frac{2h\dot{\varphi}}{I_o} + \varphi \left[ \frac{k_1 |AP|^2 - k_2 |AR|^2}{I_o} \right] = m_p r_p |AT| \omega_w^2 \cos(\omega_w t) \quad (22)$$

W celu przeprowadzenia symulacji pracy układu powyższe równanie zostało zamodelowane w pakiecie Matlab/Simulink. W przeprowadzonej symulacji przyjęto następujące dane:  $m_p = 5[\text{g}]$ ,  $r_p = 22[\text{mm}]$ ,  $|AT| = |AK| = 0.21[\text{m}]$ ,  $h = 0.075[-]$ ,  $I_o = 0.0482[\text{kgm}^2]$ ,  $k_1 = 800[\text{N/m}]$ ,  $k_2 = 700[\text{N/m}]$ ,  $AP = AR = 0.2[\text{m}]$ ,  $\omega_{\text{rez}} = 9.02[\text{rad/s}]$ ,  $k = 0.001$ – krok dyskretyzacji, czas symulacji 10 [s] oraz zerowe warunki początkowe:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

### 3.4. Wyniki symulacji

Otrzymane na rys. 6 przebiegi kinematyczne, a szczególnie ten widoczny na rys. 6c, wskazują na poprawne zaprojektowanie stanowiska.



Rys. 6. Przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu: a) przyspieszenie liniowe punktu K, b) prędkość liniowa punktu K, c) przemieszczenie liniowe punktu K

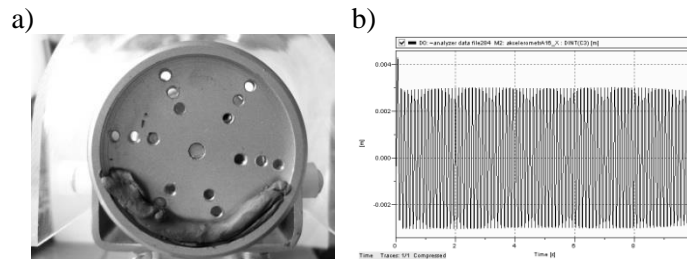
Fig. 6. Graph of the kinematic parameters of the movement: a) linear acceleration of the point K, b) linear speed of point K, c) linear displacement of point K

Amplituda drgań układu w skrajnym punkcie platformy przy rezonansowej częstotliwości wymuszenia nie przekracza 4 [mm]. Pomiar „stanu niewyważenia” jest możliwy w zbudowanym stanowisku właśnie dzięki pomiarowi drgań układu. Wspomniana amplituda jest, więc ważnym parametrem dla omawianego stanowiska ze względu na fakt, iż zbyt „małe drgania” byłyby bardzo trudne do zarejestrowania, natomiast zbyt duża wartość amplitudy drgań układu mogłaby doprowadzić do zniszczenia całej konstrukcji. Drgania układu o amplitudzie nie przekraczającej 4 [mm] są również łatwe do zarejestrowania przy pomocy większości aparatów pomiarowych.

### 3.5. Badania doświadczalne na zaprojektowanym stanowisku

Badania doświadczalne przeprowadzone były w zgodzie z przedstawioną w poprzednich rozważaniach procedurą wyważania układu. Proces wyważania w rozpatrywanym przypadku składa się z 3 podstawowych faz oraz montażu obliczonej masy korekcyjnej. W pierwszej fazie wyważania zmierzono wartość amplitudy drgań  $A_1$  przy wyznaczonej doświadczalnie prędkości rezonansowej układu po wprowadzeniu masy niewyważenia w postaci plasteliny widocznej na rys. 7a. Zachowanie układu dla tej fazy operacji wyważania przedstawia wykres na rys. 7b. Powstał on w wyniku użycia akcelerometru przymocowanego do

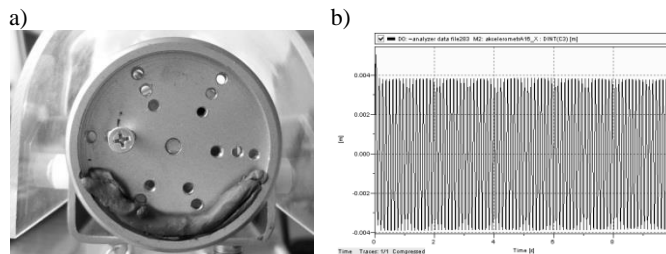




Rys. 7. a) Widok tarczy w pierwszej fazie wyważania, b) wykres przemieszczenia liniowego krańcowego punktu platformy w zależności od czasu

Fig. 7. a) View of the disc in the first phase of balancing, b) the plot of linear displacement of the marginal point for the platform in function of time

krańcowego punktu platformy. Z wykresu odczytano max. amplitudę drgań w „stanie ustalonym”  $A_1=3$  [mm]. Druga faza wyważania polega na umieszczeniu we wcześniej przygotowanej tarczy (w analizowanym przypadku wraz z plasteliną) masy próbnej w wybranym miejscu (rys. 8a). W omawianym przypadku jako masę wybrano śrubę o masie:  $m=2.6$  [g] umieszczoną w dobrze widocznym na wspomnianym rysunku miejscu.

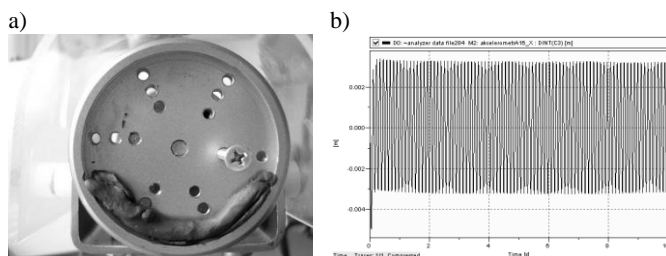


Rys. 8. a) Widok tarczy w drugiej fazie wyważania, b) wykres przemieszczenia liniowego krańcowego punktu platformy w zależności od czasu

Fig. 8. a) View of disc in second phase of balancing, b) plot of linear displacement of marginal point for platform in function of time

Następnie dokonano tych samych pomiarów, które zostały wykonane w pierwszej fazie wyważania. Wyniki omawianych badań są widoczne na rys. 8b. Z wykresu przemieszczenia liniowego krańcowego punktu dla fazy drugiej odczytano max. amplitudę drgań w „stanie ustalonym”  $A_2=3.8$  [mm]. Z kolei trzecia faza wyważania polega na umieszczeniu we wcześniej przygotowanej tarczy masy próbnej po przeciwnej stronie w stosunku do wybranego miejsca umieszczenia

masy próbnej w poprzednim przypadku. Jako masę ponownie wybrano śrubę o  $m=2.6$  [g] umieszczoną w widocznym na rys. 9a miejscu.

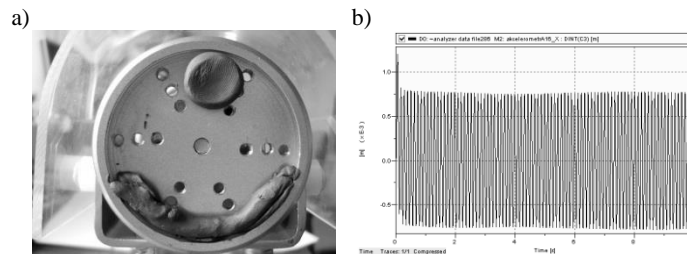


Rys. 9. a) Widok tarczy w trzeciej fazie wyważania, b) wykres przemieszczenia liniowego krańcowego punktu platformy w zależności od czasu

Fig. 9. a) View of disc in the third phase of balancing, b) plot of linear displacement of the maginal point for platform in function of time

Następnie dokonano tych samych pomiarów, które zostały wykonane w pierwszej i drugiej fazie wyważania. Wyniki omawianych badań są widoczne na rys. 9b. Tak jak w poprzednich dwóch przypadkach z wykresu przemieszczenia liniowego krańcowego punktu dla fazy trzeciej (rys. 9b.) odczytano max. amplitudę drgań w „stanie ustalonym”  $A_3=3.2$  [mm]. Znając wyznaczone doświadczalnie amplitudy drgań, wartości masy próbnej oraz promienia próbnego wykorzystano podane w poprzednim rozdziale zależności pozwalające uzyskać poszukiwaną wartość niewyważenia oraz jego miejsce. W celu wykonania wspomnianych obliczeń zastosowano pakiet Matlab/Simulink. Uzyskane wyniki obliczeń:  $A_p = 0.0018$  [m],  $P_1 = 9.3895e-005$  [kgm],  $k = 19.4639$ [m/N],  $\alpha = 1.7635$ [rad]= $101^\circ$ . Wskazują one, iż w celu wyważenia układu należy użyć ciężaru korekcyjnego o momencie statycznym  $P_1 = 93.895$  [g mm] na kącie  $\alpha = 101^\circ$ . W celu wyważenia układu sporządzono ciężar korekcyjny z plasteliny i umieszczono go w takim miejscu, aby miał podobny moment statyczny do obliczonego  $P_1$  i umieszczono go na wcześniej podanym kącie  $\alpha$  (rys. 10a).

Następnie dokonano identycznych pomiarów, które zostały wykonane w każdej z opisanych wcześniej faz wyważania. Wyniki omawianych badań są widoczne na rys. 10b. Maksymalna amplituda jest równa około 0.75 [mm]. Jest więc ona około czterokrotnie mniejsza od amplitudy uzyskanej w pierwszej fazie wyważania równej  $A_1=3$ [mm]. Wynik ten dowodzi poprawności całej metody. W doświadczeniach wykazano, iż niewielka zmiana masy układu (np. dodanie masy próbnej, czy korekcyjnej) zmienia położenie strefy rezonansu urządzenia. Wspomniany fakt negatywnie wpływa na dokładność procesu wyważania. Dlatego w pracy badania przeprowadzano przy pomocy stałej prędkości obrotowej wirnika, doświadczalnie ustawionej jako rezonans w pierwszej fazie wyważania.



Rys. 10. a) Widok tarczy wraz z masą korekcyjną, b) wykres przemieszczenia liniowego krańcowego punktu platformy w zależności od czasu dla układu po zastosowanej korekcji mas

Fig. 10. a) View of disc with correction mass b) plot of linear displacement of marginal point for platform in function of time of a system after masses correction application

#### 4. Wnioski końcowe

W niniejszym artykule zwrócono szczególną uwagę na współczesne metody wyważania wirujących elementów. Współczesny rozwój elektroniki doprowadził do powstania wielu urządzeń, w których pomiar niewyważenia jest w pełni zautomatyzowany lub półautomatyczny. Powstała koncepcja stanowiska wraz z procedurą wyważania. Wspomniana procedura wykorzystuje pomiar drgań platformy w celu określenia „stanu niewyważenia” układu. Jak wykazały badania symulacyjne zaproponowany układ mechaniczny umożliwia uzyskanie wystarczającej amplitudy drgań platformy, co stanowi dobrą podstawę do praktycznej realizacji wyważania. Przeprowadzone badania doświadczalne wskazują, iż zaprojektowany układ wraz z przyjętą procedurą wyważania jest w stanie zmniejszać niewyważenie elementów wirujących. W przedstawionych badaniach poprzez właściwe rozmieszczenie mas na powierzchni wirującej tarczy dokonano około czterokrotnego zmniejszenia niewyważenia obracającej się części. W przyszłości można rozbudować platformę o dodatkową płaszczyznę wyważania i w ten sposób zbudować wyważarkę dynamiczną. W takim przypadku znacznie wzrósłby zakres możliwych do wykonania na takim urządzeniu prac badawczych

#### Literatura

- [1] Den Hartog P.: Drgania mechaniczne, PWN, Warszawa, 1971.
- [2] Giergiel J.: Drgania mechaniczne, Uczel. Wydaw. Nauk.-Dydakt. AGH, Kraków, 2000.
- [3] Łączkowski R.: Wyważanie elementów wirujących, WNT, Warszawa, 1979.
- [4] Miller S.: Teoria mechanizmów i maszyn : synteza układów mechanicznych, Wydaw. Politech. Wrocł., Wrocław, 1977.

**DESCRIPTION PHENOMENON OF BALANCING MASSES  
IN ANGULAR RATE****S u m m a r y**

In the article description of the phenomenon of balancing masses in angular rate. In order to solve the problem of balancing test masses, the algorithm was elaborated. In addition created stand was presented and procedures for balancing in the discussed stand were described. The paper presents also the results of simulation and experiments performed on the created device.

**Keywords:** balancing, vibration, rotating components, balancing stand

DOI:10.7862/rb.2014.38

*Przesłano do redakcji: 10.07.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

Józef SZYBIŃSKI<sup>1</sup>  
Piotr RUTA<sup>2</sup>

## ANALIZA DRGAŃ SWOBODNYCH NIEPRYZMATYCZNEGO PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy jest zagadnienie własne niepryzmatycznego pręta cienkościennego opisanego według teorii Własowa. Przestrzenne drgania pręta opisane są czterema, w ogólnym przypadku sprzężonymi, równaniami o zmiennych współczynnikach. Równania te zostały rozwiązane z wykorzystaniem szeregów Czebyszewa. Zastosowana metoda bazuje na twierdzeniu dotyczącym rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, przedstawionym w monografii Paszkowskiego, *Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa, 1975. Uzyskane w wyniku zastosowania opisanego twierdzenia związki rekurencyjne pozwalają na wyznaczenie współczynników rozwinięć, w szeregi Czebyszewa, poszukiwanych funkcji przemieszczeń i obrotu. W przypadku drgań swobodnych związki te mają postać nieskończonego układu równań algebraicznych. Przedstawione rozważania dotyczą układu o dowolnie zmiennych parametrach geometrycznych i materiałowych. Uzyskane końcowe wzory pozwalają na rozwiązanie zagadnienia własnego dowolnego pręta. Wystarczy tylko w nieskończonym układzie równań podstawić współczynniki rozwinięć parametrów aktualnie analizowanego układu. W celu weryfikacji uzyskanych wyników porównano otrzymane częstości i formy własne z wynikami otrzymanymi z wykorzystaniem MES. Do analizy MES wykorzystano program komputerowy Sofistik. Układ podzielono na 100 pryzmatycznych belkowych elementów skończonych o siedmiu stopniach swobody. Otrzymane rezultaty w zakresie częstości własnych dały dobrą zgodność wyników otrzymanych z wykorzystaniem przedstawionej w pracy metody, a wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. Gorszą zgodność otrzymano w zakresie form własnych, niewątpliwym wpływem na to miał istotnie różny sposób modelowania analizowanych układów.

**Słowa kluczowe:** teoria Własowa, częstości i formy własne, szeregi Czebyszewa, związki rekurencyjne, rozwiązania analityczne

---

<sup>1</sup> Józef Szybiński, Politechnika Wrocławska, Instytut Inżynierii Lądowej, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: jozef.szybinski@pwr.edu.pl

<sup>2</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Piotr Ruta, Politechnika Wrocławska Instytut Inżynierii Lądowej, 50-370 Wrocław Wyb. Wyspiańskiego 27, e-mail: piotr.ruta@pwr.edu.pl

## 1. Wprowadzenie

Konieczność racjonalnego kształtowania i ekonomicznego projektowania konstrukcji, jak również względy architektoniczne są powodem stosowania we współczesnych konstrukcjach inżynierskich cienkościennych układów prętowych o zmiennych parametrach geometrycznych i materiałowych. Problem analizy tych układów jest również ciekawy ze względów teoretycznych, gdyż równania opisujące te układy są równaniami o zmiennych współczynnikach i jako takie poza szczególnymi przypadkami nie mają zamkniętych rozwiązań analitycznych.

Zagadnieniem drgań cienkościennych ustrojów prętowych zajmowało się wielu autorów. Ze względu na ograniczoną objętość pracy zostaną przedstawione tylko wybrane pozycje literatury dotyczące układów niepryzmatycznych. Zagadnieniem drgań swobodnych układów niepryzmatycznych zajmowali się m.in. Soltani i in. [1], [2], Ambrosini i in. [3], Sung-Bo Kim, Moon-Young Kim [4] oraz Liviu Librescu, Sungsoo Na [5]. W pracy [1] autorzy rozwiązyali zagadnienia stateczności, a w [2] stateczności i drgań swobodnych belek cienkościennych o zmiennych przedziałami, liniowo, wysokościach. Do rozwiązania wykorzystali klasyczne szeregi potęgowe. W pracy [3] rozwiązano zagadnienie drgań wymuszonych aperiodycznie, niepryzmatycznej, cienkościennej o liniowo zmiennej wysokości belki wspornikowej. Autorzy pracy [4] sformułowali cienkościenny element skończony, który następnie wykorzystali do rozwiązania problemu stateczności oraz zagadnienia drgań swobodnych.

W niniejszej pracy do rozwiązania zagadnienia własnego zastosowano metodę wykorzystującą przedstawione przez Paszkowskiego [6] twierdzenie opisujące metodę rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach z wykorzystaniem szeregów Czebyszewa. Metoda ta sprowadza się do wyprowadzenia związków rekurencyjnych w postaci nieskończonego układu równań algebraicznych, którego rozwiązaniem są współczynniki rozwinięć w szeregi, poszukiwanych funkcji. Metoda ta została również przedstawiona w pracach autora [7], [8]. Ze względu na ogólny charakter stosowanej metody, wyprowadzenie wzorów rekurencyjnych dla konkretnego problemu (konkretnego układu równań) pozwala na rozwiązania analizowanego zagadnienia dla różnych parametrów geometrycznych i materiałowych.

## 2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem analizy są drgania swobodne niepryzmatycznej, cienkościennej belki opisanej według teorii Własowa, o długości  $2a$ . Punktem wyjścia do rozważań są ogólne sprzężone równania różniczkowe pręta cienkościennego o osi prostoliniowej (zapisane dla układu osi głównych), w którym środek ścinania nie musi pokrywać się ze środkiem przekroju [9]. Równania opisujące przestrzenne drgania takiego pręta mają postać

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{EA}(X) \frac{\partial U_X}{\partial X} \right) + \overline{\rho A}(X) \frac{\partial^2 U_X}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \overline{EI}_Z(X) \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \right) + \\ \left( \overline{\rho A} \frac{\partial^2 U_Y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{\rho I}_{Z\omega} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_Z \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} \right) \right) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \overline{EI}_Y(X) \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Y\omega} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \right) + \\ \left( \overline{\rho A} \frac{\partial^2 U_Z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{\rho I}_{Y\omega} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_Y \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} \right) \right) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \overline{EI}_\omega(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega} \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Y\omega} \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{GI}_s \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) + \\ \left( \overline{\rho I}_\omega \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{\rho I}_{Y\omega} \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} + \overline{\rho I}_{Z\omega} \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_\omega \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} \right) \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

gdzie  $\rho$  - gęstość pręta,  $A$  - pole przekroju poprzecznego,  $I_Z, I_Y, I_0$  - momenty bezwładności odpowiednio względem osi  $Z, Y$  oraz środka  $O$ ,  $I_s$  - moment bezwładności na skręcanie,  $I_{Z\omega}, I_{Y\omega}$  - wycinkowe momenty odśrodkowe (dewiacyjne) względem osi  $Z$  i  $Y$ ,  $I_\omega$  - wycinkowy moment bezwładności. Wykorzystywana przy obliczaniu tych charakterystyk współrzędna wycinkowa jest współrzędną znormalizowaną spełniającą warunek  $\int \omega \delta ds = 0$  ( $\delta$  - grubość ścianki profilu).

Natomiast przy definiowaniu warunków brzegowych w punktach  $X = \pm a$ , wykorzystywane są następujące zależności

$$U_X(X,t) = 0 \quad \text{lub} \quad N = \overline{EA}(X) \frac{\partial U_X}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

$$U_Y(X,t) = 0 \quad \text{lub}$$

$$\begin{aligned} Q_Y = \frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{EI}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_Z \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} \right) + \\ + \left( \overline{\rho I}_Z(X) \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$U_Z(X, t) = 0 \quad \text{lub}$$

$$\begin{aligned} Q_Z &= \frac{\partial}{\partial X} \left( \overline{EI}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_Y \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} \right) + \\ &\left( \overline{\rho I}_Y(X) \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Theta(X, t) = 0 \quad \text{lub}$$

$$\begin{aligned} M_X &= \frac{\partial}{\partial X} \left( -\overline{EI}_\omega(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \overline{EI}_{Z\omega} \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} + \overline{EI}_{Y\omega} \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} \right) + \overline{GI}_s \frac{\partial \Theta}{\partial X} \\ &\left( \overline{\rho I}_\omega \frac{\partial^3 \Theta}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Z\omega} \frac{\partial^3 U_Y}{\partial X \partial t^2} - \overline{\rho I}_{Y\omega} \frac{\partial^3 U_Z}{\partial X \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_Y(X, t)}{\partial X} = 0 \quad \text{lub} \quad M_Z = \overline{EI}_Z(X) \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_Z(X, t)}{\partial X} = 0 \quad \text{lub} \quad M_Y = -\overline{EI}_Y(X) \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} + \overline{EI}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta(X, t)}{\partial X} = 0 \quad \text{lub} \quad M_\omega = \overline{EI}_\omega(X) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Z\omega}(X) \frac{\partial^2 U_Y}{\partial X^2} - \overline{EI}_{Y\omega}(X) \frac{\partial^2 U_Z}{\partial X^2} = 0. \quad (8)$$

Obliczając występujące we wzorze (1) pochodne iloczynów funkcji oraz wprowadzając zmienne i funkcje bezwymiarowe  $x = X/a$ ,  $u_x = U_X/a$ ,  $u_y = U_Y/a$ ,  $u_z = U_Z/a$ , wyjściowy układ równań (1) w przypadku drgań swobodnych można przedstawić w następującej postaci macierzowej

$$\sum_{m=0}^4 (\mathbf{P}_m(x) - \omega^2 \mathbf{R}_m(x)) \mathbf{f}^{(4-m)}(x) = \mathbf{P}(x) \quad (9)$$

Po wprowadzeniu macierzy pomocniczych

$$\mathbf{K}_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & -EI_{z\omega} \\ 0 & 0 & EI_y & -EI_{y\omega} \\ 0 & -EI_{z\omega} & -EI_{y\omega} & EI_\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1(x) = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_s \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{G}_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho I_z & 0 & \rho I_{z\omega} \\ 0 & 0 & -\rho I_y & \rho I_{y\omega} \\ 0 & \rho I_{z\omega} & \rho I_{y\omega} & -\rho I_\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1(x) = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{O}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

macierzowe funkcje  $\mathbf{P}_m(x)$ ,  $\mathbf{R}_m(x)$  oraz wektory  $\mathbf{P}(x)$  i  $\mathbf{f}(x,t)$  występujące w (9) można opisać następującymi wzorami (we wzorach przyjęto zapis  $\mathbf{f}^{(p)}(x,t) = \partial^p \mathbf{f}(x,t) / \partial x^p$ ):

$$\mathbf{P}_0(x) = \mathbf{K}_0(x), \quad \mathbf{P}_1(x) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_0(x), \quad \mathbf{P}_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{K}_0(x) - \mathbf{K}_1(x), \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_3(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_1(x), \quad \mathbf{P}_4(x) = \mathbf{O}(x),$$

$$\mathbf{R}_0(x) = \mathbf{R}_1(x) = \mathbf{O}(x), \quad \mathbf{R}_2(x) = \mathbf{G}_0(x),$$

$$\mathbf{R}_3(x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{G}_0(x), \quad \mathbf{R}_4(x) = \mathbf{G}_1(x), \quad (12)$$

$$\mathbf{f}(x) = [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \theta]^T. \quad (13)$$

Występujące w macierzach (10) parametry to bezwymiarowe odpowiedniki parametrów występujących w wyjściowym wzorze (1). Przykładowo:  $\overline{EA} = EA_0 EA$ ,  $\overline{EI}_Y = a^2 EA_0 EI_Y$ ,  $\overline{EI}_{Y\omega} = a^3 EA_0 EI_{Y\omega}$ ,  $\overline{EI}_\omega = a^4 EA_0 EI_\omega$ ,  $\overline{\rho A} = EA_0 EA / a^2$ ,  $\overline{\rho I}_Y = EA_0 \rho I_Y$ ,  $\overline{\rho I}_{Y\omega} = a EA_0 \rho I_{Y\omega}$ ,  $\overline{\rho I}_\omega = a^2 EA_0 \rho I_\omega$ .

### 3. Rozwiązanie

Do rozwiązania układu (9) zastosujemy przedstawione w monografii [6] twierdzenie (patrz [6] str. 231 i 323) przedstawiające metodę rozwiązywania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. W szczególnym przypadku, gdy układ równań różniczkowych jest czwartego rzędu z cytowanego twierdzenia wynika, że współczynniki rozwinięcia poszukiwanego wektora  $\mathbf{f}(s)$  spełniają następujący nieskończony układ równań

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ 8(k^2-9)(k^2-4)(k^2-1) k (a_{k-l}[\mathbf{Q}_0] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_0]) + \right. \\
& 4(k^2-9)(k^2-4)(k^2-1) (a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_1] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_1] - a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_1]) + \\
& 2(k^2-9)(k^2-4)((k+1)(a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_2]) - 2k(a_{k-l}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_2]) + \\
& \quad (k-1)(a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_2] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_2])) + \\
& (k^2-9)((k+1)(k+2)(a_{k-l-3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l-3}[\mathbf{Q}_3]) - \\
& \quad 3(k-1)(k+2)(a_{k-l-1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l-1}[\mathbf{Q}_3]) + \\
& \quad 3(k+1)(k-2)(a_{k-l+1}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l+1}[\mathbf{Q}_3]) - \\
& \quad \left. (k-1)(k-2)(a_{k-l+3}[\mathbf{Q}_3] + a_{k+l+3}[\mathbf{Q}_3])) + \right. \\
& \frac{1}{2}((k+1)(k+2)(k+3)(a_{k-l-4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l-4}[\mathbf{Q}_4]) - \\
& \quad 4(k+3)(k^2-4)(a_{k-l-2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l-2}[\mathbf{Q}_4]) + \\
& \quad 6k(k^2-9)(a_{k-l}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l}[\mathbf{Q}_4]) - 4(k-3)(k^2-4)(a_{k-l+2}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l+2}[\mathbf{Q}_4]) + \\
& \quad \left. (k-1)(k-2)(k-3)(a_{k-l+4}[\mathbf{Q}_4] + a_{k+l+4}[\mathbf{Q}_4])) \right\} a_l[\mathbf{f}] = 0 \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{14}$$

gdzie funkcje macierzowe  $\mathbf{Q}_m$  określone są wzorami

$$\mathbf{Q}_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} \binom{4-j}{m-j} (\mathbf{P}_j - \omega^2 \mathbf{R}_j)^{(m-j)}, \quad m = 0, 1, \dots, 4 \tag{15}$$

$a_l[\mathbf{f}] = [u_{xl}, u_{yl}, u_{zl}, \theta_l]^T$ , a  $u_{xl}, u_{yl}, u_{zl}, \theta_l$  są współczynnikami rozwinięć funkcji przemieszczeń i obrotu w szeregi Czebyszewa

$$\begin{aligned}
u_x(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_{xl} T_l(x), & u_y(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_{yl} T_l(x), \\
u_z(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_{zl} T_l(x), & \theta(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \theta_l T_l(x),
\end{aligned} \tag{16}$$

gdzie  $\sum_{l=0}^{\infty} a_l[f] = \frac{1}{2} a_0[f] + a_1[f] + a_2[f] + \dots$ , a  $T_l(x)$  jest  $l$ -tym wielomianem

Czebyszewa I rodzaju. Wykonując obliczenia z wykorzystaniem wzoru (15) określającego macierzowe funkcje  $\mathbf{Q}_m(x)$  otrzymano

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_0(x) &= \mathbf{K}_0(x), \quad \mathbf{Q}_1(x) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_0(x), \\
 \mathbf{Q}_2(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{K}_0(x) - \mathbf{K}_1(x) - \omega^2 \mathbf{G}_0(x), \\
 \mathbf{Q}_3(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_1(x) + \omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{G}_0(x), \quad \mathbf{Q}_4(x) = -\omega^2 \mathbf{G}_1(x),
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Po podstawieniu współczynników rozwinięć w szeregi Czebyszewa funkcji  $\mathbf{Q}_m$ , do równania (14) otrzymano następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k_{11}(k,l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}(k,l) & 0 & k_{24}(k,l) \\ 0 & 0 & k_{33}(k,l) & k_{34}(k,l) \\ 0 & k_{42}(k,l) & k_{43}(k,l) & k_{44}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xl} \\ u_{yl} \\ u_{zl} \\ \theta_l \end{bmatrix} + \\
 + \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11}(k,l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22}(k,l) & 0 & m_{24}(k,l) \\ 0 & 0 & m_{33}(k,l) & m_{34}(k,l) \\ 0 & m_{42}(k,l) & m_{43}(k,l) & m_{44}(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xl} \\ u_{yl} \\ u_{zl} \\ \theta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Współczynniki  $k_{ij}(k,l)$  i  $m_{ij}(k,l)$  poddano dalszym przekształceniom wykorzystując następującą zależność między współczynnikami rozwinięcia pochodnej funkcji a współczynnikami funkcji wyjściowej

$$a_l = \frac{1}{2l} (a_{l-1}^{(1)} - a_{l+1}^{(1)}), \quad l \neq 0, \tag{19}$$

gdzie  $a_l = a_l[f]$ , a  $a_l^{(p)} = a_l[\partial^p f / \partial x^p]$ . Ze względu na ograniczoną objętość pracy przedstawiono tylko te istotnie różniące się:

$$\begin{aligned}
 k_{11}(k,l) &= -2(k^2 - 9)l [(k+1)(k+2)(EA_{k-l-2} - EA_{k+l-2}) \\
 &\quad - 2(k^2 - 4)(EA_{k-l} - EA_{k+l}) + (k-1)(k-2)(EA_{k-l+2} - EA_{k+l+2})],
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22}(k,l) &= 8(k^2 - 9)(k^2 - 4)l [(k+1)(l-1)EI_{zk-l} - \\
 &\quad 2l \sum_{j=1}^{l-1} (k-l+2j) EI_{zk-l+2j} - (k-1)(l-1)EI_{zk+l}].
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
m_{11}(k, l) = & \frac{1}{2}[(k+1)(k+2)(k+3)(\rho A_{k-l-4} + \rho A_{k+l-4}) - \\
& 4(k+3)(k^2-4)(\rho A_{k-l-2} + \rho A_{k+l-2}) + \\
& 6k(k^2-9)(\rho A_{k-l} + \rho A_{k+l}) - 4(k-3)(k^2-4)(\rho A_{k-l+2} + \rho A_{k+l+2}) + \\
& (k-1)(k-2)(k-3)(\rho A_{k-l+4} + \rho A_{k+l+4})] \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{24}(k, l) = m_{42}(k, l) = & -2(k^2-9)l[(k+1)(k+2)(\rho I_{z\omega_{k-l-2}} - \rho I_{z\omega_{k+l-2}}) - \\
& 2(k^2-4)(\rho I_{z\omega_{k-l}} - \rho I_{z\omega_{k+l}}) + \\
& (k-1)(k-2)(\rho I_{z\omega_{k-l+2}} - \rho I_{z\omega_{k+l+2}})] \quad (23)
\end{aligned}$$

Na podstawie podanych współczynników można wyznaczyć pozostałe np.  $k_{44}(k, l)$  to suma współczynników określonych przez wzory (20) i (21) w których odpowiednio: za  $EA_m$  podstawiono  $GI_m$ , a za  $EI_{zm}$  podstawiono  $EI_{\omega m}$ .

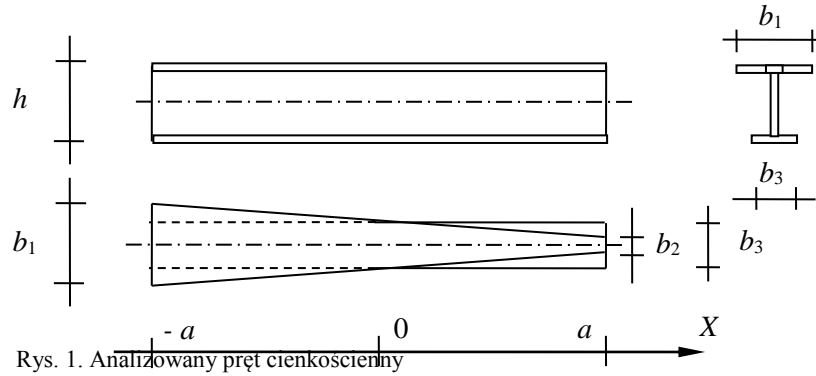
Pierwsze szesnaście równań układu (18) (gdy  $k = 0, 1, 2, 3$ ) jest spełnionych tożsamościowo. Równania te zastępuje się czternastoma równaniami opisującymi warunkami brzegowymi. Przy definiowaniu warunków brzegowych wykorzystuje się następujące wzory pozwalające na obliczenie wartości wielomianów Czebyszewa i ich pochodnych

$$T_n^{(m)}(1) = \begin{cases} 1 & m=0, \\ \frac{n}{(2m-1)!!} \prod_{k=-m+1}^{m-1} (n+k) & m>0, \end{cases} \quad T_n^{(m)}(-1) = (-1)^{n-m} T_n^{(m)}(1). \quad (24)$$

#### 4. Przykłady obliczeniowe

Przedstawioną metodę zastosowano do wyznaczenia częstości i form własnych cienkościennej, niepryzmatycznej belki monosymetrycznej przedstawionej na rys. 1. Występujące tam wymiary przyjmują następujące wartości:  $a = 5\text{m}$ ,  $h = 0.5\text{m}$ ,  $b_1 = 0.5\text{m}$ ,  $b_2 = 0.1\text{m}$ ,  $b_3 = 0.3\text{m}$ . Grubości wszystkich ścianek blachownicy  $t = 0.01\text{m}$ . Natomiast parametry materiałowe przyjmują wartości:  $E = 210 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $G = 80 \cdot 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $\rho = 7850 \text{kg/m}^3$ .

Analizowany układ był obustronnie sztywno utwierdzony, a zatem w punktach  $x = \mp 1$  spełnione są relacje  $u_x = u_y = u_z = \theta = 0$ ,  $\theta' = u'_y = u'_z = 0$ . Po rozwiązaniu równań opisujących warunki brzegowe w szeregi Czebyszewa i wykorzystaniu wzorów (24) otrzymano dla warunków  $u_x(\mp 1) = 0$ ,  $\theta'(\mp 1) = 0$  następujące równania



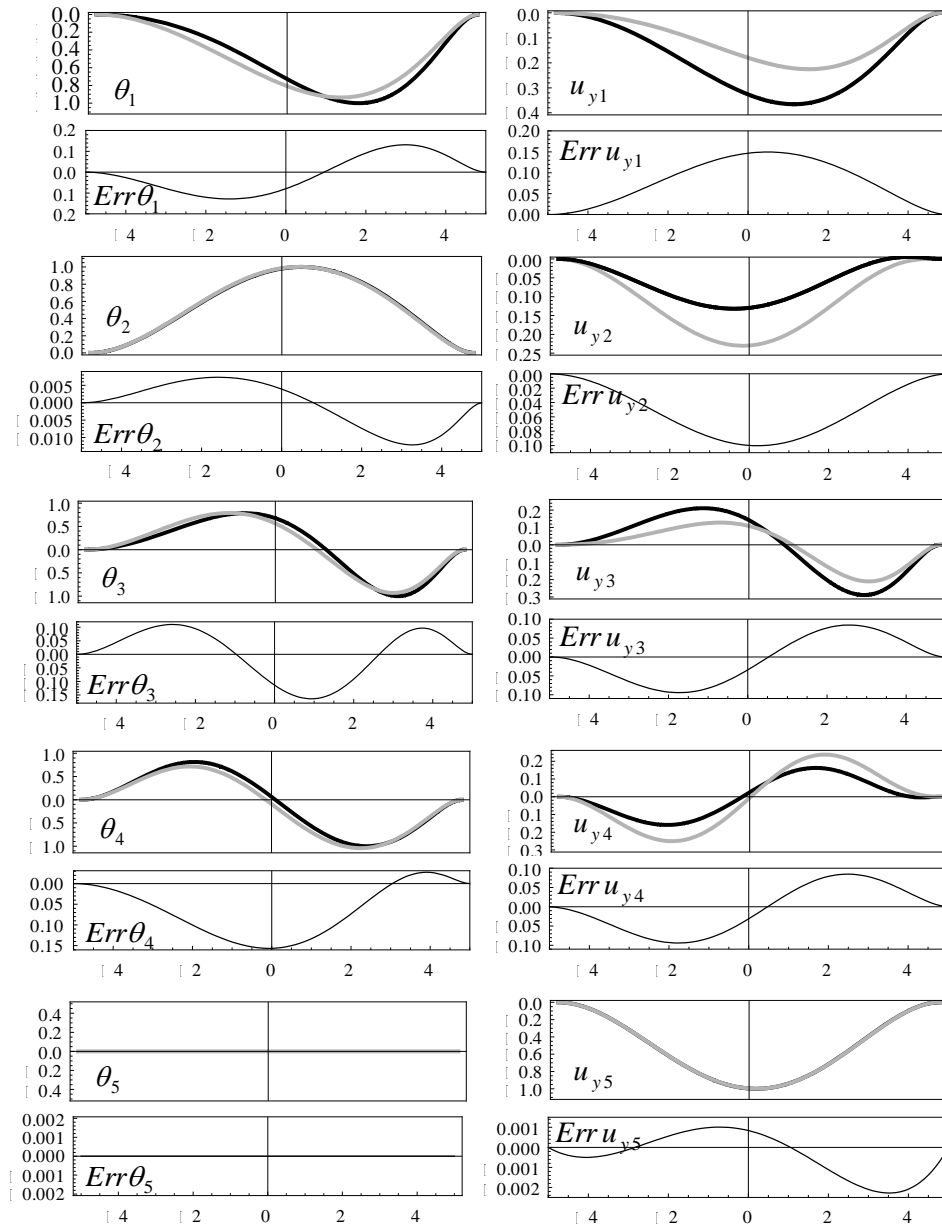
Rys. 1. Analizowany pręt cienkościenny  
 Fig. 1. Analysed thin-walled bar

$$u_x(\mp 1) = \sum_{l=0}^{\infty} (\mp 1)^l u_{xl} = 0, \quad \frac{\partial \theta(\mp 1)}{\partial x} = \sum_{l=0}^{\infty} (\mp 1)^{l+1} l^2 \theta_l = 0. \quad (25)$$

Dla pozostałych, analizowanych warunków brzegowych uzyskane równania są analogiczne.

W celu weryfikacji otrzymanych rezultatów otrzymane wyniki porównano z częstościami i formami własnymi wyznaczonymi z wykorzystaniem MES. Do analizy użyto programu Sofistik, modelując układ 100 pryzmatycznymi elementami skończonymi o siedmiu stopniach swobody (w węzle). Pierwsze dziesięć częstości własnych przedstawiono w Tabeli 1. W zakresie form własnych porównano pierwsze pięć form. Wykresy tych form oraz odchylenie między nimi oznaczone przez  $Err f_k(x), k=1,2,\dots,5$  zostało przedstawione na Rys. 2. Ze względu na monosymetryczność przekrojów (brak bisymetrii) formy te zazwyczaj są formami sprzężonymi, giętno-skrętnymi. Z tego też względu na Rys. 2 ich składowe przedstawiono na oddzielnych wykresach. Linia czarna ( — ) oznaczono formy uzyskane przedstawioną w pracy metodą, linią szarą ( — ) formy wyznaczone z pomocą MES.

Wykonano również obliczenia dla układu z bisymetrycznym przekrojem. Analizowany układ miał takie same wymiary jak układ z Rys. 1, z tym że pryzmatyczny prostokątny pas dolny zastąpiono pasem o liniowo zmiennej szerokości, identycznym jak pas górny. W tym przypadku wykresy form własnych wyznaczone z pomocą MES i prezentowanej w pracy metody praktycznie pokrywały się.



Rys. 2 Wykresy form własnych oraz różnice między formami wyznaczonymi MES i przedstawioną metodą

Fig. 2 Eigenforms and differences between results obtained using FEM and proposed method

Tabela 1. Częstości własne układu

Table 1. Structure's eigenfrequencies

Częstości własne [Hz]					
Nr	Praca	Sofistik	Nr	Praca	Sofistik
1	11,12	11,11	6	58,00	57,32
2	13,17	12,91	7	68,69	67,64
3	29,92	29,68	8	95,32	93,82
4	35,46	34,89	9	101,28	100,56
5	36,86	36,73	10	112,76	110,63

## 5. Wnioski

Otrzymane wyniki potwierdzają zgodność otrzymanych częstości własnych z wartościami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. Błąd względny dla pierwszych dziesięciu częstości zawarty jest w przedziale 0,09-2,01%. Gorszą zgodność uzyskano w zakresie form własnych. Jak widać z Rys. 2 różnice te mają jednak głównie charakter ilościowy. Jak już wspomniano w przypadku belki o przekroju bisymetrycznych (dla której z powodu ograniczonej objętości pracy nie podano wyników) różnice między formami były praktycznie niezauważalne, a między częstościami własnymi były zawarte w przedziale 0,08-2,54%

Warto podkreślić też, że końcowa postać wyprowadzonych równań (patrz wzory (20)-(23)) pozwala na bezpośrednie rozwiązanie belki o dowolnych parametrach geometrycznych i materiałowych.

## Literatura

- [1] Asgarian B., Soltani M., Mohri F: Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, *Thin-Walled Structures*, 62, 2013, s. 96–108.
- [2] Soltani M., Asgarian B., Mohri F.: Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method, *Journal of Constructional Steel Research*, 96, 2014, s. 106–126.
- [3] Ambrosini R. D., Riera J. D., Danesi R.F., A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams, *Engineering Structures*, 22, 2000, s. 890–900.
- [4] Sung-Bo Kim, Moon-Young Kim: Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames, *Engineering Structures*, 22, (2000, s. 446–458.
- [5] Liviu Librescu, Sungsoo Na: Active vibration control of doubly tapered thin walled beams using piezoelectric actuation, *Thin-Walled Structures*, 39, 2001, s. 65–82.
- [6] Paszkowski S.: Zastosowania numeryczne wielomianów Czebyszewa, PWN, Warszawa 1975.

- [7] Ruta P.: Application of Chebyshev series to solution on non-prismatic beam vibration problems. *Journal of Sounds and Vibration*, 227(2), 1999, s. 449-467.
- [8] Ruta P.: The application of Chebyshev polynomials to the solution of the non-prismatic Timoshenko beam vibration problem, *Journal of Sound and Vibration*, 296, 2006, s. 243–263.
- [9] Chang-New Chen: Variational Derivation of the Dynamic Equilibrium Equations of Nonprismatic Thin-Walled Beams Defined on an Arbitrary Coordinate System, *Mechanics of Structures and Machines: An International Journal*, 26, 1998, s. 219-237.

## ANALYSIS OF THE FREE VIBRATION OF A THIN-WALLED NONPRISMATIC BEAM

### Summary

This paper deals with the eigenvalue problem of a thin-walled nonprismatic beam described in accordance with the Vlasov theory. The spatial vibration of the beam is described by four compressed (in the general case) equations with variable coefficients. The equations have been solved using the Chebyshev series. The method used is based on the theorem concerning the solution of ordinary differential equations, presented in Paszkowski's monograph: *Numerical application of Chebyshev polynomials and series* (in Polish), PWN, Warsaw, 1975. The recurrence relations obtained by solving the above theorem make it possible to determine the coefficients of the expansions of the sought displacement and rotation functions into Chebyshev series. In the case of free vibrations, the relations have the form of an infinite system of algebraic equations. The considerations apply to a system with arbitrarily variable geometrical and material parameters. The derived formulas make it possible to solve the eigenvalue problem of any beam. It is enough to substitute the expansion coefficients of the parameters of the currently analyzed system into the infinite system of equations. In order to verify the results the calculated eigenfrequencies and forms were compared with the ones obtained using FEM. The Sofistik software was used for the FE analysis. The system was divided into 100 finite prismatic beam elements with seven degrees of freedom. As regards eigenfrequencies, the results obtained using the proposed method were found to be in good agreement with the ones yielded by FEM. The agreement for the eigenforms was worse, which was undoubtedly due to the significantly different ways of solving the considered systems.

**Keywords:** Vlasov theory, eigenfrequencies and forms, Chebyshev series, recurrence relations, analytical solutions

DOI:10.7862/rb.2014.39

*Przesłano do redakcji: 16.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



Paweł ŚNIADY<sup>1</sup>  
Filip ZAKĘŚ<sup>2</sup>

## DRGANIA WIELOPRZĘSŁOWYCH CIĄGLYCH BELEK PRYZMATYCZNYCH WYWOŁANE SIŁĄ RUCHOMĄ

Praca przedstawia rozwiązanie zagadnienia drgań wieloprzęsłowych ciągłych belek pryzmatycznych wywołanych skupioną siłą poruszającą się ze stałą prędkością. Wykorzystując znane rozwiązania dla belki swobodnie podpartej obciążonej siłą ruchomą oraz zmienną w czasie siłą skupioną w punkcie wyznaczono równanie drgań belki wieloprzęsłowej analogicznie do statycznej metody sił, zastępując algebraiczny układ równań zgodności przemieszczeń układem równań całkowych Volterry, podając również procedurę numeryczną ułatwiającą ich rozwiązanie. W pracy zamieszczono przykład obliczeniowy belki trójprzęsłowej.

**Słowa kluczowe:** teoria Własowa, częstości i formy własne, szeregi Czebyszewa, związki rekurencyjne, rozwiązania analityczne

### 1. Wprowadzenie

Ważnym zagadnieniem w dynamice konstrukcji inżynierskich jest problem drgań wywołanych poruszającym się obciążeniem. Zagadnienie to występuje między innymi w dynamice mostów drogowych i kolejowych, kładek dla pieszych, torów kolejowych, pasów startowych lotnisk, dróg, kolejek linowych a także samolotów i rakiet. Jest to problematyka ważna, a równocześnie interesująca z teoretycznego punktu widzenia. Poświęcono jej setki prac naukowych [1]. Badano drgania cięgien, belek, płyt, powłok, ram, łuków, a szczególnie mostów, w tym mostów wiszących. Analizowano drgania konstrukcji wywołane różnymi rodzajami obciążeń ruchomych, które można podzielić na obciążenia nieinercyjne i obciążenie inercyjne. Do obciążeń nieinercyjnych należą: ruchoma siła skupiona, ruchome obciążenie rozłożone a także ruchomy moment sku-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Paweł Śniady, Wydział Inżynierii środowiska i Geodezji, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, tel. 71 320 55 06, e-mail: pawel.sniady@wp.pl

<sup>2</sup> Filip Zakęś, Wydział Inżynierii Środowiska i Geodezji, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, tel. 71 320 55 06, e-mail: filip.zakes@up.wroc.pl

piony. Do ruchomych obciążeń inercyjnych często modelujących poruszające się pojazdy należą: nieresorowana masa skupiona lub rozłożona, oscylatory o jednym i wielu stopniach swobody. Rozwiązywano problemy zarówno w zakresie deterministycznym jak i w ujęciu drgań stochastycznych. W większości prac badano proste dźwigary jednoprzęsłowe [2], a także ustroje bardziej skomplikowane jak podwójna struna, podwójna belka czy most wiszący, ale również jako dźwigary jednoprzęsłowe.

Ważnym i interesującym zagadnieniem są drgania belek wieloprzęsłowych wywołane obciążeniem ruchomym, gdyż wiele obecnie projektowanych konstrukcji inżynierskich (np. mostów) odpowiada takiemu właśnie schematowi dynamicznemu [3]-[11]. Stosunkowo mało jest prac poświęconych temu zagadnieniu.

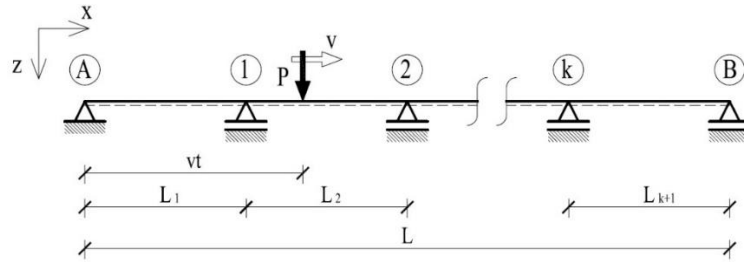
W niniejszej pracy przedstawiono algorytm wyznaczania drgań wieloprzęsłowej przyrzmatycznej belki Eulera-Bernoulliego poddanej działaniu ruchomej siły skupionej o stałej wartości. Przy rozwiązywaniu zagadnienia połączono procedury analityczne i numeryczne. Założono, że sztywność oraz masa jednostkowa przekroju belki są jednakowe w każdym przęśle, natomiast zmienna może być rozpiętość poszczególnych przęseł. Problem rozwiązano w sposób analogiczny do statycznej metody sił, gdzie układ równań algebraicznych zastąpiono układem równań całkowych Voltery pierwszego (gdy podpory są stałe) lub drugiego rodzaju (gdy podpory są sprężyste). Za układ podstawowy metody sił (belkę podstawową) przyjęto jednoprzęsłową belkę swobodnie podpartą. Aby otrzymać rozwiązanie dla belki wieloprzęsłowej, konieczne jest wyznaczenie drgań belki swobodnie podpartej o skończonej długości poddanej działaniu siły ruchomej oraz wywołanych siłami skupionymi w miejscach usuniętych podpór nadliczbowych.

## 2. Drgania belki swobodnie podpartej wywołane siłą ruchomą

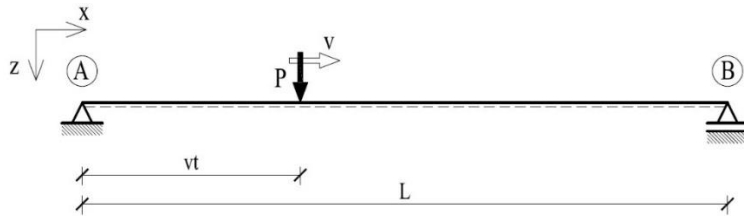
Rozpatrujemy drgania wieloprzęsłowej belki Eulera-Bernoulliego obciążonej siłą  $P$  poruszającą się ze stałą prędkością  $v$ . Belka spoczywa na  $k+2$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) podporach (rys. 1), co oznacza, że jest  $k$ -krotnie statycznie niewyznaczalna. Belka charakteryzuje się stałą geometrią przekroju poprzecznego w każdym przęśle oraz dowolną lokalizacją podpór pośrednich. W prezentowanej metodzie za układ podstawowy metody sił przyjęto belkę swobodnie podpartą Eulera-Bernoulliego o skończonej rozpiętości  $L$ , obciążoną ruchomą siłą o stałej wartości  $P$ , poruszającej się ze stałą prędkością  $v$  (rys. 2). Drgania tłumione takiej belki opisuje równanie:

$$EI \frac{\partial^4 w^P(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w^P(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w^P(x,t)}{\partial t^2} = P \delta(x - vt) \quad (1)$$

gdzie  $EI$  oznacza sztywność giętną belki,  $m$  oznacza masę jednostkową przekroju belki, natomiast  $c$  jest współczynnikiem tłumienia. Symbolem  $\delta(\cdot)$  oznaczono deltę Diraca.



Rys. 1. Belka wieloprzęsłowa obciążona ruchomą siłą skupioną  
Fig. 1. Multi-span continuous beam loaded with moving force



Rys. 2. Belka swobodnie podparta obciążona ruchomą siłą skupioną  
Fig. 2. Simply supported beam loaded with moving force

Dla belki swobodnie podpartej warunki brzegowe mają postać:

$$w^P(0, t) = w^P(L, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w^P(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w^P(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (2)$$

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{vt}{L}, \quad \xi \in [0, 1], \quad T \in [0, 1] \quad (3)$$

równanie (1) przyjmuje postać:

$$[w^P(\xi, T)]^{IV} + c_o \dot{w}^P(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}^P(\xi, T) = P_0 \delta(\xi - T) \quad (4)$$

gdzie:  $c_0 = c \frac{vL^3}{EI}$ ,  $\sigma^2 = \frac{mv^2L^2}{EI} = \mu^2 \lambda^2$ ,  $P_0 = \frac{PL^3}{EI}$ ,  $\mu = \frac{v}{v_g}$ ,  $\lambda = \frac{L}{r}$ ,  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ,  $v_g = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Cyframi rzymskimi oznaczono różniczkowanie po przestrzennej współrzędnej  $\xi$ , natomiast kropką oznaczono różniczkowanie po czasie  $T$ . Wielkość  $v_g$  oznacza prędkość rozchodzenia się fali giętej (fali podłużnej w pręcie), a przez symbol  $\lambda$  oznaczono smukłość belki. Symbole  $A$ ,  $I$ ,  $r$  oznaczają kolejno pole przekroju belki, jego moment bezwładności oraz promień bezwładności,  $E$  oznacza moduł Younga zaś  $\rho = \frac{m}{A}$  oznacza gęstość materiału.

Warunki brzegowe (2) przyjmują postać:

$$w^P(0, T) = w^P(1, T) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 w^P(\xi, T)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial^2 w^P(\xi, T)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (5)$$

Przyjęto, że w chwili początkowej belka jest w spoczynku stąd warunki początkowe mają postać:

$$w^P(\xi, 0) = 0, \quad \dot{w}^P(\xi, 0) = 0 \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (4) przy warunkach brzegowych (5) przyjmuje się w postaci szeregu:

$$w(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(T) \sin n\pi \xi \quad (7)$$

Po podstawieniu wyrażenia (7) do równania (4) oraz wykorzystaniu ortogonalności funkcji własnych otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\ddot{y}_n(T) + 2\alpha \dot{y}_n(T) + \frac{(n\pi)^4}{\sigma^2} y_n(T) = \frac{2P_0}{\sigma^2} \sin n\pi T \quad (8)$$

gdzie  $2\alpha = \frac{cL}{mv}$ . Warunki początkowe mają postać:

$$y_n(0) = 0, \quad \dot{y}_n(0) = 0 \quad (9)$$

Po rozwiązaniu równania (8) z uwzględnieniem warunków początkowych (9) dynamiczna odpowiedź belki ma postać:

$$w^P(\xi, T) = w_A^P(\xi, T) + w_S^P(\xi, T), \quad (10)$$

gdzie:

$$w_A^P(\xi, T) = 2P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n\pi)^2 - \sigma^2] \sin n\pi T \sin n\pi \xi}{(n\pi)^2 [(n\pi)^2 - \sigma^2]^2 + 4\alpha^2 \sigma^4} - 4P_0 \alpha \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi T \sin n\pi \xi}{(n\pi) \{[(n\pi)^2 - \sigma^2]^2 + 4\alpha^2 \sigma^4\}} \quad (11)$$

$$w_S^P(\xi, T) = 4P_0 \alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_n T \sin n\pi \xi}{\Omega_n (n\pi) \{[(n\pi)^2 - \sigma^2]^2 + 4\alpha^2 \sigma^4\}} - 2P_0 e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi) [(n\pi)^2 - \sigma^2] \sin \Omega_n T \sin n\pi \xi}{\Omega_n \{[(n\pi)^2 - \sigma^2]^2 + 4\alpha^2 \sigma^4\}} + 4P_0 \alpha \sigma^2 e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \Omega_n T \sin n\pi \xi}{(n\pi) \{[(n\pi)^2 - \sigma^2]^2 + 4\alpha^2 \sigma^4\}}, \quad (12)$$

gdzie  $\Omega_n^2 = \frac{(n\pi)^4}{\sigma^2} - \alpha^2$ . W przypadku drgań nietłumionych ( $c=0$ ) dynamiczna odpowiedź układu ma postać:

$$w^P(\xi, T) = w_A^P(\xi, T) + w_S^P(\xi, T) = 2P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi T \sin n\pi \xi}{(n\pi)^2 [(n\pi)^2 - \sigma^2]} - 2P_0 \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(n\pi)^2}{\sigma} T \sin n\pi \xi}{(n\pi)^3 [(n\pi)^2 - \sigma^2]}. \quad (13)$$

Jeżeli spełniona jest równość  $\sigma = vL \sqrt{\frac{m}{EI}} = \mu\lambda = \pi$  szeregi w rozwiązaniu (13) zbieżają do nieskończoności. Stąd prędkość rezonansowa  $v_{cr}$  jest równa:

$$v_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{\pi}{\lambda} v_g. \quad (14)$$

Dla większości belek  $\lambda \gg \pi$ , stąd dla tych przypadków  $v_{cr} < v_g$ .

Funkcja  $w_A^P(\xi, T)$  podana w wyrażeniach (11) i (13) opisuje drgania i aperiodyczne i spełnia niejednorodne równanie różniczkowe (4), nie spełnia jednak warunków początkowych ruchu (6). Funkcja  $w_S^P(\xi, T)$  opisuje drgania swobodne belki i jest rozwiązaniem jednorodnego równania różniczkowego (4) przy  $P_0 = 0$  i wraz z funkcją opisującą drgania aperiodyczne spełnia warunki początkowe (6).

### 3. Drgania belki wywołane siłą skupioną

W kolejnym etapie rozważmy drgania belki wywołane siłą  $X(T)$  skupioną w punkcie  $\xi$ . Posługując się zmiennymi bezwymiarowymi (3) i postępując ana-

logicznie jak w przypadku siły ruchomej uzyskuje się rozwiązanie w postaci splotu

$$w^X(\xi, T) = \frac{L}{v} \int_0^T h_i(\xi, T - \tau) X(\tau) d\tau, \quad (15)$$

gdzie impulsowa funkcja przejścia  $h_i(\xi, T)$  jest równa

$$h_i(\xi, T) = \frac{2vL^2}{\sigma^2 EI} e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_n T \sin n \pi \xi_i \sin n \pi \xi}{\Omega_n}, \quad (16)$$

a w przypadku drgań nietłumionych ( $\alpha = 0$ ) odpowiednio

$$\begin{aligned} h_i(\xi, T) &= \frac{2vL^2}{\sigma EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(n\pi)^2}{\sigma} T \sin n \pi \xi_i \sin n \pi \xi}{(n\pi)^2} = \\ &= \frac{2vL^2}{\sigma^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n T \sin n \pi \xi_i \sin n \pi \xi}{\omega_n}. \end{aligned} \quad (17)$$

Impulsowa funkcja przejścia  $h_i(\xi, T)$  została uzyskana z równania

$$h_i^{IV}(\xi, T) + c_0 \dot{h}_i(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{h}_i(\xi, T) = \frac{vL^2}{EI} \delta(T) \delta(\xi - \xi_i). \quad (18)$$

Przedstawione powyżej rozwiązania dla belki swobodnie podpartej obciążonej siłą ruchomą i siłą skupioną w punkcie zostaną wykorzystane do rozwiązania zagadnienia drgań belki wieloprzęsłowej.

#### 4. Drgania belki wieloprzęsłowej – równania całkowe Volterry

Jako podstawowy schemat dynamiczny przyjęto statycznie wyznaczalną belkę swobodnie podpartą obciążoną siłą ruchomą i  $k$  siłami nadliczbowymi  $X_i(T)$  ( $i=1, \dots, k$ ) przyłożonymi w miejscach podpór pośrednich (rys.3). Ugięcia statycznie wyznaczalnej belki w miejscu podpór pośrednich w belce statycznie niewyznaczalnej wywołane wyżej wymienionymi siłami są równe 0. Na tej podstawie uzyskano układ  $k$  równań całkowych Volterry pierwszego rodzaju

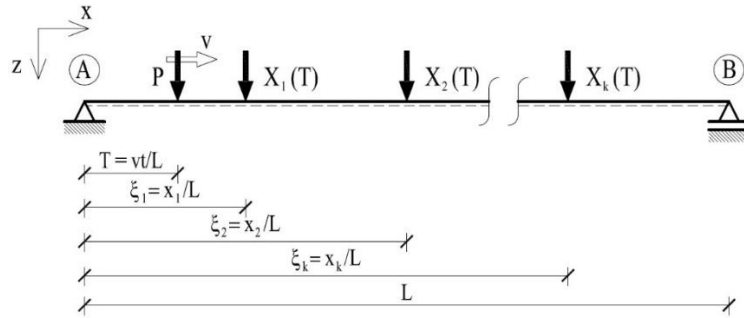
$$\frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T \delta_{ij}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + \Delta_{iP}(T) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (19)$$

gdzie  $\delta_{ij}(T)$  i  $\Delta_{iP}(T)$  oznaczają odpowiednio przemieszczenie pionowe belki swobodnie podpartej w punkcie  $\xi_i$  spowodowane siłą skupioną  $X_j$  oraz siłą ruchomą. Funkcje te są równe

$$\delta_{ij}(T) = h_j(\xi_i, T), \quad (20)$$

$$\Delta_{iP}(T) = w_A^P(\xi_i, T) + w_S^P(\xi_i, T), \quad (21)$$

gdzie impulsowa funkcja przejścia  $\delta_{ij}(T) = h_j(\xi_i, T)$  jest podana w równaniach (16) lub (17), a funkcja  $\Delta_{iP}(T) = w_A^P(\xi_i, T) + w_S^P(\xi_i, T)$  jest określona równaniami (10) - (12) lub (13). Współrzędne  $\xi_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) określają położenie podpór pośrednich belki wieloprzęsłowej.



Rys. 3. Schemat podstawowy

Fig. 3. Primary structure

Dla porównania rozwiązanie statyczne ma postać

$$\delta_{ij} = \frac{2L^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi_i \sin n\pi\xi_j}{(n\pi)^4}, \quad \Delta_{iP}(T) = \frac{2PL^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi T \sin n\pi\xi_i}{(n\pi)^4}, \quad (22)$$

a układ równań całkowych (15) jest zastąpiony układem równań algebraicznych

$$\sum_{j=1}^k \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP}(T) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (23)$$

Po rozwiązaniu równań całkowych Voltery dynamiczna odpowiedź belki wieloprzęsłowej obciążonej siłą ruchomą jest uzyskana jako rozwiązanie dla belki swobodnie podpartej i ma postać

$$w_d(\xi, T) = w_A^P(\xi, T) + w_S^P(\xi, T) + \frac{L}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T \delta_{ij}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Ugięcie statyczne belki wieloprzęsłowej wywołane siłą skupioną w punkcie  $T$  wynosi

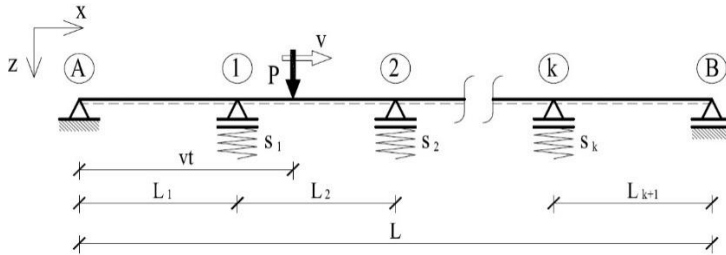
$$w_{st}(\xi, T) = \frac{2L^3}{EI} \left[ P \sin n\pi T + \sum_{i=1}^k X_i \sin n\pi\xi_i \right] \frac{\sin n\pi\xi}{(n\pi)^4} \quad (25)$$

Współczynnik dynamiczny może być zdefiniowany jako stosunek ugięcia dynamicznego do ugięcia statycznego

$$\vartheta(\xi, T) = \frac{w_d(\xi, T)}{w_{st}(\xi, T)} \quad (26)$$

Załóżmy, że podpory pośrednie belki wieloprzęsłowej są podporami sprężystymi o sztywności  $s_i$  (rys.4). W tym przypadku zamiast układu równań (19) mamy układ  $k$  równań całkowych Voltery drugiego rodzaju

$$\frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T \delta_{ij}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + \Delta_{iP}(T) = -\frac{X_j}{s_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (27)$$



Rys. 4. Belka wieloprzęsłowa na podporach sprężystych

Fig. 4. Multi-span continuous beam with elastic supports

#### 4.1. Procedura numeryczna

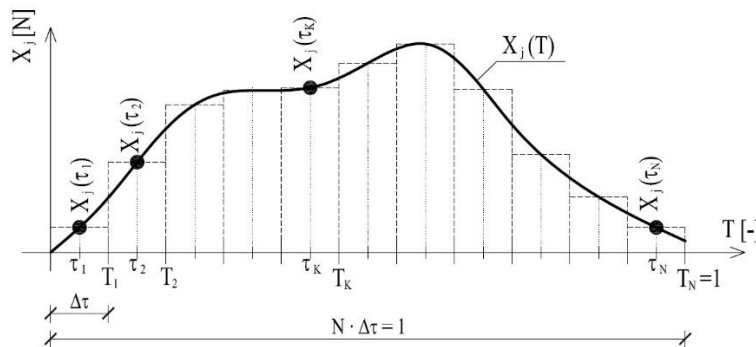
Układ równań całkowych Voltery (15) jest trudny do rozwiązania w sposób analityczny, dlatego też zostanie rozwiązany w sposób numeryczny zgodnie z rys. 5. Tym sposobem w miejsce układu równań całkowych uzyskujemy układ rekurencyjnych równań algebraicznych

$$\frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^K \delta_{ij}(T_K - \tau_r) X_j(\tau_r) \Delta\tau + \Delta_{iP}(T_K) = 0, \quad (28)$$

gdzie  $T_K = K\Delta\tau$ ,  $\tau_r = (r - 0,5)\Delta\tau$ ,  $r = 1, 2, \dots, K$ ,  $K = 1, 2, \dots, N$  oraz  $\Delta\tau = \frac{1}{N}$ .

Dla belki dwuprzęsłowej równanie (28) ma postać

$$\frac{L}{v} \sum_{r=1}^K h_i(\xi_i, T_K - \tau_r) X_j(\tau_r) \Delta\tau + \Delta_{iP}(T_K) = 0. \quad (29)$$



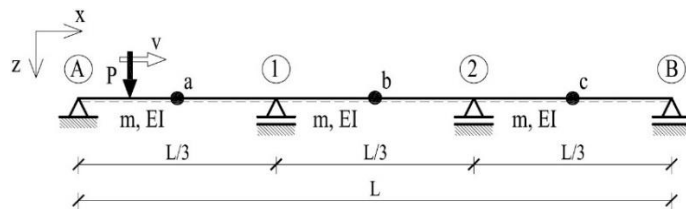
Rys. 5. Schemat obliczeń numerycznych

Fig. 5. Numerical calculations scheme



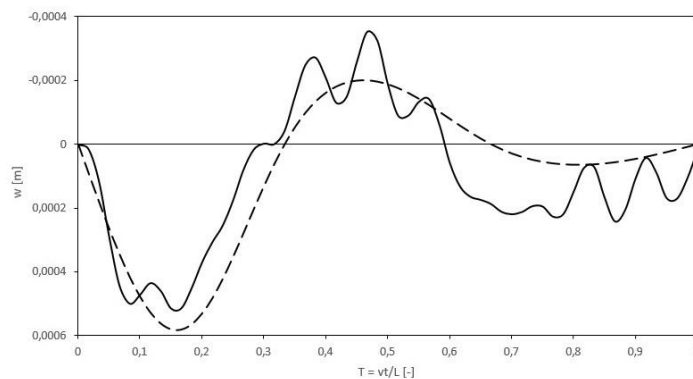
## 5. Przykład numeryczny

Jako przykład obliczeniowy posłuży belka trójprzęsłowa o rozpiętości między skrajnymi podporami  $L = 60$  m, z dwiema podporami pośrednimi dzielącymi belkę na trzy równe przęsła (rys.6). Do obliczeń przyjęto masę jednostkową przekroju belki  $m = 1000$  kg/m oraz sztywność giętą  $EI = 1,96$  GNm<sup>2</sup>. Ustrój obciążony jest stałą siłą skupioną  $P = 9,8$  kN poruszającą się ze stałą prędkością  $v = 37$  m/s. W obliczeniach analizowano drgania punktów „a”, „b” i „c” znajdujących się odpowiednio w środku lewego, środkowego i prawego przęsła w zależności od położenia siły poruszającej się wzdłuż belki (rys. 6). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7 do 9. Linia przerywaną zaznaczony przypadek statyczny ( $v = 0$ ).



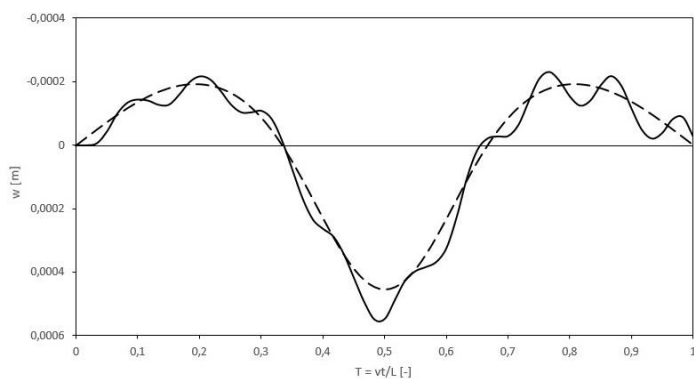
Rys. 6. Trójprzęsłowa belka pryzmatyczna obciążona siłą ruchomą

Fig. 6. Three-span continuous uniform beam loaded with moving force



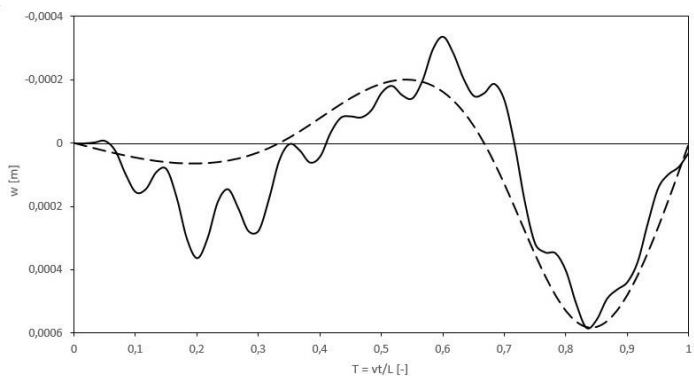
Rys. 7. Ugięcie dynamiczne punktu „a” (środek pierwszego przęsła)

Fig. 7. Dynamic deflection of point “a” (middle of the first span)



Rys. 8. Ugięcie dynamiczne punktu „b” (środek drugiego przęsła)

Fig. 8. Dynamic deflection of point “b” (middle of the first span)



Rys. 9. Ugięcie dynamiczne punktu „c” (środek trzeciego przęsła)

Fig. 9. Dynamic deflection of point “c” (middle of the third span)

## 6. Podsumowanie

Przedstawiona w pracy metoda wyznaczania drgań giętnych ciągłych belek wieloprzęsłowych polegająca na wykorzystaniu równań całkowych Volterry może być z powodzeniem zastosowana przy rozpatrywaniu belek pryzmatycznych o stałym przekroju i stałym rozkładzie masy we wszystkich przęsłach układu. Podano wzory zarówno dla drgań nietłumionych jak i drgań z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego. Po odpowiednich przekształceniach opisaną metodę można wykorzystać również w przypadku innych nieinercyjnych obciążeń ruchomych, takich jak ruchome obciążenie rozłożone, ruchomy moment skupiony lub ruchoma seria sił skupionych. Zastosowana procedura numeryczna prowadzi do zastąpienia równań całkowych równaniami algebraicznymi, co umożliwi przeprowadzenie dokładnych obliczeń przy zastosowaniu prostych arkuszy kalkulacyjnych.

## Literatura

- [1] Fryba L., *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, 1999, Telford, London.
- [2] Kączkowski Z., *Vibration of a beam under a moving load*. *Proceedings of Vibration Problems* 1963; 4 (4): 357-373.
- [3] Reipert Z., *Vibration of frames under moving load*. *Archiwum Inżynierii Lądowej* 1970; 16 (3): 419-447.
- [4] Johansson C., Pacoste C., Karoumi R., *Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads*, *Computers and Structures* 2013; 119: 85-94.
- [5] Salvo V.D., Muscolino G., Palmeri A., *A substructure approach tailored to the dynamic analysis of multi-span continuous beams under moving loads*, *Journal of Sound and Vibration* 2010; 329: 3101-3120.
- [6] Martinez-Castro A. E., Museros P., Castello-Linares A., *Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli–Euler beams traversed by moving loads*. *Journal of Sound and Vibration* 2006; 294: 278–97.
- [7] Dugush Y.A., Eisenberger M., *Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads*, *Journal of Sound and Vibration* 2002; 245: 911-926.
- [8] Henchi K., Fafard M., Dhatt G., Talbot M., *Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads*, *Journal of Sound and Vibration* 1997; 199: 33–50.
- [9] Henchi K., Fafard M., Dhatt G., Talbot M., *Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads*, 1997; 199: 33-50.
- [10] Lee H.P., *Dynamic response of a beam with intermediate point constraints subject to a moving load*, *Journal of Sound and Vibration* 1994; 171: 361–8.
- [11] Hayashikawa T., Watanabe N., *Dynamic behavior of continuous beams with moving load*, *Journal of Engineering Mechanics Division* 1981; 107: 229–46.

## VIBRATIONS OF MULTI-SPAN CONTINUOUS BEAMS UNDER MOVING FORCE

### Summary

In this paper authors consider damped and undamped vibrations of multi-span continuous beams, uniform in every span, subjected to a moving constant force. Presented solution is analogous to the static force method, with simply supported beam applied as a primary structure. Instead of set of algebraic force method equations a set of Volterra integral equations is given. A numerical example of three-span beam is presented.

**Keywords:** multi-span beam, moving force, Volterra integral equation

DOI:10.7862/rb.2014.40

*Przesłano do redakcji: 28.04.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



Marcin TEKIELI<sup>1</sup>  
Łukasz MICHALSKI<sup>2</sup>

## BADANIA DYNAMICZNE OBIEKTÓW MOSTOWYCH NIEPODLEGAJĄCYCH OBCIĄŻENIOM PRÓBNYM W KONTEKŚCIE MONITORINGU STANU KONSTRUKCJI

W artykule przeanalizowano zasadność przeprowadzania badań obiektów mostowych, które zgodnie z obowiązującym prawem nie podlegają procedurze próbnych obciążeń dopuszczających obiekt do eksploatacji (długość przęsła nie przekracza 20m)[3]. Analiza polegała na porównaniu wyników badań statycznych i dynamicznych dla dwóch obiektów mostowych. Wyniki uzyskane w trakcie badań polowych porównano również z wynikami otrzymanymi z wykorzystaniem modeli numerycznych konstrukcji. Wskazano istotne rozbieżności dla rzeczywistych i otrzymanych z modelu wyników dla jednego z obiektów. Przedstawiono możliwe przyczyny pojawienia się rozbieżności i zaproponowano wykorzystanie badań dynamicznych jako elementu systemu do oceny i monitoringu stanu obiektu mostowego.

**Słowa kluczowe:** dynamika konstrukcji, obiekty mostowe, symulacja, obciążenia próbne, monitoring stanu konstrukcji (SHM), wykrywanie uszkodzeń konstrukcji

### 1. Wprowadzenie

Obiekty mostowe należą do grupy konstrukcji, których głównym przeznaczeniem jest funkcja komunikacyjna. Podnoszą jakość transportu przynosząc tym samym wymierne korzyści społeczne. Stanowią często strategiczne znaczenie dla gospodarki. Należą do grupy odpowiedzialnych obiektów budowlanych, które powinny spełniać wygórowane kryteria bezpieczeństwa.

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Marcin Tekieli, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, tel. (12) 628 29 24, e-mail: mtekieli@15.pk.edu.pl

<sup>2</sup> Łukasz Michalski, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, e-mail: lukaszmicchalskins@o2.pl

Przyjmowane na etapie projektowania założenia upraszczające modelowanie obiektów mostowych, tylko w pewnym stopniu odzwierciedlają ich pracę w warunkach eksploatacyjnych. Geometria konstrukcji, właściwości materiałowe, jak i oddziaływania są jedynie próbą opisanie rzeczywistej pracy obiektu. Potwierdzeniem tego są awarie, a co gorsza katastrofy budowlane, które pomimo gwałtownego rozwoju technik obliczeniowych wciąż jeszcze występują. W związku z powyższym coraz częściej na świecie wyposaża się obiekty mostowe (szczególnie o większych rozpiętościach) w systemy SHM – monitoringu stanu technicznego konstrukcji – mające na celu pozyskiwanie istotnych informacji dotyczących głównie parametrów stanu konstrukcji oraz nasilania oddziaływań środowiskowych, na bazie których identyfikowane są stany ostrzegawcze i alarmowe.

Pod pojęciem SHM (ang. SHM – Structural Health Monitoring) należy rozumieć system monitorowania stanu technicznego konstrukcji, którego ideą jest wdrożenie strategii identyfikacji uszkodzenia w obiektach budowlanych. Uszkodzenie definiowane jest przez zmianę właściwości materiałowych lub geometrycznych układu konstrukcji, a także przez zmianę w strukturze i warunkach brzegowych układu. Uszkodzenia te wpływają na obecny albo przyszły stan techniczny konstrukcji. Proces identyfikacji uszkodzenia odbywa się zazwyczaj w czterech następujących po sobie etapach:

- detekcja uszkodzenia – etap, w którym wykrywana jest obecność uszkodzenia,
- lokalizacja uszkodzenia – etap, w którym podawane jest miejsce uszkodzenia,
- typizacja uszkodzenia – etap, w którym podawany jest rodzaj uszkodzenia,
- zakres uszkodzenia – etap, w którym następuje ocena wpływu uszkodzenia na konstrukcję [1, 2].

Istotną grupą obiektów mostowych, które powinny podlegać podstawowej formie kontroli ich stanu oraz monitoringowi w trakcie eksploatacji są obiekty, których długość nie przekracza 20 m. Obiekty takie - zgodnie z obowiązującym prawem, nie podlegają procedurze obciążeń próbnych przed dopuszczeniem ich do eksploatacji [3, 4, 5]. W związku z tym, istnieje uzasadnione przypuszczenie, że niektóre z takich obiektów mogą nie spełniać założeń postawionych na etapie projektowania. Spowodowane może to być wykorzystaniem przez wykonawcę materiałów o jakości niższej od założonej przez projektanta lub brakiem staranności podczas prac wykonawczych. Tego typu działania skutkują w większości przypadków nieodpowiednim zachowaniem się obiektu pod wpływem standardowych obciążeń występujących w trakcie jego eksploatacji, a to z kolei w prosty sposób może prowadzić do istotnego skrócenia żywotności takiego obiektu, a w skrajnych przypadkach może też zwiększać prawdopodobieństwo pojawienia się uszkodzeń zagrażających bezpieczeństwu użytkowania obiektu.

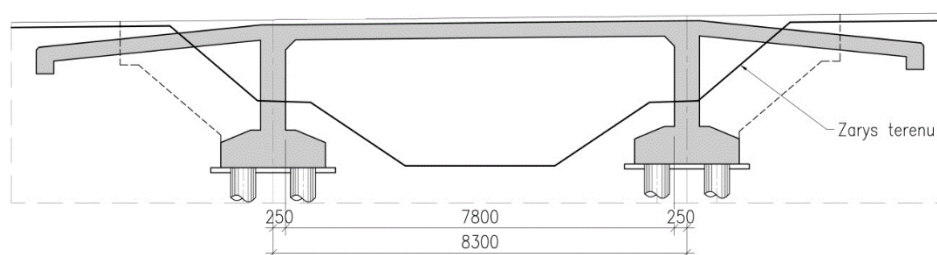
W dalszej części artykułu przedstawiono analizę odpowiedzi dwóch obiektów mostowych podczas obciążeniowych badań statycznych i dynamicznych. Otrzymane podczas rzeczywistych testów wyniki porównano z wynikami otrzymanymi z wykorzystaniem modeli numerycznych. Zauważono i wskazano istotne rozbieżności w przeanalizowanych wynikach oraz zaproponowano wykorzystanie badań dynamicznych konstrukcji mostowej do detekcji i wstępnej lokalizacji uszkodzenia w ramach dwóch pierwszych etapów identyfikacji uszkodzenia.

## 2. Opis badanych obiektów mostowych

W ramach jednego z prowadzonych przez Politechnikę Krakowską im. Tadeusza Kościuszki projektów wykonano badania na dwóch obiektach mostowych zlokalizowanych na terenie województwa małopolskiego w miejscowościach Libertów i Bodzanów.

### 2.1. Geometria badanych obiektów

Analizowany most w miejscowości Libertów, którego przekrój podłużny przedstawiono na rys. 1 jest budowlą o charakterze komunikacyjnym przeprowadzającym ruch samochodowy nad ciekim wodnym. Obiekt został zaprojektowany na klasę obciążenia taborem samochodowym „A” według normy PN-85/S-10030. Obiekty mostowe. Obciążenia. Konstrukcja mostu, to dwa układy ramowe, zintegrowane ze ścianami przednimi i skrzydłami przyczółków. Ustrój nośny to płyta żelbetowa, z monolitycznymi gzymsami, o grubości 30 cm z betonu B30 i zbrojona stalą BSt500 [6].

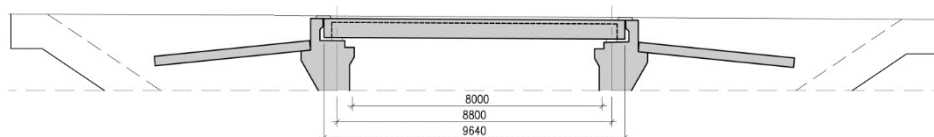


Rys. 1. Przekrój podłużny obiektu mostowego w miejscowości Libertów (na podstawie [6])

Fig. 1. Longitudinal section of the bridge structure in Libertów (based on [6])

Obiekt w miejscowości Bodzanów, którego przekrój podłużny przedstawiono na rys. 2, to wiadukt o charakterze komunikacyjnym przeprowadzający ruch samochodowy nad drogą lokalną. Konstrukcja wiaduktu to prefabrykowane belki typu Kujan w schemacie belki swobodnie podpartej wykonane z betonu B35. W przekroju poprzecznym występuje 21 belek, które zespolone są betonem „in-situ” klasy B30, Pracę poprzeczną zapewnia beton „in-situ” między belkami

oraz płyta o grubości 12 cm. Konstrukcja zbrojona jest prętami przepuszczonymi przez otwory w środnikach belek i dodatkowym zbrojeniem płyty i stref wspornikowych [7].



Rys. 2. Przekrój podłużny obiektu mostowego w miejscowości Bodzanów (na podstawie [7])

Fig. 2. Longitudinal section of the bridge structure in Bodzanów (based on [7])

## 2.2. Modele numeryczne badanych obiektów

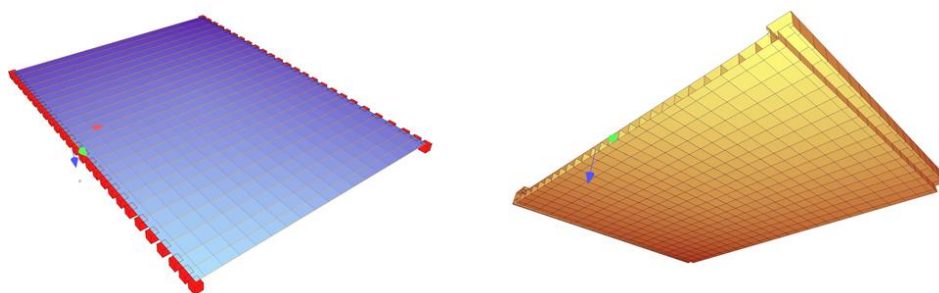
Analizę przeprowadzono przez zamodelowanie konstrukcji mostu z podziałem na elementy o określonych sztywnościach, parametrach geometrycznych odpowiadających rzeczywistym elementom konstrukcji w oparciu o dokumentację [6, 7]. Do obliczeń badanych konstrukcji wykonano przestrzenne, numeryczne modele obliczeniowe z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) w środowisku obliczeniowym Sofistik v. 2012. Obie konstrukcje przybliżono modelami klasy e1+e2, p3, w których główny układ nośny został zbudowany w postaci rusztu, na którym rozpostarto elementy służące do rozkładu obciążeń. Siatka węzłów została zbudowana środkowej powierzchni płyty w celu odwzorowania rzeczywistego kształtu poprzecznego i lokalnego obrotu belek względem osi pionowej. Położenie dźwigarów, belek poprzecznych oraz płyty różnicowano za pomocą mimośrodków (offsetów). Płyty pomostowe wygenerowano za pomocą czterowęzłowych elementów powłokowych o zredukowanej sztywności, które służą do rozkładu obciążeń na belki. W przekroju poprzecznym ustrój konstrukcyjny obiektu w miejscowości Libertów został podzielony na 26 belek, a ustrój konstrukcyjny obiektu w miejscowości Bodzanów na 21 belek. Analogicznie, ustrój konstrukcyjny w przekroju podłużnym podzielono na 17 i 23 belki. Dla modelu obiektu w miejscowości Libertów przyjęto sztywność przekrojów tak, jakby były wykonane z betonu B30, a w przypadku obiektu w miejscowości Bodzanów odpowiednio z betonu B35. W obu przypadkach były to elementy nieważkie (bez założonej masy). Charakterystyki geometryczne przekrojów elementów belkowych zostały obliczone w programie do obliczeń statycznych.

W tak przygotowanym modelu obliczono wartości sił wewnętrznych i ugięć od obciążeń normowych dla klasy obciążenia taborem samochodowym „A” według normy [4] – odpowiadającej faktycznej klasie obciążenia, na jaką został zaprojektowany obiekt. Analizy dokonano dla najbardziej niekorzystnego układu schematów obciążeń wywołującego ekstremalne wartości sił wewnętrznych w konstrukcji nośnej mostu. Obciążenie pojazdem K zamodelowano jako jeden przejazd zrealizowany zgodnie z normą [4]. W kombinacji z nimi uwzględniono

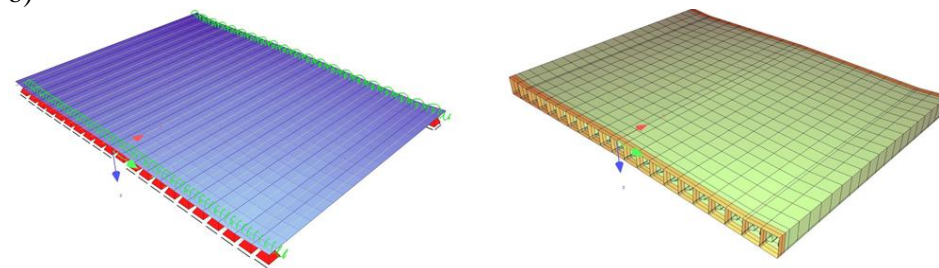


obciążenie taborem  $q$ . Wybrano ustawienia obciążenia wywołujące największe wartości sił wewnętrznych.

a)



b)



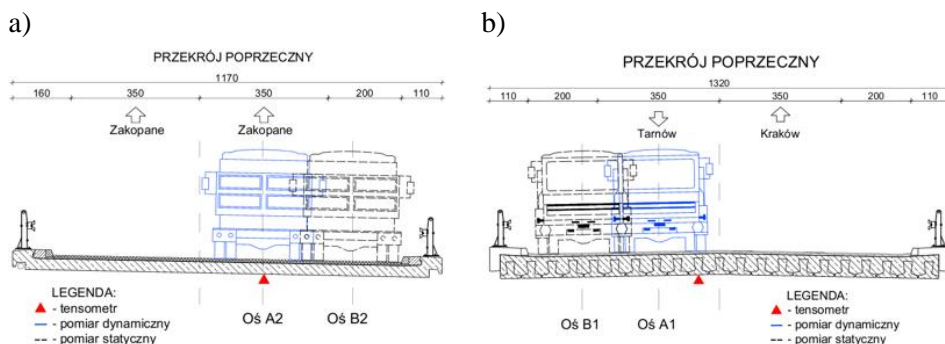
Rys. 3. Model numeryczny wraz z jego wizualizacją dla obiektu w miejscowości Libertów (a) oraz Bodzanów (b)

Fig. 3. Numerical model with visualization of bridge structure in Libertów (a) and Bodzanów (b)

### 3. Opis badań polowych

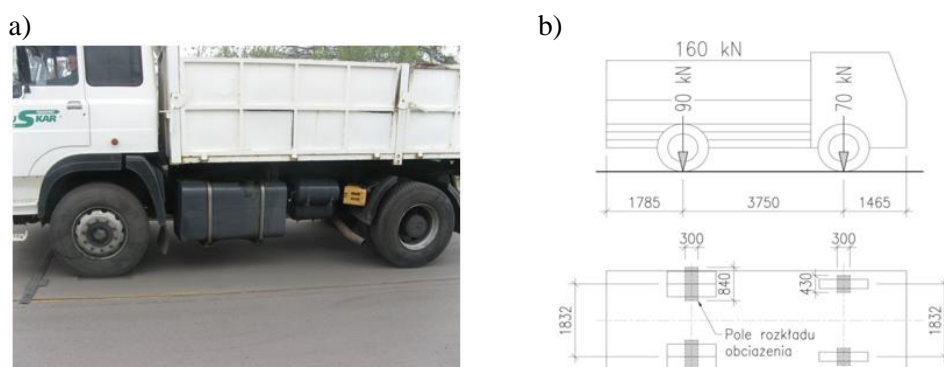
Przeprowadzone badania polowe polegały na pomiarze zmiany odkształcenia w wybranych punktach ustroju nośnego, spowodowanej kontrolowanymi przejazdami oraz postojem pojazdu testowego. Do pomiaru odkształcenia wykorzystano przetworniki elektrooporowe. Częstotliwość próbkowania wynosiła 1000Hz. Na rysunkach 4 a) i 1 b) przedstawiono rozmieszczenie tensometrów na przedmiotowych obiektach mostowych (tensometr w przekroju podłużnym zlokalizowano w środku rozpiętości przęsła) oraz położenie pojazdu w dwóch osiach pomiarowych.

Pod nazwą pojazdu testowego należy rozumieć samochód ciężarowy dwuosiowy o znanej masie. Firma transportowa, która była odpowiedzialna za dostarczenie pojazdu do badań, jest w posiadaniu certyfikowanej wagi samochodowej. Na rys. 5 przedstawiono procedurę związaną z ważeniem pojazdu i uzyskane wyniki.



Rys. 4. Rozmieszczenie czujników tensometrycznych oraz położenie pojazdu testowego na obiekcie w miejscowości Libertów (a) oraz Bodzanów (b)

Fig. 4. Location of strain gauges and position of the vehicle on the tested object in Libertów (a) and Bodzanów (b)



Rys. 5. Pomiar masy pojazdu (a) oraz przyjęty układ obciążenia (b)

Fig. 5. Measurements of the test vehicle weight (a) and load system (b)

W ramach badań przeprowadzono zarówno pomiary statyczne, jak i dynamiczne. Osie A1 i A2 stanowiły osie pomiaru dynamicznego, natomiast osie B1 i B2 pomiaru statycznego. W przypadku pomiaru dynamicznego wykonane zostały trzy przejazdy testowe opisanym wyżej pojazdem z prędkością 40 km/h, 60 km/h oraz 80 km/h. Pomiar statyczny odbył się poprzez ustawienie samochodu na pasie awaryjnym jak najbliżej krawężnika. W przekroju podłużnym środek rozstawu osi pojazdu pokrył się ze środkiem rozpiętości oprzyrządowanych przęseł obu badanych obiektów mostowych.

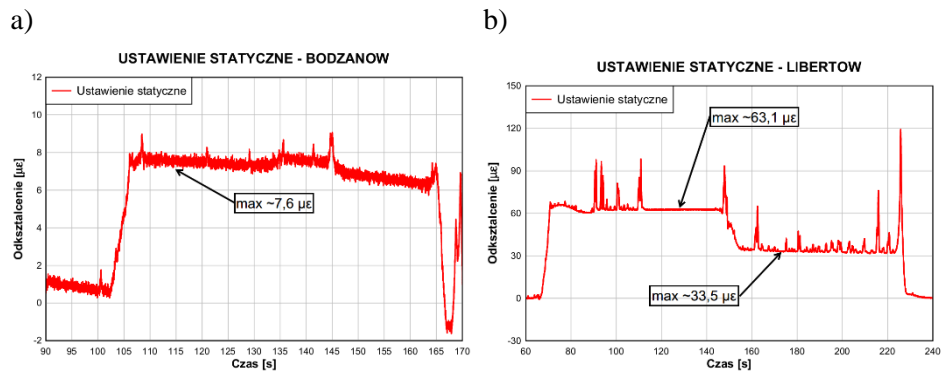
#### 4. Porównanie wyników badań i symulacji numerycznych

W celu porównania danych uzyskanych z badań polowych z symulacjami numerycznymi założono sześć najbardziej reprezentatywnych schematów usta-

wienia pojazdu testowego wzdłuż obiektu mostowego: schemat a) przednia oś w 1/4 przęsła, b) przednia oś w 1/2 przęsła, c) tylna oś w 1/4 przęsła, d) przednia oś w 3/4 przęsła, e) tylna oś w 1/2 przęsła, f) tylna oś w 3/4 przęsła.

#### 4.1. Wyniki badań statycznych i dynamicznych

Dla obu badanych obiektów mostowych wykonano podczas badań polowych pomiar odkształcenia przęsła dla 9 przejazdów kontrolnych (3x40km/h, 3x60km/h, 3x80km/h) oraz dla ustawienia pojazdu na pasie awaryjnym. Na rys. 6 przedstawiono wyniki z pomiaru statycznego, a na rys. 7 z pomiarów dynamicznych dla badanych obiektów.



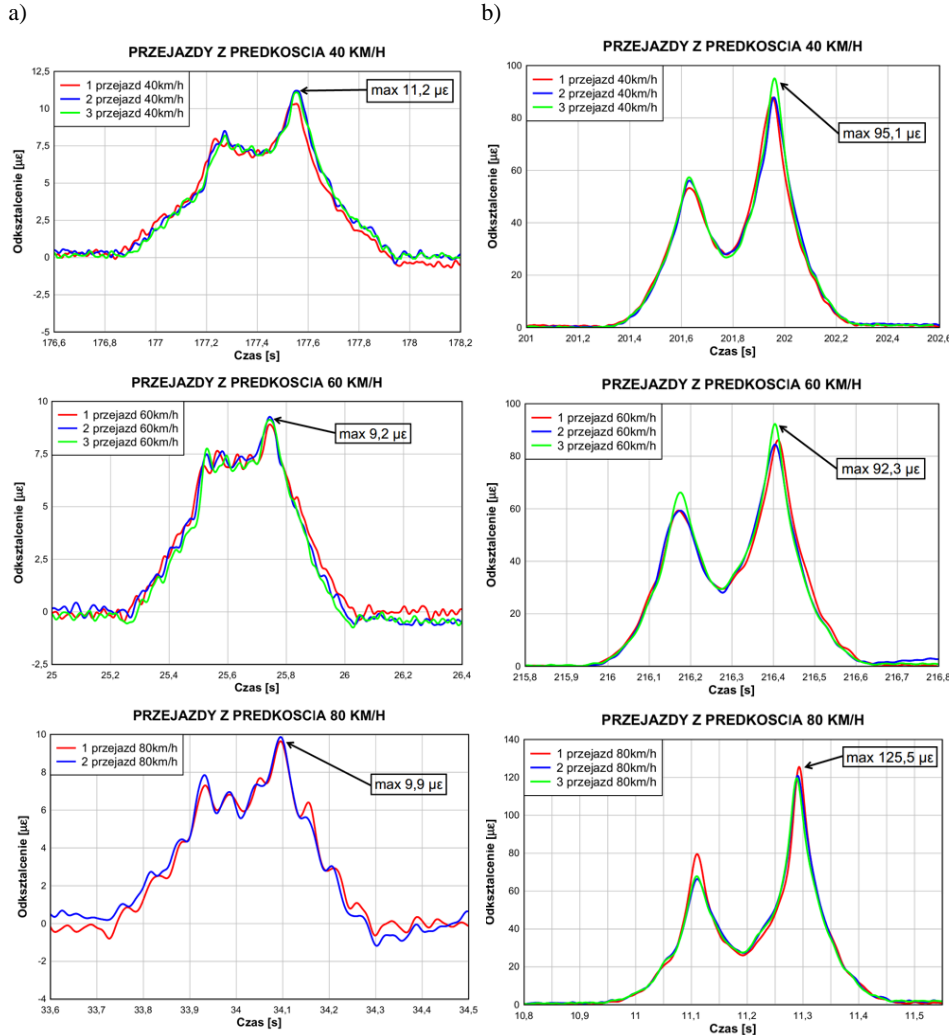
Rys. 6. Wyniki pomiaru statycznego dla obiektu w miejscowości Bodzanów (a) i Libertów (b)

Fig. 6. Results of static load test in Bodzanów (a) and Libertów (b)

#### 4.2. Analiza wyników dla obiektu w miejscowości Bodzanów

Na rys. 8 przedstawiono dane z analizy numerycznej korespondujące z pomiarem statycznym, a na rys. 9 dane korespondujące z pomiarem dynamicznym dla modelu obiektu w miejscowości Bodzanów.

Porównując ze sobą pomiar statyczny i odpowiadające mu symulacje numeryczne można zauważyć, iż z badań otrzymano odkształcenie przęsła mostowego o wartości 7,6  $\mu\epsilon$ , a z modelu MES 9,2  $\mu\epsilon$ . Analogiczne porównanie pomiaru dynamicznego z rozwiązaniem numerycznym wskazuje, iż wyniki z badań, tj. maksymalne odkształcenie konstrukcji obiektu o wartości 11,2  $\mu\epsilon$  dla prędkości 40km/h, nie przekracza maksymalnego odkształcenia dla schematu e) tj. 13,3  $\mu\epsilon$ .



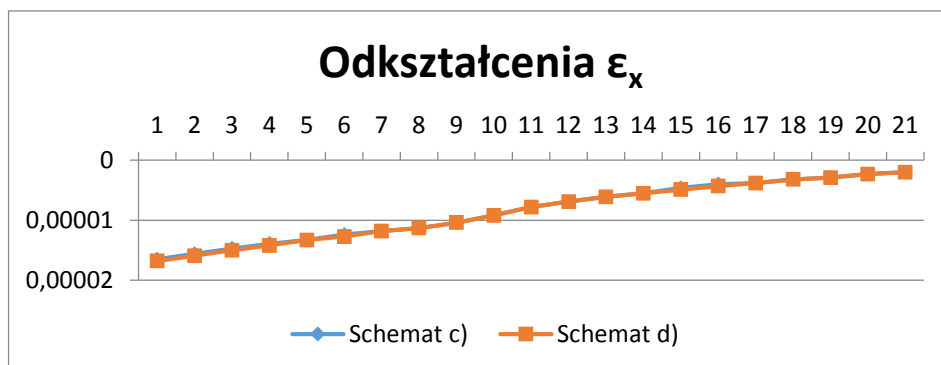
Rys. 7. Wyniki pomiaru dynamicznego dla obiektu w miejscowości Bodzanów (a) i Libertów (b)

Fig. 7. Results of dynamic load tests in Bodzanów (a) and Libertów (b)

### 4.3. Analiza wyników dla obiektu w miejscowości Libertów

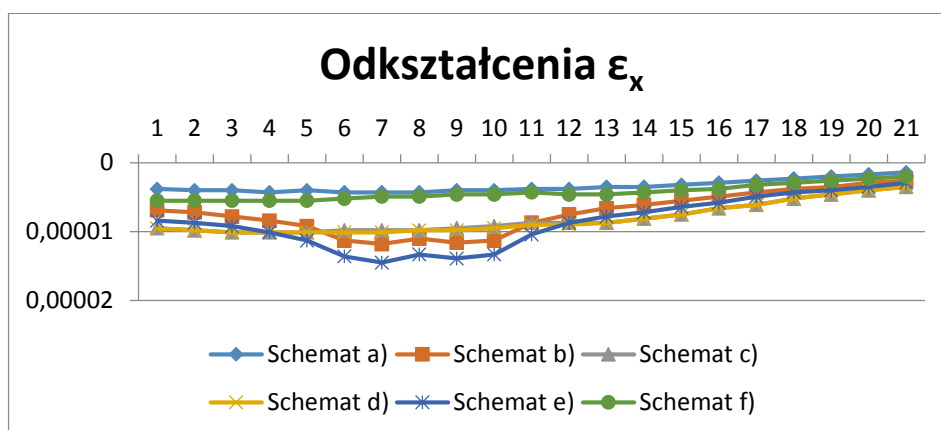
Na rys. 10 przedstawiono dane z analizy numerycznej korespondujące z pomiarem statycznym, a na rys. 11 dane korespondujące z pomiarem dynamicznym dla modelu obiektu w miejscowości Libertów.

W tym przypadku, porównując ze sobą pomiar statyczny i odpowiadające mu symulacje numeryczne można zauważyć, iż z badań otrzymano odkształcenie przęsła mostowego o wartości 33,5  $\mu\epsilon$ , a z modelu MES 9,5  $\mu\epsilon$  (schemat c) i 9,8  $\mu\epsilon$  (schemat d) co stanowi ponad trzykrotną różnicę. Analogiczne



Rys. 8. Wyniki ze statycznej analizy numerycznej, rozkład odkształceń dla osi B1 w środku rozpiętości przęsła dla obiektu w miejscowości Bodzanów

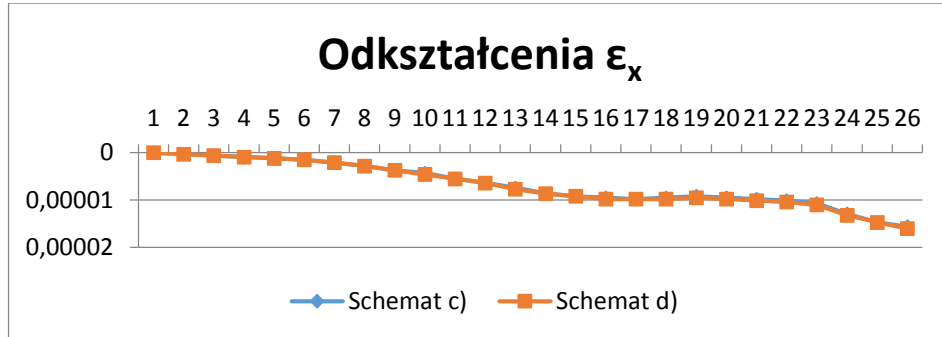
Fig. 8. Results of static numerical analysis, the strain distribution for the B1 axle in center of the bridge span in Bodzanów



Rys. 9. Wyniki z dynamicznej analizy numerycznej, rozkład odkształceń dla osi A1 w środku rozpiętości przęsła dla obiektu w miejscowości Bodzanów

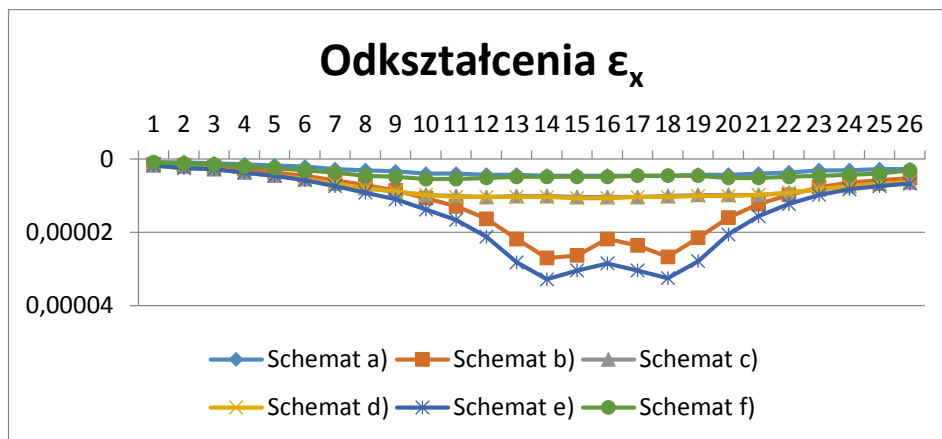
Fig. 9. Results of dynamic numerical analysis, the strain distribution for the A1 axle in center of the bridge span in Bodzanów

porównanie pomiaru dynamicznego z rozwiązaniem numerycznym wskazuje, iż wyniki z badań, tj. maksymalne odkształcenie konstrukcji obiektu o wartości 125,5  $\mu\epsilon$  dla prędkości 80km/h przekracza ponad czterokrotnie odkształcenie dla schematu e) tj. 28,5  $\mu\epsilon$ .



Rys. 10. Wyniki ze statycznej analizy numerycznej, rozkład odkształceń dla osi B1 w środku rozpiętości przęsła dla obiektu w miejscowości Libertów

Fig. 10. Results of static numerical analysis, the strain distribution for the B1 axle in center of the bridge span in Libertów



Rys. 11. Wyniki z dynamicznej analizy numerycznej, rozkład odkształceń dla osi A1 w środku rozpiętości przęsła dla obiektu w miejscowości Libertów

Fig. 11. Results of dynamic numerical analysis, the strain distribution for the A1 axle in the center of the bridge span in Libertów

## 5. Podsumowanie i wnioski

W artykule opisano i przeanalizowano procedurę obciążeń testowych (statycznych i dynamicznych) dla dwóch obiektów mostowych, które przed oddaniem ich do eksploatacji nie zostały poddane obciążeniom próbnym. Wyniki uzyskane podczas badań polowych porównano z wynikami analizy numerycznych odpowiednich modeli obu konstrukcji.

Dla obiektu mostowego w miejscowości Bodzanów wyniki z badań polowych w zadawalającym stopniu zgadzają się z danymi z symulacji numerycznych. Atestowane prefabrykowane dźwigary mostowe typu Kujan posiadają od-

powiedni moduł sprężystości i są wykonane zgodnie ze sztuką inżynierską. Dla drugiego obiektu wyniki z badań polowych w znacznym stopniu odbiegają od danych z symulacji numerycznych. Dla pomiaru statycznego różnica jest ponad trzykrotna, a dla pomiaru dynamicznego ponad czterokrotna (na niekorzyść badań).

Prawdopodobna przyczyna tych różnic może tkwić w jakości zastosowanych materiałów – betonu i/lub stali. Moduł sprężystości zastosowanego betonu jest wyraźnie niższy od projektowanego. Mniejsza może być również ilość stali użytej do zbrojenia elementów obiektu w stosunku do ilości założonej przez projektanta. Ponadto należy zauważyć, iż analizowany obiekt jest stosunkowo nowy (2003 r.). W zaistniałej sytuacji, przyczyn zaobserwowanego zachowania się obiektu nie należy rozpatrywać w kontekście zjawisk reologicznych. Warto też zauważyć, że dla obiektu płytowego występuje znaczny wpływ efektów dynamicznych w porównaniu do obiektu belkowego sprężonego.

Przedmiotowe obiekty są konstrukcjami mostowymi, które nie podlegają próbnym badaniom obciążeniowym. Instalacja nawet szczątkowego systemu SHM, może pomóc w wyrugowaniu z rynku nierzetelnych i nieuczciwych wykonawców. Monitoring tego typu konstrukcji chociażby w podstawowym zakresie pozwala też lepiej zrozumieć wpływ efektów dynamicznych, przez co może dostarczyć istotnych informacji do normatywów projektowych. W obecnej normie mostowej wartość współczynnika dynamicznego nie przekracza 1,325 [4, 5]. Jak pokazała analiza przedstawiona w niniejszym artykule, w niektórych przypadkach nie koresponduje z rzeczywistą pracą obiektu mostowego.

## Literatura

- [1] Wenzel H.: Health Monitoring for Bridges, Vienna, Austria, Wiley, 2009.
- [2] Boller C., Chang FK., Fujino Y.: Encyclopedia of Structural Health Monitoring, Wiley, 2009.
- [3] Rozporządzenia Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej z dnia 30 maja 2000 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać drogowe obiekty inżynierskie i ich usytuowanie. (Dz. U. z dnia 3 sierpnia 2000 r.).
- [4] PN-85/S-10030 Obiekty mostowe. Obciążenia.
- [5] PN-S-10040:1999 Obiekty mostowe. Konstrukcje betonowe żelbetowe i sprężone. Wymagania i badania.
- [6] Projekt Wykonawczy. Przebudowa przepustu w km 674+504 w ciągu drogi krajowej nr 7 Gdańsk – Chyżne w miejscowości Libertów. Biuro Projektowo-Badawcze Promost, Wrocław, 2003.
- [7] Projekt Wykonawczy. Przebudowa wiaduktu km 443+050.39 drogi krajowej nr 4 wraz budową dróg dojazdowych i murów oporowych w rejonie obiektu. Transprojekt – Kraków Sp. z o. o., Kraków, 2004.

## **DYNAMIC LOAD TESTS OF SHORT BRIDGE STRUCTURES AS A PART OF STRUCTURAL HEALTH MONITORING SYSTEM**

### **S u m m a r y**

In Poland, in accordance with the law, it is not necessary to make load test for short bridge structures (if the span length is less than 20 meters). The analysis was based on a comparison of the results of static and dynamic tests for the two short bridge structures. The results obtained during the field trials was also compared with the results obtained from numerical models of both structures. Significant differences between these two type of results for one of the tested structure were identified. Possible causes of mentioned discrepancies were presented and the use of dynamic tests as an element of a system for bridge structure health monitoring was proposed.

**Keywords:** dynamics of structures, bridge structures, simulation, load test, structural health monitoring (SHM), structural failures detection

DOI:10.7862/rb.2014.41

*Przesłano do redakcji: 08.06.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*



**Stanisław WOLNY<sup>1</sup>**  
**Sławomir BADURA<sup>2</sup>**

## **OCENA WPŁYWU OBCIĄŻEŃ EKSPLOATACYJNYCH NA STAN NAPRĘŻENIA W ELEMENTACH NOŚNYCH KONSTRUKCJI BASZTOWEJ WIEŻY SZYBOWEJ W ŚWIETLE PRZEPROWADZONYCH EKSPERYMENTÓW**

Wykorzystanie do analizy wytrzymałościowej konstrukcji wieży szybowej metody stanów granicznych wymagało określenie wielkości obliczeniowych tak obciążeń jak i wytrzymałości. Do określenia obliczeniowych wartości obciążenia, niezbędnym było wyznaczenie charakterystycznych wartości obciążeń elementów konstrukcyjnych wieży szybowej [1, 3, 4]. W celu potwierdzenia poprawności przeprowadzonych – w tym zakresie obliczeń – w oparciu o uzyskane rezultaty przeprowadzono numeryczną analizę naprężeń i odkształceń. Wyniki tych analiz zostały zweryfikowane pomiarami naprężeń (odkształceń) w najbardziej wyężonych obszarach konstrukcji, wytypowanych na podstawie mapy naprężeń stanowiącej wynik analizy numerycznej, co stanowi treść opracowania. Tensometryczne pomiary stanu odkształcenia (naprężenia) wykonano na belkach kondygnacji poziomu +65,00 m, na których posadowione są maszyny wyciągowe (łożyska wału napędowego, mocowania stojanów silników elektrycznych) co schematycznie pokazano na rys. 2. Przeprowadzono ponadto analizę wytrzymałościową (numeryczną), którą ograniczono do obszarów elementów nośnych kondygnacji (poziom +65,00) wieży szybowej, w której mierzono odkształcenia (naprężenia) oraz obciążeń, które wywołały maksymalne wartości zmienionych wartości naprężeń [4]. Wyniki dodatkowo wykonanej (numerycznej) analizy stanu naprężenia, ograniczonej do obszarów elementów nośnych konstrukcji basztowej wieży szybowej, w których stwierdzono maksymalne wyężenie materiału konstrukcji [4], w całej rozciągłości korespondują z wynikami eksperymentu przeprowadzonego na obiekcie rzeczywistym. Oznacza to, że wykonane (numeryczne) analizy stanu odkształcenia i naprężenia w elementach nośnych konstrukcji basztowych wież szybowych – aktualnie eksploatowanych w polskim górnictwie upoważniają do przyjęcia generalnego założenia, że w ramach analizy geometrii układu napędowego maszyn wyciągowych, konstrukcje na których posadowione są elementy tego układu można traktować ja-

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji/corresponding author: Stanisław Wolny, AGH University of Science and Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Robotics, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Poland, e-mail: stwolny@agh.edu.pl

<sup>2</sup> Sławomir Badura, AGH University of Science and Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Robotics, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Poland, e-mail: sbadura@agh.edu.pl

ko sztywne. Wniosek ten dodatkowo potwierdzają wyniki geodezyjnych pomiarów przemieszczeń wybranych punktów konstrukcji nośnej basztowej wieży szybowej. Wyniki te – co jest pewnego rodzaju ciekawostką – wskazują, że konstrukcja basztowej wieży szybowej, powyżej pierwszej kondygnacji, zachowuje się jak bryła sztywna.

**Słowa kluczowe:** wieża szybowa, stan naprężenia, obciążenia, pomiary tensometryczne

## 1. Wstęp

Wykorzystanie do analizy wytrzymałościowej konstrukcji wieży szybowej metody stanów granicznych, wymagało określenia wielkości obliczeniowych tak obciążeń jak i wytrzymałości. W tym celu niezbędnym było wyznaczenie charakterystycznych wartości obciążeń elementów konstrukcyjnych wieży szybowej [1, 3, 4] a ponadto przeprowadzenia analiz numerycznych w zakresie naprężeń i odkształceń. Wyniki tych analiz zostały zweryfikowane pomiarami naprężeń (odkształceń) w najbardziej wyciężonych obszarach konstrukcji, wytypowanych na podstawie mapy naprężeń stanowiącej wynik analizy numerycznej, co stanowi treść opracowania.

Wyniki analiz numerycznych w zakresie przemieszczeń, zostały zweryfikowane pomiarami poziomych przemieszczeń wybranych punktów konstrukcji wieży szybowej, podczas normalnego cyklu eksploatacji.

Wykonano również powtórny (numeryczny) analizę stanu naprężenia ograniczoną do obszarów elementów nośnych konstrukcji wieży szybowej, w których mierzono naprężenia (odkształcenia).

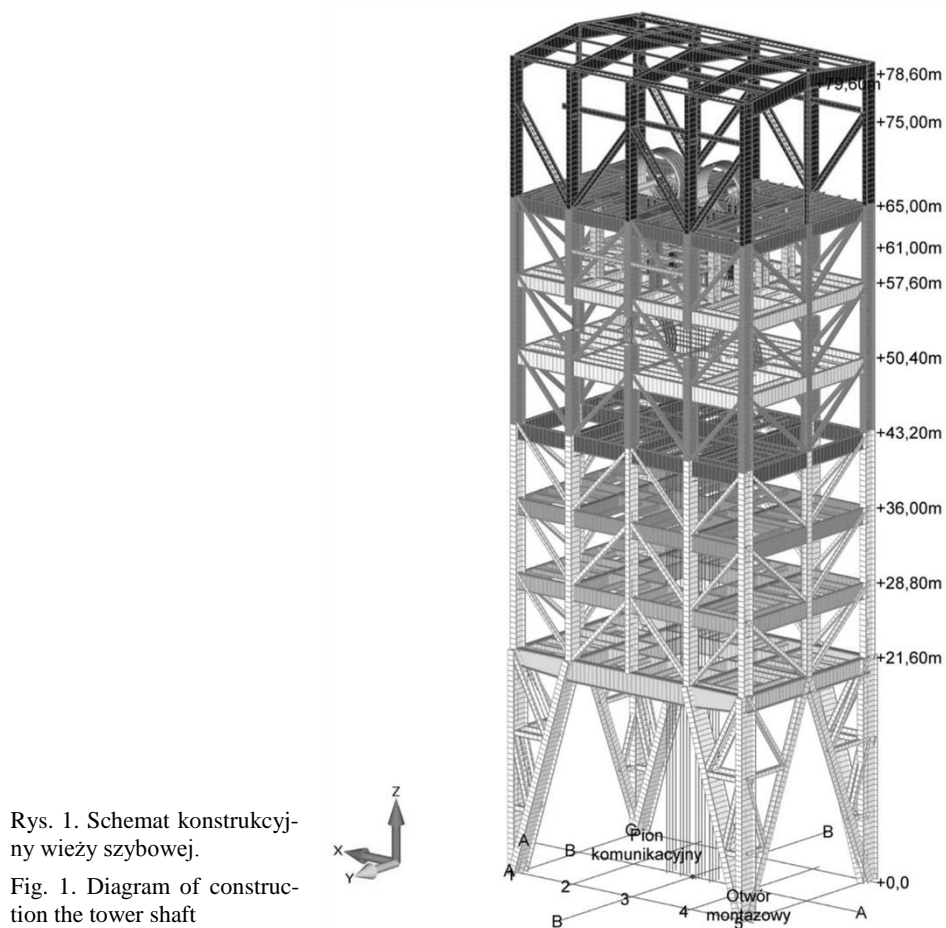
Wyniki przeprowadzonych analiz, pozwoliły na sformułowanie wniosków, dotyczących zachowania się elementów nośnych konstrukcji basztowej wieży szybowej, podczas normalnej eksploatacji wyciągu.

## 2. Pomiar naprężeń w elementach nośnych konstrukcji wieży szybowej

Uzyskane rezultaty analizy wytrzymałościowej (stan naprężenia) [4] w elementach nośnych konstrukcji wieży szybowej (rys. 1) zostały zweryfikowane pomiarami naprężeń (odkształceń) w najbardziej wyciężonych obszarach konstrukcji.

Odkształcenia (naprężenia) mierzono w punktach elementów nośnych konstrukcji wieży w których, bazując na wynikach numerycznej analizy wytrzymałościowej, stwierdzono maksymalne wyciężenie materiału konstrukcji [4]. Tensometryczne pomiary stanu odkształcenia, wykonano na belkach kondygnacji (poziom +65,00mm) na których posadowione są maszyny wyciągowe (łożyska

wału pędnego, mocowania stojanów silników elektrycznych) co schematycznie pokazano na rys. 2.

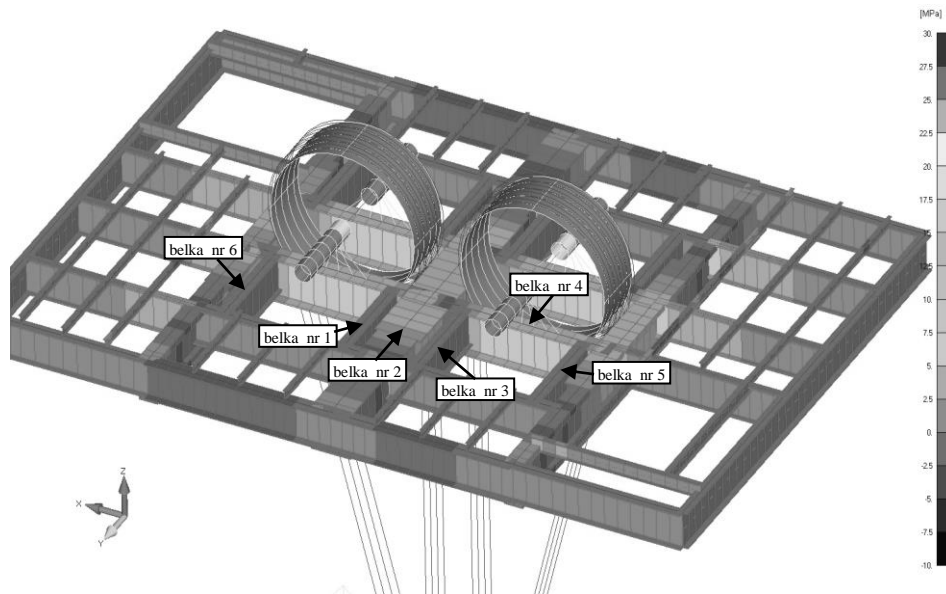


Rys. 1. Schemat konstrukcyjny wieży szybowej.

Fig. 1. Diagram of construction the tower shaft

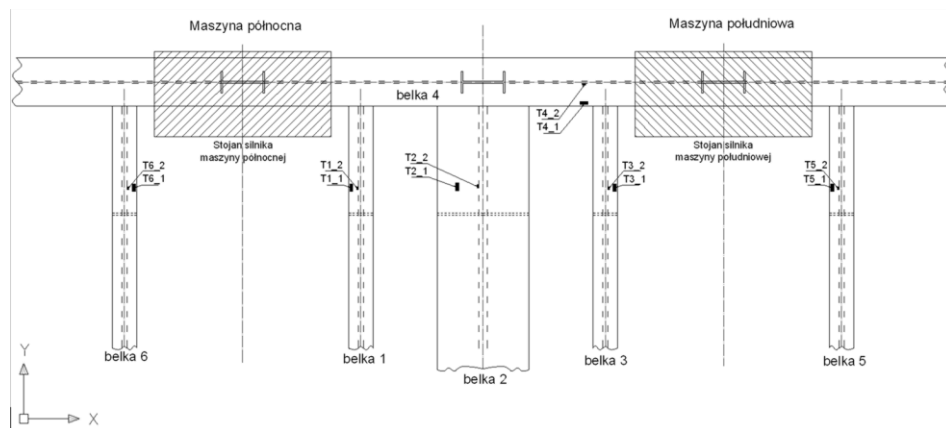
Odształcenia mierzono na sześciu belkach, a schemat rozmieszczenia czujników tensometrycznych pokazano na rys. 3. Belki tej kondygnacji to blachownice o przekrojach dwuteowych. Na każdej belce naklejono po dwa tensometry, jeden do pasa dolnego a drugi do środka.

Na belkach nr 3 i nr 5 na których posadowiony jest stojan silnika napędowego maszyny południowej (rys. 3), naklejone zostały tensometry T3\_1 (pas dolny belki nr 3), T3\_2 środek belki oraz T5\_1 (pas dolny belki nr 5), T5\_2 środek belki. Na belkę nr 1 i nr 6 na których posadowiony jest stojan silnika napędowego maszyny północnej (rys. 3) naklejone zostały tensometry T1\_1 (pas dolny belki nr 1), T1\_2 (środek belki) oraz T6\_1 (pas dolny belki nr 6), T6\_2 środek belki. Na rysunku 4 przykładowo pokazano czujnik tensometryczny T1\_1 naklejony na pas dolny belki nr 1.



Rys. 2. Schemat belek kondygnacji (poziom +65,00 m)

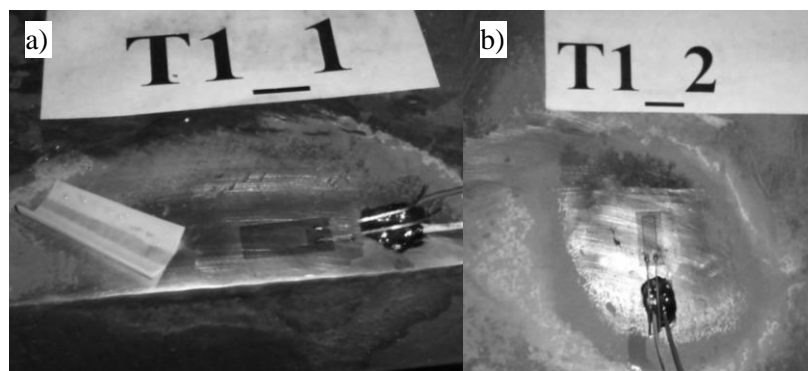
Fig. 2 Diagram of the floor beams (level +65,00 m)



Rys. 3. Schemat rozmieszczenia czujników tensometrycznych podczas prowadzonych badań.

Fig. 3. Strain gauge attachment points during the research

Ponadto na belce nr 2 rozdzielającej przedziały szybu (rys. 3), naklejono tensometry T2\_1 (pas dolny belki) oraz T2\_2 (środek belki). Na belce nr 4 prostopadłej do belek nr 1, nr 2, nr 3, nr 5, nr 6 na której posadowione są korpusy



Rys. 4. Zamontowane czujnik tensometryczny; a) T1\_1 naklejony na pas dolny belki nr 1, b) T1\_2 naklejony na środek belki nr 1.

Fig. 4. Installed strain gauge; a) T1\_1 glued to the bottom of the beam belt No. 1 b) T1\_2 glued on the Web of the beam No. 1

łożysk wału napędowego maszyn, naklejone zostały tensometry T4\_1 (pas dolny belki) oraz T4\_2 (środek belki).

Do pomiarów wykorzystano następującą aparaturę :

- wzmacniacz pomiarowy HBM MGCplus z możliwością pomiarów czujnikami rezystancyjnymi i indukcyjnymi, zasilany z akumulatorów żelowych 12V-12Ah,
- komputer przenośny laptop, wyposażony w profesjonalny program „Catman” firmy HBM który rejestrował przebieg pomiarów.

Pomiarów odkształceń dokonano przy użyciu czujników tensometrycznych TF-5/120.

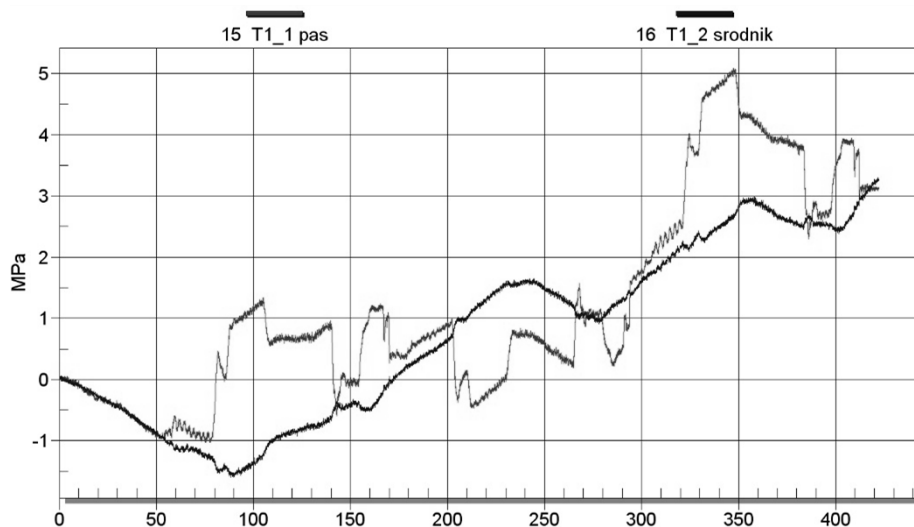
Rejestrowano zmianę stanu odkształcenia, w wyżej opisanych punktach pomiarowych, podczas następujących cykli pracy maszyn wyciągowych:

- a) pojedyncza praca maszyny północnej - 3 przejazdy (pierwszy cykl pomiarowy),
- b) równoczesna praca obu maszyn - 3 przejazdy (drugi cykl pomiarowy),
- c) pojedyncza praca maszyny południowej - 1 przejazd (trzeci cykl pomiarowy),
- d) pojedyncza praca maszyny północnej - 1 przejazd (trzeci cykl pomiarowy),
- e) równoczesna praca obu maszyn - 1 przejazdy (trzeci cykl pomiarowy),
- f) hamowanie bezpieczeństwa maszyną południową (czwarty cykl pomiarowy).

W artykule ograniczono się tylko do przedstawienia wybranych wyników wykonanych pomiarów, natomiast wszystkie wyniki zostały zamieszczone w opracowaniu [2].

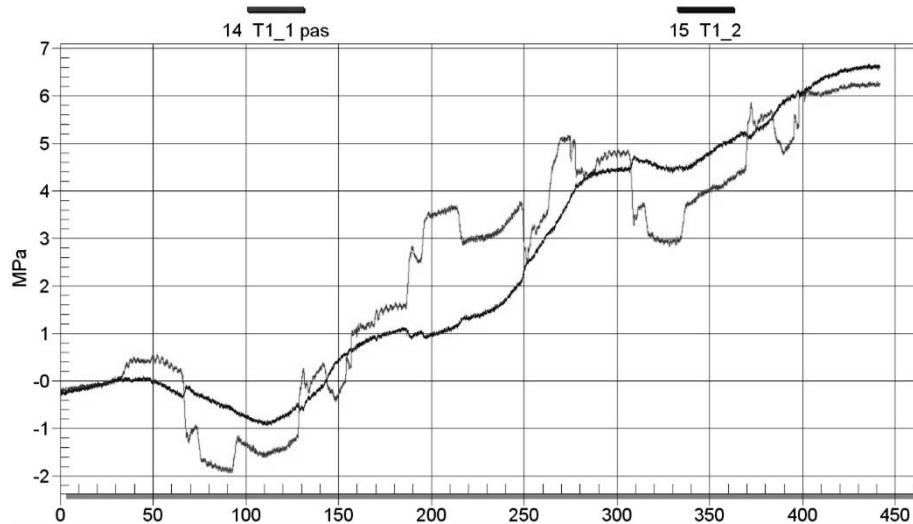
Przykładowo na rys. 5 przedstawiono zmianę naprężenia w belce nr 1 (rys. 2 i 3) podczas pojedynczej pracy maszyny północnej, w czasie trzech pełnych cykli wydobywczych. Kolorem czerwonym zaznaczono zmianę naprężenia w pasie dolnym tej belki, zarejestrowaną przez czujnik tensometryczny T1\_1, natomiast kolorem niebieskim zmianę naprężenia w środku zarejestrowaną przez czujnik tensometryczny T1\_2. Zmiana naprężenia w belce nr 1 dla analizowanego cyklu pracy urządzenia wyciągowego nie przekracza 7 MPa.

Natomiast na rys. 6 przedstawiono zmianę naprężenia również w belce nr 1 tym razem podczas równoczesnej pracy obu maszyn, w czasie trzech cykli wydobywczych. Kolorem czerwonym przedstawiono zmianę naprężenia w pasie dolnym tej belki zarejestrowaną przez czujnik tensometryczny T1\_2, natomiast kolorem niebieskim zmianę naprężenia w środku zarejestrowaną przez czujnik tensometryczny T2\_2. Zmiana naprężenia w belce nr 1 dla analizowanego cyklu pracy urządzenia wyciągowego nie przekracza 9 MPa.



Rys. 5. Wykres przebiegu naprężeń w belce nr 1 podczas pojedynczej pracy maszyny północnej, w czasie trzech pełnych cykli wydobywczych.

Fig. 5 Graph of the course of stresses in the beam No. 1 during a single work machine northern, during three complete cycles of mining.

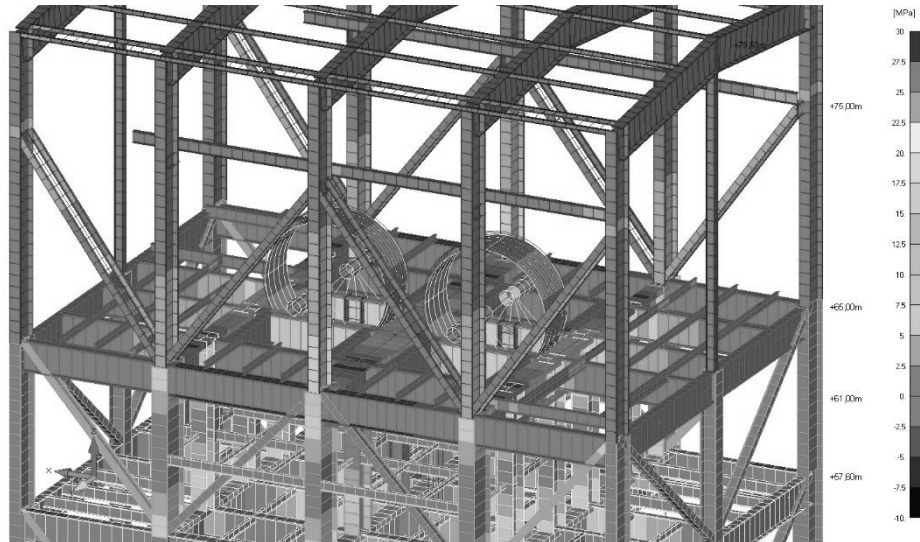


Rys. 6. Wykres przebiegu naprężeń w belce nr 1 podczas pracy obydwu maszyn, w czasie trzech pełnych cykli wydobywczych.

Fig. 6 Graph of the course of stresses in the beam No. 1 during a both machines work, during three complete cycles of mining.

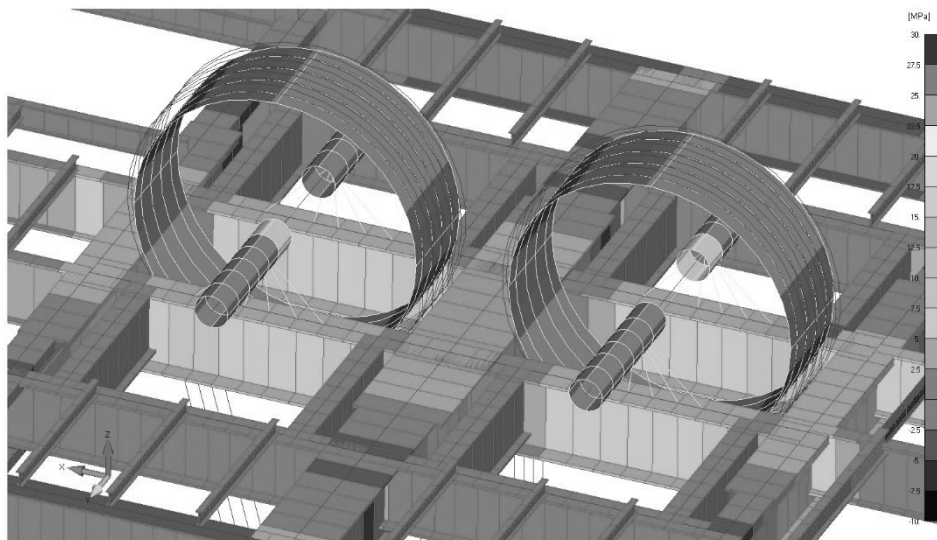
### 3. Analiza wytrzymałościowa

Analizę wytrzymałościową (numeryczną) ograniczono do obszarów elementów nośnych kondygnacji (poziom +65,00 m) wieży szybowej, w których mierzono odkształcenia (naprężenia) oraz obciążeń, które wywołały maksymalne wartości zmierzonych naprężeń (drugi cykl pomiarowy – równoczesna praca obu maszyn). Obliczenie wykonano bazując na opracowanym modelu numerycznym konstrukcji wieży szybowej [4], który pokazano również na rys. 1. Wyniki analizy wytrzymałościowej – stan naprężenia w elementach nośnych konstrukcji wieży szybowej – przedstawione w formie graficznej zestawiono w opracowaniu [2] Natomiast w artykule ograniczono się do przedstawienia rozkładu naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$ , wyliczonych z wykorzystaniem hipotezy Hubera-Misesa w elementach nośnych konstrukcji wieży szybowej od poziomu +57,60 m do poziomu +75,00 (rys. 7). Największe naprężenia zredukowane obserwujemy w belkach nośnych kondygnacji (poziom +65,00) w okolicach zabudowy maszyn wyciągowych. W celu dokładnego określenia stanu naprężenia w belkach poziomu (+65,00 m), na rys. 8 pokazano ten fragment elementów nośnych konstrukcji wieży, z naniesionymi warstwicami określającymi poziom naprężeń. Największą wartość naprężeń zredukowanych (około 22 MPa) obserwujemy w miejscach połączenia belek podtrzymujących łożysko wału i stojanu. Przedstawione wykresy dotyczą maksymalnego obciążenia elementów nośnych



Rys. 7. Rozkład naprężeń zredukowanych  $\sigma_z$  w elementach nośnych basztyw konstrukcji wieży od poziomu +57,60 m do poziomu +75,00 m dla przypadku rozpoczęcia procesu podnoszenia pełnego naczynia z podszybia z przyspieszeniem  $a_1$ .

Fig. 7. Reduced stress distribution  $\sigma_z$  in the load-bearing elements of a tower-type headgear structure from level +57,60 m to level +75,00 m for the initiation of the process picking up the full conveyance with acceleration  $a_1$ .



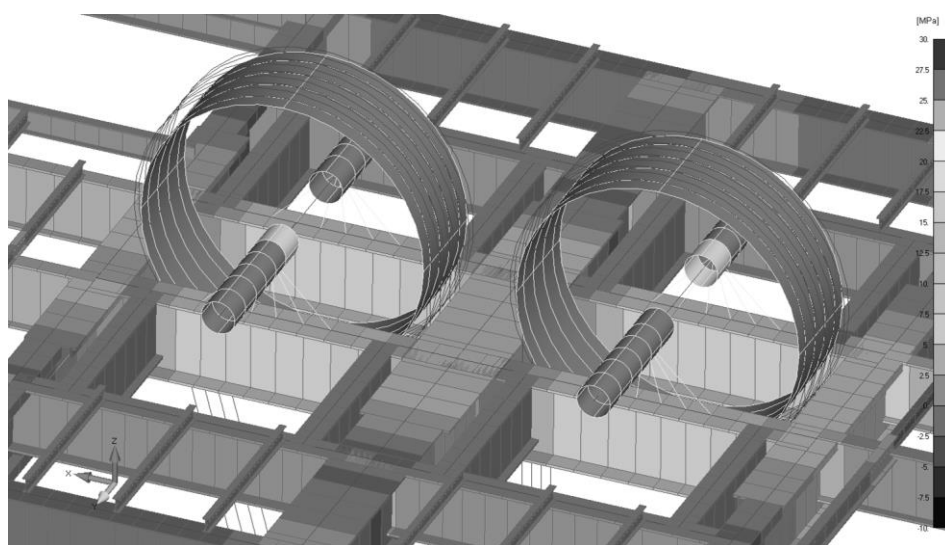
Rys. 8. Koncentracja naprężeń w obszarach zabudowy maszyn wyciągowych w belkach poziomu +65,00 m dla przypadku rozpoczęcia procesu podnoszenia pełnego naczynia z podszybia z przyspieszeniem  $a_1$ .

Fig. 8. Stress concentration in the areas of hoisting installation in the beams for level +65,00 m for the initiation of the process picking up the full conveyance with acceleration  $a_1$ .



układu, a więc chwili rozpoczęcia procesu podnoszenia pełnego naczynia z przyspieszeniem  $a_I$ .

Natomiast na rys. 9 przedstawiono stan naprężenia również w belkach poziomym (+65,00 m), ale dla przypadku minimalnego obciążenia elementów nośnych układu, tj. chwili rozpoczęcia hamowania pełnego naczynia dojeżdżającego do nadszybia w normalnym cyklu eksploatacyjnym. Największą wartość naprężeń zredukowanych (12 MPa) – dla tego przypadku obciążenia – obserwujemy również w miejscach połączenia belek podtrzymujących łożysko wału napędowego i stojanu silnika.



Rys. 9. Koncentracja naprężeń w obszarach zabudowy maszyn wyciągowych w belkach poziomym +65,00 m dla przypadku obciążenia odpowiadającemu momentowi rozpoczęcia procesu hamowania pełnego naczynia dojeżdżającego do nadszybia.

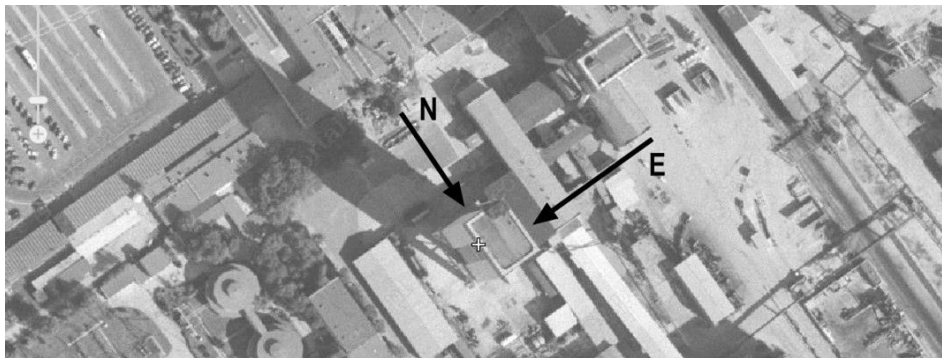
Fig. 9. Stress concentration in the areas of hoisting installation in the beams for level +65,00 m for a start the braking process a full of conveyance reaching to the tower shaft top.

Oznacza to, że amplituda zmiany naprężenia w najbardziej wyężonych obszarach konstrukcji wieży szybowej, wygenerowana eksploatacją, waha się w granicach 10 MPa i odpowiada wartościom zmiany naprężenia w tych obszarach pomierzonych na obiekcie rzeczywistym (rozd. II).

#### 4. Pomiary poziomych przemieszczeń wybranych punktów konstrukcji wieży szybowej

Równoległe z pomiarami odkształceń (naprężeń) w elementach nośnych konstrukcji wieży szybowej, wykonano pomiary poziomych przemieszczeń wybranych punktów konstrukcji, naziemnym radarem interferometrycznym IBIS-S

[2]. Mierzono składowe przemieszczeń, w dwóch prostopadłych kierunkach, równoległych do ściany północnej (N) oraz wschodniej (E) wieży szybowej (rys. 10).



Rys. 10. Lokalizacja stanowisk do obserwacji: N – ściany północnej, E – ściany wschodniej.

Fig. 10. Location positions for observation: N – the northern wall, E – the eastern wall.

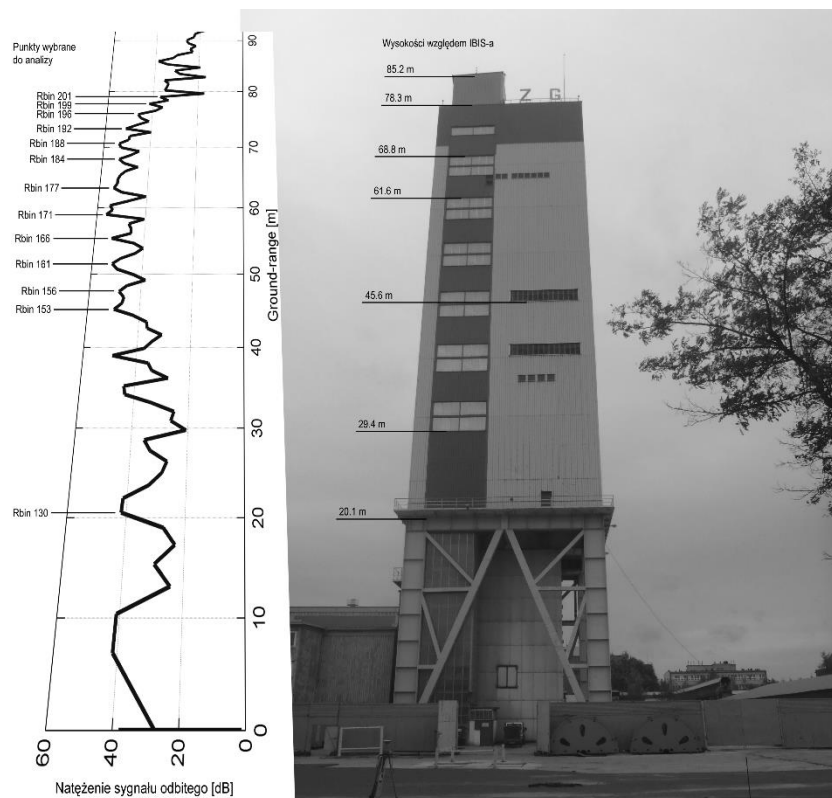
Wybór punktów obserwowanych przeprowadzono na podstawie profilu radarowego. Na rys. 11 przykładowo zaprezentowano profil radarowy przedstawiający natężenie odbicia sygnału radarowego do powierzchni ściany północnej (N) w relacji do jej wysokości.

Wyniki przeprowadzonych pomiarów – w czasie normalnej eksploatacji urządzeń wyciągowych – zainstalowanych w basztowej wieży szybowej – wykazały, że maksymalna amplituda poziomych przemieszczeń wahała się w granicach 1mm. Natomiast w warunkach hamowania bezpieczeństwa, była tylko nieznacznie wyższa i wahała się w granicach  $\pm 1,5$  mm [2].

Ciekawostką jest fakt, że konstrukcja basztowej wieży szybowej, powyżej poziomu +20,11 m (poziom pierwszej kondygnacji) – w warunkach normalnej pracy urządzenia – zachowuje się jak bryła sztywne.

## 5. Podsumowanie

Wyniki dodatkowo wykonanej (numerycznej) analizy stanu naprężenia, ograniczonej do obszarów elementów nośnych konstrukcji basztowej wieży w których stwierdzono maksymalne wyężenie materiału konstrukcji [2], w całej rozciągłości korespondują z wynikami eksperymentu przeprowadzonego na obiekcie rzeczywistym. Oznacza to, że wykonane (numeryczne) analizy stanu naprężenia w elementach nośnych konstrukcji basztowych wież szybowych [4] – aktualnie eksploatowanych w polskim górnictwie – upoważniają do przyjęcia generalnego założenia, że w ramach analizy geometrii układu napędowego maszyn wyciągowych, konstrukcje na których posadowione są elementy tego



Rys. 11. Profil radarowy i widok obserwowanej ściany północnej (N) wieży szybu.

Fig. 11. Radar profile and view of the northern wall (N) the tower shaft which was observed.

układu można traktować jako sztywne. Wniosek ten, dodatkowo potwierdzają wyniki geodezyjnych pomiarów przemieszczeń, wybranych punktów konstrukcji nośnej basztowej wieży szybowej. Wyniki te – co jest pewnego rodzaju ciekawostką – wskazują że konstrukcja basztowej wieży szybowej, powyżej pierwszej kondygnacji, zachowuje się jak bryła sztywna.

## Literatura

- [1] Wolny S., 2009. Dynamic loading of the pulley block in a hoisting installation in normal operating conditions. Archive of Mining Sciences, Kraków, Vol. 54, No2, 0. 261-284.
- [2] Wolny S., Badura S. i inni, 2011. Opracowanie metody kontroli fundamentów maszyn wyciągowych zainstalowanych na wieżach basztowych. Praca naukowo – badawcza. Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji. AGH. Kraków.

- [3] Wolny S, 2011. Dynamic loading of Conveyances in Normal Operating Conditions. Archive of Mining Sciences. Vol. 56 (2011). No 4, p. 665-682.
- [4] Wolny S., 2012. Wpływ obciążeń eksploatacyjnych na stan naprężenia oraz przemieszczenia wybranych elementów nośnych konstrukcji basztowej wieży szybowej. (Zgłoszono do druku w Archiwum Górnictwa).

## **THE ASSESSMENT OF THE IMPACT OF OPERATING LOADS ON THE STATE OF STRESS AND STRAIN IN SELECTED LOAD-BEARING ELEMENTS OF A TOWER-TYPE HEADGEAR STRUCTURE**

### **S u m m a r y**

The headgear structure allows the conveyance to be moved over the shaft top to the loading (unloading) point, at the same time it keeps in place the rope pulleys while tower-type headgear structures also accommodate the entire winder installations.

The headgear is where the final stage of the hoisting installation is located and where the surface transport systems begin. These aspects strongly impact the actual shape of the tower, its height and in some cases determine the design of the entire winding gear.

In order that all the headgear functions should be provided, it is required that the ultimate state conditions should be maintained throughout its entire service life. In order to assess the critical service conditions, the computation procedure should be applied based on design loads and fatigue endurance parameters.

The computations of characteristic loads acting on the headgear structure use the developed model of the system based on the dynamic analysis carried out for a specific case: a hoisting installation operated in one of the underground collieries in Poland. The maximal and minimal loads acting on a Koepe pulley and those required for the system operation are determined accordingly.

The laws of dynamics provide a background for finding the forces and moments of forces acting in the components of the driving system (including the electric motors and pulley blocks) for the specified loading of the Koepe pulley.

Underlying the numerical FEM model of the tower-type headgear structure are the technical specifications of the analysed object and FEM calculations followed by endurance analysis to find the state of stress in structural elements of the headgear under the typical service conditions.

The results help in assessing how the design of the hoisting installation should impact on safety features of load-bearing elements in the headgear structure.

**Keywords:** tower-type headgear, state of stress, loading, strain gauge measurements

DOI:10.7862/rb.2014.42

*Przesłano do redakcji: 29.05.2014 r.*

*Przyjęto do druku: 04.09.2014 r.*

## Informacje dodatkowe

1. Lista recenzentów współpracujących będzie opublikowana w czwartym numerze *Czasopisma Inżynierii Ładowej, Środowiska i Architektury*: 61(4/14) oraz na stronie internetowej:  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/)  
(dotychczasowa nazwa: *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Budownictwo i Inżynieria Środowiska*), strona internetowa:  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/budownictwo-i/](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/budownictwo-i/)
2. Zasady recenzowania są udostępnione na stronie internetowej:  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/zasady-recenzowania/](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/zasady-recenzowania/)
3. Informacje dla autorów artykułów są udostępnione na stronie internetowej:  
[oficyna.portal.prz.edu.pl/informacje-dla-autorow/](http://oficyna.portal.prz.edu.pl/informacje-dla-autorow/)
4. Formularz recenzji jest udostępniony na stronie internetowej:  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/)
5. Instrukcja dla autorów omawiająca szczegółowo strukturę artykułu, jego układ, sposób przygotowywania materiału ilustracyjnego i piśmiennictwa jest zamieszczona na stronie internetowej:  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/instrukcja-dla-autorow/](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/instrukcja-dla-autorow/)  
oraz  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/wzakladce „Instrukcja dla autorów”](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/wzakladce%2C%20Instrukcja%20dla%20autorow%22)
6. Dane kontaktowe do redakcji czasopisma, adresy pocztowe i e-mail do przesyłania artykułów oraz dane kontaktowe do wydawcy są podane na stronie internetowej (Komitet Redakcyjny):  
[www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/](http://www.oficyna.portal.prz.edu.pl/pl/zeszyty-naukowe/czasopismo-inzynierii-ladowej-s/)