

**Łukasz Święch**

**Komplementarne badania  
cienkościennych ustrojów nośnych  
w warunkach dużych deformacji**



**OFICyna  
WYDAWNICZA**  
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Wydano za zgodą Rektora

Recenzenci

prof. dr hab. inż. Hubert DĘBSKI  
prof. dr hab. inż. Maria KOTELKO

Redaktor naczelny  
Wydawnictw Politechniki Rzeszowskiej  
dr hab. inż. Lesław GNIEWEK, prof. PRZ

Redaktor  
Marzena TARAŁA

Skład i łamanie tekstu  
Mariusz TENDERA

Projekt okładki  
Joanna MIKUŁA

*konstrukcje cienkościenne, nieliniowe analizy numeryczne, stateczność, badania doświadczalne, MES, DIC, cyfrowa korelacja obrazu, stany pokrytycznej deformacji*

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej  
Rzeszów 2024

Wszelkie prawa autorskie i wydawnicze zastrzeżone. Każda forma powielania oraz przenoszenia na inne nośniki bez pisemnej zgody Wydawcy jest traktowana jako naruszenie praw autorskich, z konsekwencjami przewidzianymi w *Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych* (Dz.U. z 2018 r., poz. 1191 t.j.). Autor i Wydawca dołożyli wszelkich starań, aby rzetelnie podać źródło zamieszczonych ilustracji oraz dotrzeć do właścicieli i dysponentów praw autorskich. Osoby, których nie udało się ustalić, są proszone o kontakt z Wydawnictwem.

p-ISBN 978-83-7934-753-7  
e-ISBN 978-83-7934-760-5

Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej  
al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów  
<https://oficyna.prz.edu.pl>

Ark. wyd. 12,28. Ark. druk. 13,75.  
Wydrukowano w grudniu 2024 r.  
Drukarnia Oficyny Wydawniczej,  
al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów  
Zam. nr 50/24

*Rozwiązując zadania nieliniowe, jesteśmy w sytuacji idącego krętą ścieżką w gęstej mgle. Aby nie uczynić fałszywego kroku, należy uważnie sprawdzić, gdzie jesteśmy i z wielkim namysłem wykonać następny ruch.*

R.D. Cook



# SPIS TREŚCI

1. Słowo wstępne .....	7
1.1. Wprowadzenie .....	7
1.2. Cel i zakres pracy .....	9
2. Podstawy teoretyczne .....	13
2.1. Wprowadzenie .....	13
2.2. Nieliniowość geometryczna.....	13
2.3. Związki konstytutywne .....	22
2.4. Rodzaje i źródła nieliniowości .....	26
2.5. Ścieżka równowagi.....	28
2.6. Równania stanu.....	33
3. Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień nieliniowych.....	41
3.1. Wprowadzenie .....	41
3.2. Metody rozwiązania.....	44
3.3. Stateczność zlinearyzowana.....	53
4. Narzędzia badań doświadczalnych.....	57
4.1. Wprowadzenie .....	57
4.2. Tensometria elektrooporowa i światłowodowa.....	58
4.3. Badania polaryzacyjno-optyczne.....	61
4.4. Metoda cyfrowej korelacji obrazu .....	65
5. Uwarunkowania bieżącego śledzenia zgodności wyników obliczeń numerycznych oraz badań eksperymentalnych.....	77
5.1. Wprowadzenie .....	77
5.2. Urządzenia wzmacniane usztywnieniami geodetycznymi.....	79
5.2.1. Wprowadzenie .....	79
5.2.2. Podstawy teoretyczne.....	83
5.2.3. Przedmiot badań .....	86
5.2.4. Analiza odchylek wykonawczych .....	87
5.2.5. Badania doświadczalne.....	90
5.2.6. Analizy numeryczne w ujęciu MES.....	98

5.2.7. Konfrontacja wyników badań eksperymentalnych i analiz numerycznych.....	107
5.2.8. Analiza sposobu modelowania szczegółów geometrii konstrukcji.....	114
5.2.9. Wpływ parametrów kontroli rozwiązania na otrzymywane rezultaty .....	117
5.2.10. Porównanie wyników MES dla płyty gładkiej i żebrowanej .	125
5.2.11. Wpływ wykroju w płycie usztywnianej.....	132
5.2.12. Wnioski i podsumowanie badań nad strukturami usztywnianymi żebrami geodetycznymi.....	140
5.3. Płyty wzmacniane niskimi, równoległymi żebrami w stanach zaawansowanych deformacji.....	142
5.4. Analiza struktur nośnych wytwarzanych w technologii druku przestrzennego.....	159
5.4.1. Wprowadzenie .....	159
5.4.2. Badania płyt poddanych ścinaniu.....	162
5.4.3. Badania wielosegmentowych ustrojów nośnych poddanych skręcaniu.....	167
6. Stosowanie optycznych metod pomiarowych do badań konstrukcji lotniczych.....	175
6.1. Wprowadzenie .....	175
6.2. Przykłady .....	176
6.2.1. Przykład badania tylnej części kadłuba motoszybowca.....	176
6.2.2. Badania zmęczeniowe kompozytowego dźwigara skrzydła motoszybowca.....	177
6.2.3. Badania wpływu dodatkowego zasobnika na aparaturę pomiarową na właściwości lotne szybowca .....	186
7. Uwagi końcowe.....	195
7.1. Realizacja pracy .....	195
7.2. Oryginalne elementy pracy .....	198
7.3. Kierunki dalszych badań.....	199
Literatura .....	203
Streszczenie.....	215
Abstract .....	217

# 1. SŁOWO WSTĘPNE

## 1.1. Wprowadzenie

Dynamiczny rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej konsekwentnie poszerza możliwości rozwiązywania problemów technicznych, w tym złożonych zagadnień mechaniki ciał odkształcalnych. Zakres badań i analiz rozszerza się na obszar struktur o złożonej geometrii, dużych deformacji oraz materiałów o programowanych charakterystykach fizycznych [29]. Wzrasta dążność do racjonalnego projektowania ustrojów nośnych, spełniających rosnące wymagania z zakresu lekkości i niezawodności konstrukcji, gdzie dominującą rolę odgrywają konstrukcje lotnicze, dla których stany deformacji zakrytycznych są stanami dopuszczalnymi [25].

Jest rzeczą naturalną, że im bardziej złożona jest konstrukcja, tym bardziej kłopotliwa staje się jej matematyczna deskrypcja, i tym trudniejsze są rozwiązania. Dotyczy to w szczególności problemów nieliniowych, zasadniczo odmiennych od zagadnień liniowych [19]. Rozważając zagadnienie nieliniowe, zobligowani jesteśmy do respektowania stosownych zasad mechaniki, co stanowi warunek konieczny, ale często niewystarczający, by wyniki można było uznać za w pełni wiarygodne. Zawsze aktualne jest w takim przypadku stwierdzenie: *Problemy nieliniowe są na tyle złożone, że znane algorytmy i procedury stają się często zawodne. Skuteczne w jednym przypadku mogą okazać się całkowicie nieprzydatne w innym, nawet niewiele się różniącym* [108].

Równoległe z analizami nieliniowymi uzasadnione, a często również konieczne staje się zatem stosowanie metod i procedur kontrolujących wyniki obliczeń numerycznych. Funkcję tę spełniają badania eksperymentalne, stanowiące rodzaj zabiegów komplementarnych wobec szerokiego spektrum rutynowych badań obligatoryjnych. Spośród obiegowych metod badań doświadczalnych znaczącą rolę odgrywają metody mechaniki modelowej [35, 41]. U podstaw tych metod leży założenie, że opierając się na teorii podobieństwa modelowego, można przenosić, w szerokim zrozumieniu, ilościowe wnioski z obserwacji zjawisk fizycznych w pewnym układzie mechanicznym

na drugi, lecz o innej skali, nieograniczającej się do podobieństwa geometrycznego konstrukcji. Koncepcje projektowania ustrojów nośnych na podstawie badań modelowych nie należą do nowych. Impulsy do formułowania praw podobieństwa modelowego wyrażających związki między zjawiskami fizycznymi zachodzącymi w geometrycznie podobnych układach mechanicznych napotyka się już w pracach Leonarda da Vinci [45]. Jednak intensywny rozwój badań modelowych w technice nastąpił dopiero z końcem lat czterdziestych oraz na początku lat pięćdziesiątych ubiegłego stulecia. Rozwój ten ulegał pewnemu ograniczeniu wskutek zbyt dużych uproszczeń w przygotowaniu modeli, co prowadziło do błędnych rezultatów. Dopiero zastosowanie elektroniki z jej współczesnymi możliwościami z zakresu techniki pomiarowej, sterowania procesem badawczym oraz metodyki opracowywania wyników zmieniło możliwości i funkcje eksperymentu modelowego. Poszerzanie zastosowań badań modelowych nastąpiło również wskutek rozwoju chemii tworzyw sztucznych, co z kolei umożliwiło stosowanie materiałów o programowanych właściwościach i charakterystykach fizycznych [59, 96, 120]. Istotną rolę odgrywają również tworzywa optycznie czynne, które pod wpływem obciążenia mechanicznego wykazują efekt dwójłomności wymuszonej w świetle spolaryzowanym [160].

Badania modelowe w rozmaitych formach i mutacjach w sposób znaczący rozszerzają sferę badań eksperymentalnych. Przede wszystkim znajdują zastosowanie w trakcie analiz stanów naprężenia i odkształcenia ustrojów nośnych w ujęciu fizycznie i geometrycznie nieliniowym, jako skuteczna, tania i szybka forma weryfikacji wyników analiz teoretycznych. Gdy obliczenia analityczne lub analizy numeryczne okazują się niewystarczające w procedurze dowodowej, komplementarny eksperyment jako element fazy racjonalnego projektowania ustroju nośnego staje się obligatoryjny.

Nie mniej ważny jest fakt, że eksperymentalne badania komplementarne, w szczególności stref newralgicznych, realizowane w miarę potrzeb w trakcie projektowania ustroju prototypowego pozwalają na pozyskiwanie bieżących podpowiedzi, czy i w jakim kierunku należy korygować strukturę, by powstawała ona w zgodności z założeniami. Gdy funkcję weryfikacji pełnią badania modelowe, obiekt – model winien rygorystycznie odwzorowywać cechy charakteryzujące konstrukcję rzeczywistą, poczynając od podo-



bieństwa geometrycznego, podobieństwa charakterystyk fizycznych materiału, niekiedy również podobieństwa w odzwierciedlaniu skutków procesu technologicznego (np. stanu naprężeń montażowych).

Reasumując, w trakcie projektowania oraz realizacji warsztatowej rozwiązań prototypowych, struktury lotnicze są poddawane rozległym badaniom obligatoryjnym, od statycznych i zmęczeniowych badań kompletnych zespołów, badań rezonansowych, po fabryczne i państwowe próby w locie.

## 1.2. Cel i zakres pracy

Postulat lekkości w skojarzeniu z wymogiem trwałości i niezawodności konstrukcji ukonstytuował warunki, w których stany deformacji zakrytycznych cienkościennych ustrojów nośnych są stanami dopuszczalnymi. Uwzględnianie w analizach numerycznych nieliniowych związków geometrycznych staje się więc wymogiem warunkującym racjonalne ujmowanie problemu. Jakkolwiek współczesne, profesjonalne programy komputerowe umożliwiają stosowanie nieliniowych analiz numerycznych, to zważywszy że analizy te stanowią źródło wyników niepozabawionych znaczącej dozy niepewności, uzasadnione staje się ich kontrolowanie w trakcie procesu projektowania.

Doświadczenia własne obejmujące badania eksperymentalne elementów cienkościennych struktur nośnych, poddawanych obciążeniom wywołującym duże deformacje, wspierane nieliniowymi analizami numerycznymi stanowią motywację zmierzającą do ugruntowania konstatacji:

**Wobec wzrastających wymogów w zakresie trwałości i niezawodności ustrojów cienkościennych, a także z racji konieczności eliminowania stref newralgicznych w trakcie projektowania cienkościennych ustrojów nośnych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej i fizycznej, wspomaganie obliczeń numerycznych badaniami doświadczalnymi realizowanymi w celu dokonywania analiz porównawczych, kontrolujących oczekiwaną zgodność wyników, stanowi znaczący przyczynek do doskonalenia metod racjonalnego projektowania cienkościennych ustrojów nośnych. Fakt ten nabiera szczególnego znaczenia w przypadku lotniczych ustrojów nośnych, które pracują w warunkach dużych deformacji i wymagają rozwiązań silnie nieliniowych.**

Próbie słuszności powyższego stwierdzenia oparto w głównej mierze na analizie integralnie usztywnianych płyt poddanych ścinaniu. Elementy nośne tego typu mogą być modelowym przybliżeniem fragmentów pokrycia w cienkościennych strukturach nośnych konstrukcji lotniczych.

Ze względu na stosunkowo szeroki zakres prezentowanych zagadnień zrezygnowano z klasycznego przeglądu literatury na rzecz sukcesywnie pojawiających się w tekście, licznych odnośników do cytowanych pozycji w postaci podręczników i artykułów naukowych.

Zakres pracy obejmuje:

1. Przedstawienie zarysu teoretycznych podstaw deformacji nieliniowych, na których oparto analizy stanów zakrytycznej deformacji rozważanych struktur badawczych (rozdz. 2.).
2. Omówienie numerycznych metod rozwiązywania zagadnień geometrycznie i fizycznie nieliniowych (rozdz. 3.).
3. Scharakteryzowanie metod badań doświadczalnych i zakresu ich stosowania w odniesieniu do cienkościennych struktur nośnych pracujących w zakresie deformacji pokrytycznych, ze szczególnym uwzględnieniem metody cyfrowej korelacji obrazu (rozdz. 4.).
4. Przykłady badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych zmierzających do określenia rzeczywistego pola naprężenia integralnie usztywnianych struktur cienkościennych poddanych ścinaniu. Zaprezentowano rozważania dotyczące kilku rodzajów ustrojów. Przedstawiono wyniki dla struktur wzmacnianych usztywnieniami geodetycznymi wykonanymi z lotniczych stopów aluminium, płyt usztywnianych niskoprofilowymi żebrami usytuowanymi równolegle względem siebie oraz konstrukcji o programowalnych właściwościach fizycznych wytwarzanych w technologii druku przestrzennego (rozdz. 5.).
5. Prezentację możliwości stosowania metody cyfrowej korelacji obrazu w przypadku badań rzeczywistych konstrukcji lotniczych. Zaprezentowano przykłady obejmujące wyniki uzyskane w trakcie statycznych badań wytrzymałościowych, badań zmęczeniowych oraz pomiarów deformacji w trakcie badań w tunelu aerodynamicznym (rozdz. 6.).

Rozdział siódmy obejmuje syntetyczne podsumowanie pracy, wskazanie jej oryginalnych elementów oraz nakreślenie dalszych kierunków badań. Monografię zamyka wykaz cytowanej literatury.



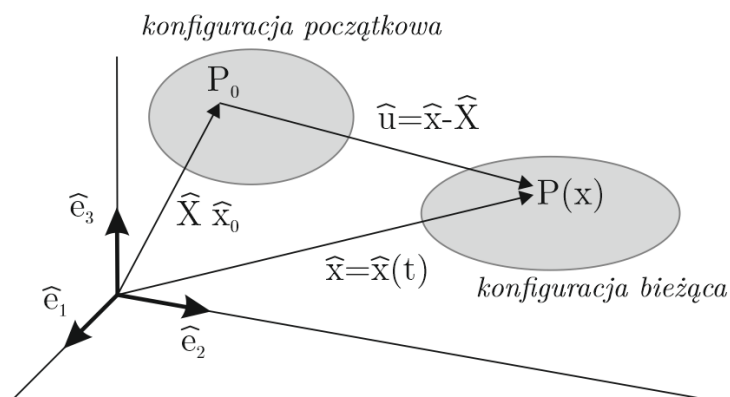
## 2. PODSTAWY TEORETYCZNE

### 2.1. Wprowadzenie

W zdecydowanej większości zagadnień związanych z projektowaniem wytrzymałościowym ustrojów nośnych przyjmuje się założenie, że odkształcenia są nieskończenie małe. Analizę opiera się na klasycznej teorii sprężystości, która opisuje zarówno teorię stanu naprężenia, stanu odkształcenia, jak również relacje między nimi w formie związków konstytutywnych [91, 141, 142]. W przypadku struktur pracujących w stanach zakrytycznych deformacji, które są dopuszczalne w warunkach obciążeń eksploatacyjnych, konieczne jest uwzględnienie nieliniowych relacji pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami, a niekiedy również nieliniowych praw fizycznych [26, 31, 93, 122, 149].

### 2.2. Nieliniowość geometryczna

Założenia i relacje stanowiące podstawy analizy zakrytycznych stanów deformacji ustrojów cienkościennych opierają się na teorii geometrycznie nieliniowej. Do opisu ruchu ciała są stosowane dwa sposoby, w zależności od przyjętego układu zmiennych niezależnych (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Ciało w konfiguracji początkowej i po deformacji

Załóżmy, że w chwili początkowej dowolnie wybrany punkt materialny zajmuje położenie  $P_0$  o współrzędnych kartezjańskich  $X_i$ , natomiast w chwili bieżącej, w położeniu  $P$  współrzędne te są oznaczone jako  $x_i$ .

Współrzędne  $X_i$  noszą nazwę współrzędnych materialnych lub współrzędnych Lagrange'a [72]:

$$\hat{X} = \sum_i X_i \hat{e}_i \quad (2.1)$$

natomiast współrzędne  $x_i$  są nazywane współrzędnymi przestrzennymi lub współrzędnymi Eulera:

$$\hat{x} = \sum_i x_i \hat{e}_i \quad (2.2)$$

Obydwa wektory są definiowane w odniesieniu do układu współrzędnych wyrażonego przez wektory jednostkowe  $\hat{e}_i$ , które odpowiadają osiom  $x, y, z$  oraz  $X, Y, Z$ .

Przemieszczenie definiuje się jako:

$$\hat{u} = x_i - X_i \quad (2.3)$$

Ruch ciała lub zmianę jego konfiguracji związaną z deformacją można wyrazić następująco:

$$x_i = x_i(X_i, t) \quad (2.4)$$

Zależność ta określa jednoznacznie ruch ciała w dowolnej chwili  $t$ , w przestrzeni trójwymiarowej przez odwzorowanie homeomorficzne.

Z kolei stosując opis Eulera oraz przyjmując  $x_i$  jako zmienne niezależne opisujące dowolne położenie punktu, można wyznaczyć współrzędne materialne cząstki. Relację tę przedstawia się w postaci:

$$X_i = X_i(x_i, t) \quad (2.5)$$

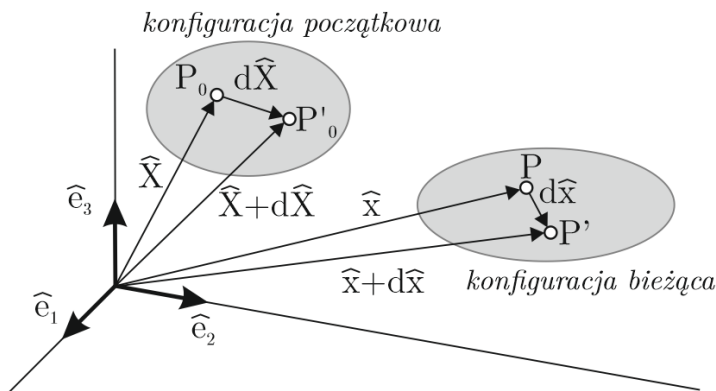
W układzie Lagrange'a wszystkie wielkości są wyrażone w zależności od ich pierwotnego położenia i czasu. W układzie Eulera natomiast współrzędne  $x_i$  podawane są w danej chwili czasowej, są zatem niezależne. Oznacza to, że w układzie Lagrange'a siatka punktów opisujących położenie ciała przyjmowana jest w stanie niezdeformowanym, a następnie punkty siatki przemieszczają się na skutek deformacji. Siatka jest zatem zawsze w tych

samych punktach materialnych. W układzie Eulera siatkę taką nakłada się zawsze na aktualny stan deformacji ciała (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Porównanie definicji współrzędnych punktów wg Lagrange'a i Eulera

Definiując deformację w otoczeniu punktu  $P$ , odległość pomiędzy punktami w odniesieniu do konfiguracji początkowej można wyrazić jako  $dX_i$ , natomiast w odniesieniu do konfiguracji po deformacji jako  $dx_i$  (rys. 2.3).



Rys. 2.3. Deformacja sąsiadujących punktów

Pozycja pomiędzy dwoma punktami może być wyrażona jako:

$$\mathbf{x}'_i = X_i + dx_i = x_i(X_i + dX_i) \quad (2.6)$$

Po rozwinięciu relacji (2.6) w szereg Taylora, przy założeniu że początkowa odległość między punktami  $dX_i$  jest mała, związek pomiędzy stanem początkowym i zdeformowanym (nazywany przemieszczeniem) wyniesie:

$$u_i = x_i - X_i = dx_i \approx \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad (2.7)$$

Pamiętając, że  $i, j$  przebiega wartości 1, 2, 3 (związane z osiami  $x, y, z$ ), w zapisie macierzowym zależność wyraża się jako:

$$dx_i = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] dX_j \quad (2.8)$$

gdzie  $dx_i = u_i$  reprezentuje zmianę położenia punktu, czyli jego przemieszczenie.

Człony  $\partial x_i / \partial X_j$  są nazywane gradientem deformacji i stanowią podstawę opisu każdej deformacji ciała. Oznaczając tensor gradientu deformacji jako  $F_{ij}$ , można zapisać:

$$dx_i = F_{ij} dX_j \quad (2.9)$$

gdzie

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{31} & F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Relacje (2.6)-(2.10) jednoznacznie opisują zmiany  $dx_i$  w odniesieniu do stanu początkowego  $dX_i$ . Warunkiem koniecznym, aby możliwe było takie ujęcie problemu, jest ciągłość deformacji ciała. Warunek ten będzie spełniony, jeżeli:

$$\det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \neq 0 \quad (2.11)$$

Definiując Jakobian, w konfiguracji niezdeformowanej (początkowej) zapisuje się:

$$J^0 \equiv \det \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \quad (2.12)$$



gdzie:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } ijk \text{ jest permutacją parzystą, np. 312} \\ -1 & \text{jeżeli } ijk \text{ jest permutacją nieparzystą, np. 321} \\ 0 & \text{w innym przypadku, np. 122} \end{cases} \quad (2.13)$$

Jakobian  $J^0$  jest wartością skalarną, a warunek, aby deformacja była fizycznie możliwa, jest następujący:

$$0 < J^0 < \infty.$$

Oznacza to, że deformacja w odniesieniu do objętości ciała przyjmuje wartość od zera do nieskończenie dużej.

Tensor gradientu deformacji  $F_{ij}$  zawiera zarówno informacje o ruchu bryły sztywnej, jak i samych deformacjach ciała. Ponieważ przemieszczenia liniowe nie zmieniają wartości składowych wektora, można więc przyjąć, że tensor ten zawiera tylko deformacje i obroty.

Tensor  $\mathbf{F}$  jest ortogonalny, gdyż w przypadku ruchu ciała bez deformacji, jako bryły sztywnej, zachodzi zależność:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{I}.$$

Gradient deformacji  $\mathbf{F}$  można podzielić na część symetryczną i antysymetryczną:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \epsilon_{i,j} + \omega_{i,j} \quad (2.14)$$

gdzie  $\delta_{ij}$  jest nazywana deltą Kroneckera i wyraża się jako:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \text{ lub } \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad (2.15)$$

Symetryczny tensor  $\epsilon_{i,j}$  jest związany z małymi (nieskończenie) odkształceniami:

$$\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.16)$$

Człon antysymetryczny nazywany tensorem Lagrange'a odnosi się do rotacji:

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.17)$$

W podobny sposób można zdefiniować tensor gradientu przemieszczenia  $\mathbf{G}$  w odniesieniu do konfiguracji początkowej:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} - 1 & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} - 1 & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} - 1 \end{bmatrix} \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.18b)$$

$$\mathbf{G} = \nabla \mathbf{u} \quad (2.18c)$$

lub w odniesieniu do konfiguracji bieżącej:

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} \quad (2.19)$$

W celu określenia odkształcenia załóżmy, że dwa punkty materialne przed deformacją były opisane współrzędnymi  $X_i$  i  $X_i + dX_i$ . Po deformacji współrzędne te zmieniają się na  $x_i$  oraz  $x_i + dx_i$ . Początkowa  $dS = |d\mathbf{X}|$  i końcowa  $ds = |d\mathbf{x}|$  odległość pomiędzy tymi punktami jest wyrażona jako:

$$dS^2 = \sum_i dX_i dX_i = (dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2 \quad (2.20)$$

$$ds^2 = \sum_i dx_i dx_i = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

Pamiętając, że  $\{dx_i\} = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \{dX_j\}$ , otrzymuje się:

$$ds^2 = \sum_i dx_i dx_i = \sum_{i,j,m} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} dX_i dX_j \quad (2.21)$$

Tensor odkształcenia przedstawia informację, jak element zdeformował się od konfiguracji początkowej do bieżącej. Można zatem stwierdzić, że zmiana długości odcinka wyniesie:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= \sum_i dx_i dx_i - \sum_i dX_i dX_i = \\ &= \sum_{i,j,m} \left( \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wielkość ta jest miarą względnego przemieszczenia, czyli odkształcenia, i jest niezależna od obrotu ciała. Odkształcenie można przedstawić jako:

$$ds^2 - dS^2 = 2e_{ij} dX_i dX_j \quad (2.23)$$

gdzie

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m \left( \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (2.24)$$

jest miarą odkształcenia w postaci symetrycznego tensora drugiego rzędu (zwanego również tensorem odkształceń skończonych, tensorem Greena-Lagrange'a lub tensorem Greena-St.-Venanta).

Jeżeli tensor  $e_{ij}$  zostanie wyrażony przez gradient deformacji  $\mathbf{F}$ , to przyjmie postać:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} [F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}] \quad (2.25)$$

Tensor odkształcenia wyrażony przez przemieszczenia można opisać jako:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m \left[ \left( \frac{\partial u_m}{\partial X_i} + \delta_{im} \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial X_j} + \delta_{jm} \right) - \delta_{ij} \right] \quad (2.26)$$

co po rozwinięciu przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\
 e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right] = e_{21} \\
 e_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right] = e_{32} \\
 e_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right] = e_{13}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Tensor odkształcenia Greena-Lagrange'a wyrażony przez tensor deformacji  $\mathbf{F}$  lub tensor przemieszczenia  $\mathbf{G}$  ma postać:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) + \frac{1}{2} \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Przedstawiając gradient deformacji w układzie przestrzennym, otrzymuje się równoważny tensor odkształcenia zwany tensorem Almansięgo-Hamela:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \right) \tag{2.29}$$

Przyjmując, że osie lokalnego układu współrzędnych są oznaczone jako  $x, y, z$ , składowe tensora odkształcenia Greena-St.-Venanta można oznaczyć jako  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  oraz  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ . Zakładając, że  $1/2 \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}$  oraz dodatkowo, że w przypadku struktur cienkościennych składowa odkształcenia normalna do powierzchni elementu  $\varepsilon_z$  jest pomijalnie mała, stan odkształcenia w ujęciu geometrycznie nieliniowym można przedstawić jako:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Jeżeli gradienty przemieszczeń  $\partial u_j / \partial X_i$  są małe, to można je pominąć w równaniach (2.26) i (2.29), otrzymując wyrażenie dla tensora odkształcenia nieskończenie małego:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.31)$$

lub po rozpisaniu na składowe względem osi  $x, y, z$ :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Tensor odkształceń skończonych  $e_{ij}$  zawiera iloczyny składowych gradientu przemieszczeń, co powoduje, że tensor ten jest nieliniowy. Ponieważ przy jego wyznaczaniu nie czyni się żadnych założeń co do wielkości deformacji, jest on od niej niezależny i właściwy dla każdego poziomu deformacji. Tensor odkształceń nieskończenie małych  $\varepsilon_{i,j}$  nie zawiera części nieliniowych, stąd jego ograniczenie co do wielkości deformacji.

W ogólnym przypadku do wyznaczenia jest 12 niewiadomych (9 składowych tensora  $e_{ij}$  i 3 składowe przemieszczenia  $u_i$ ), do dyspozycji jest tylko 9 równań. Aby możliwe było rozwiązanie zagadnienia, potrzebne są jeszcze relacje pomiędzy naprężeniem a odkształceniem, czyli związki konstytutywne oraz zdefiniowane warunki brzegowe.

### 2.3. Związki konstytutywne

Przy założeniu, że deformacje, jakim jest poddawane ciało, są duże, lecz odkształcenia pozostają nieskończenie małe, prawa fizyczne opisujące zależność naprężenie–odkształcenie mogą pozostać liniowe dla dużej grupy materiałów konstrukcyjnych w szerokim zakresie poziomów obciążenia.

Zależność wiążąca składowe tensora odkształcenia i naprężenia przyjmuje postać funkcji liniowej wyrażonej jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.33)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}^T$  oznacza tensor naprężenia Kirchoffa:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]$$

i jest wektorem składowych stanu naprężenia, natomiast  $\mathbf{S}$  jest macierzą podatności materiału.

Zależność odwrotna, nazywana uogólnionym prawem Hooke'a, ma postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.34)$$

gdzie  $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}$  jest nazywane macierzą sztywności materiału.

W ogólnym przypadku ciała anizotropowego macierze  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{D}$  mają 36 składowych. Z uwagi na fakt, że  $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ji}$ , niezależnych elementów macierzy jest 21.

W przypadku materiału izotropowego macierz sztywności  $\mathbf{D}$ , wyrażona przez stałe inżynierskie  $E$  oraz  $\nu$ , przyjmuje postać:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

a macierz podatności  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

W przypadku szczególnym, kiedy rozpatrywane jest ciało dwuwymiarowe w płaskim stanie naprężenia, macierze sztywności i podatności redukują się do zależności:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Gdy konieczna jest analiza z uwzględnieniem odkształceń plastycznych, zakłada się, że odkształcenie jest zmienną funkcją naprężenia w zakresie powyżej granicy plastyczności i jest ono nieodwracalne. Całkowite odkształcenie można zatem wyrazić jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (2.39)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  odnosi się do deformacji sprężystej, a  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  do zakresu plastycznego.

Ponieważ deformacja plastyczna ma charakter przyrostowy, to również związki konstytutywne wyraża się w takiej formie:

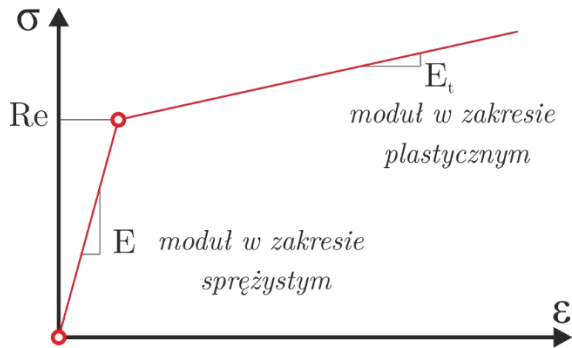
- w zakresie odkształceń sprężystych:  $d\varepsilon = \mathbf{S} d\sigma$ ,
- w zakresie odkształceń plastycznych:  $d\varepsilon = \lambda \sigma$ .

Zarówno parametr  $\mathbf{S}$ , jak i  $\lambda$  wyznacza się eksperymentalnie. Jednak w odróżnieniu od modułu Younga parametr  $\lambda$  nie jest wartością stałą i jest zależny od aktualnego poziomu naprężenia.

W praktyce często przyjmuje się przybliżony model materiału zwany sprężysto-plastycznym ze wzmocnieniem (rys. 2.4). Model ten zakłada, że do granicy plastyczności (wyznaczonej wg wybranej hipotezy wyteżenia) ma się do czynienia ze sztywnością określoną przez moduł Younga  $E$ , a w zakresie wyższego poziomu naprężenia sztywność zmienia się do wartości  $h$  i pozostaje stała powyżej tego poziomu.

Wartość  $h$  wyznacza formuła:

$$h = \frac{E_t}{1 - E_t/E}$$



Rys. 2.4. Model materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem

Kolejnym spotykanym modelem materiału, stosowanym zwłaszcza w analizie MES, jest model Ramberga-Osgooda [32, 109], który definiuje całkowite odkształcenie w postaci:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left( \frac{\sigma}{Re} \right)^{1/n_h} \quad (2.40)$$

gdzie  $K$  jest nazywane stałą umocnienia, a  $n_h$  to tzw. wykładnik umocnienia.



Jeżeli istnieje konieczność dokładniejszej analizy stanów plastycznych oraz rozpatrywane są zagadnienia wykraczające poza warunki statycznego obciążenia, to przyjmuje się bardziej zaawansowane modele uwzględniające intensywność prędkości odkształcenia plastycznego oraz wpływ temperatury na zachowanie się materiału. Wśród związków konstytutywnych tego rodzaju należy uwzględnić przede wszystkim model Johnsona-Cooka [47], Zerilli-Armstronga [161] oraz Cowpera-Symondsa [122]. Modele te zostały zaimplementowane w większości komercyjnych programów MES, wymagają jednak zdefiniowania dodatkowych stałych, co często wiąże się z koniecznością przeprowadzenia badań materiałowych w szerszym zakresie.

W przypadku ortotropii w PSN związek pomiędzy naprężeniem a odkształceniem można wyrazić jako:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

gdzie indeksy 1 i 2 odpowiadają głównym osiom ortotropii.

### **Energia odkształcenia**

Przyrost energii sprężystej na jednostkę objętości ciała można przedstawić jako kwadratową funkcję odkształceń Greena-Lagrange'a:

$$dU = \frac{1}{2} e_i E_{i,j} e_j \quad (2.42)$$

lub w formie macierzowej:

$$dU = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (2.43)$$

Energia sprężysta jest otrzymywana jako całka z objętości ciała w konfiguracji początkowej:

$$U = \int_{V_0} dU dX_1 dX_2 dX_3 \quad (2.44)$$

Wyrażenie (2.44) jest podstawą do formułowania większości definicji elementów w Metodzie Elementów Skończonych [7, 12, 22, 103, 108].

## 2.4. Rodzaje i źródła nieliniowości

Zdecydowana większość problemów inżynierskich w odniesieniu do projektowania struktur nośnych opiera się na liniowych relacjach pomiędzy deformacją a powodującym ją obciążeniem. W takiej sytuacji zakłada się, że odkształcenia rozważanej konstrukcji są nieskończenie małe [141]. Jednak w przypadku dużych deformacji, którym są poddawane np. cienkościennie konstrukcje lotnicze ulegające lokalnej utracie stateczności, nie można utrzymać w mocy tego założenia, ponieważ prowadziłoby ono do zbyt dużych rozbieżności modelu obliczeniowego w stosunku do rzeczywistego zachowania struktury. W takim przypadku obligatoryjne jest przyjęcie modelu matematycznego konstrukcji, który opiera się na nieliniowych relacjach pomiędzy odkształceniem i przemieszczeniami.

W ujęciu mechaniki ciała stałego nieliniowości mogą się objawiać w różnej postaci, ale w odniesieniu do elementów struktur nośnych najpowszechniej występują trzy przypadki [28, 108].

Pierwszym jest nieliniowość fizyczna związana z właściwościami materiału. Przykładem może być przeróbka plastyczna, kiedy naprężenie  $\sigma$  w materiale przekracza granicę proporcjonalności i relacja pomiędzy przyrostem odkształcenia  $\varepsilon$  i naprężenia uniemożliwia stosowanie liniowego prawa fizycznego w postaci wzoru Hooke'a. Wartość stałych materiałowych zależy od poziomu odkształcenia struktury i w przypadku ogólnym relacja pomiędzy naprężeniem a odkształceniem przyjmuje postać:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon)\varepsilon \quad (2.45)$$

Drugi przypadek obejmuje zakresy dużych deformacji. Fizycznie objawia się przez nieliniowe zależności odkształcenie–przemieszczenie ( $\varepsilon(\mathbf{u})$ ). Odkształcenia struktury w takim przypadku pozostają małe, ale przemieszczenia i rotacje mają skończone wartości. Matematycznie natomiast zależność odkształcenie–przemieszczenie jest wyrażona w formie równań kinematycznych:

$$\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.46)$$

gdzie:  $\mathbf{L}$  jest nieliniowym operatorem łączącym skończone (duże) odkształcenia wyrażone przez przemieszczenia, a  $\mathbf{u}$  – wektorem stanu zawierającym

składowe przemieszczenia. Równowaga wewnętrzna ciała, określająca zależność pomiędzy macierzą sił zewnętrznych  $\mathbf{b}$  a naprężeniem  $\boldsymbol{\sigma}$  może być wyrażona jako:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{D}^* \boldsymbol{\sigma} \quad (2.47)$$

W klasycznej, liniowej teorii sprężystości  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^T$ . W zagadnieniach nieliniowych zależność taka nie musi być prawdziwa. Przykładem nieliniowości geometrycznych są deformacje wiotkich elementów, takich jak sprężyny, łuki, belki i konstrukcje cienkościenne oraz wszelkie deformacje w stanach po utracie stateczności struktury lub w przypadku drgań.

Trzecim przypadkiem zjawisk, których nie można rozpatrywać na kanwie liniowych teorii deformacji, są nieliniowości więzów. W takim przypadku dochodzi do zmiany warunków brzegowych w miarę wzrostu deformacji struktury:

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{u}) \quad (2.48)$$

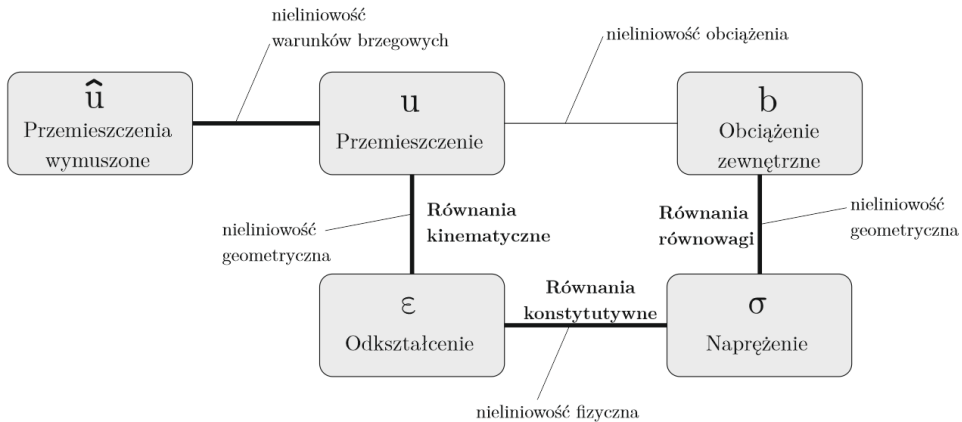
Przykładem tego rodzaju zjawisk mogą być zagadnienia kontaktowe, w tym również obciążenia udarowe.

Można jeszcze spotkać przypadki, kiedy zarówno wielkość, jak i rozkład obciążenia struktury zależą od bieżącego stanu jej deformacji. Mamy wtedy do czynienia z nieliniowością obciążenia, która cechuje się tym, że siły zewnętrzne są funkcją deformacji:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \quad (2.49)$$

W przypadku analiz strukturalnych istnieją zatem cztery możliwe źródła nieliniowości. Są to właściwości materiałowe, duże deformacje, nieliniowość obciążenia i nieliniowość warunków brzegowych. Rysunek 2.5 przedstawia zależności pomiędzy tymi wielkościami i ich wpływ na ogólną postać problemu do rozwiązania. W przypadku gdy ma się do czynienia z zagadnieniem liniowej teorii sprężystości, równania opisujące zachowanie struktury można budować z założeniem, że poszczególne parametry mogą być rozpatrywane oddzielnie. W rzeczywistości jednak każda z przedstawionych relacji może mieć charakter nieliniowy. Relacje pomiędzy siłami wewnętrznymi a naprężeniem (równania równowagi) oraz pomiędzy odkształceniem i przemieszczeniem (równania kinematyczne) są ze sobą ściśle związane i określenie „nieliniowość geometryczna” odnosi się do obu zestawów relacji.

Podobnie nieliniowości obciążenia i warunków brzegowych łączą się z przemieszczeniami i siłami zewnętrznymi działającymi na konstrukcję.



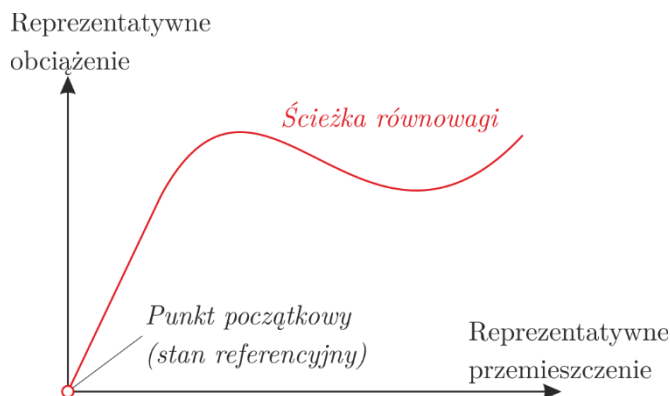
Rys. 2.5. Źródła nieliniowości (na podstawie [28])

## 2.5. Ścieżka równowagi

Do graficznego przedstawienia zachowania się struktury w stanie nieliniowych deformacji najczęściej wykorzystuje się tzw. wykresy odpowiedzi struktury lub krócej – ścieżki równowagi. Są to graficzne zależności pomiędzy obciążeniem i deformacją. Umożliwiają ilustrowanie i interpretowanie zjawiska zarówno pod względem fizycznym, jak i matematycznym.

Ścieżka równowagi najczęściej jest przedstawiana w układzie dwuwymiarowym, gdzie reprezentatywne obciążenie kreśli się w funkcji reprezentatywnej deformacji (rys. 2.6). Jeżeli graficznie zaprezentowana zależność jest nieliniowa, to zachowanie struktury również jest nieliniowe.

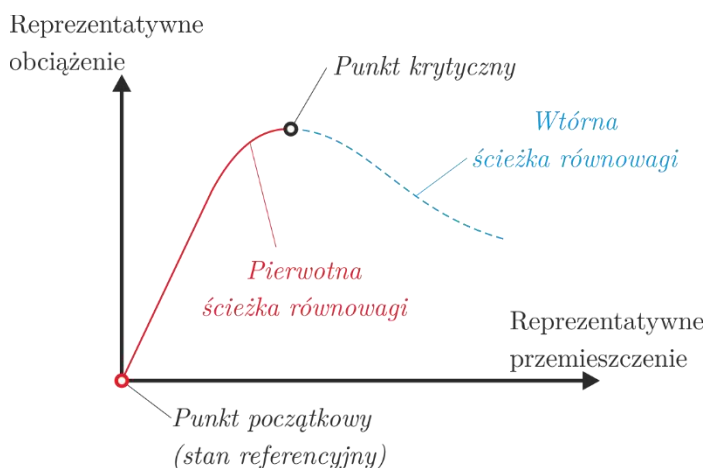
Aby odpowiedź struktury na zadane obciążenie lub przemieszczenie można było nazywać ścieżką równowagi, musi przedstawiać stan równowagi statycznej. W takim przypadku każdy punkt na ścieżce reprezentuje możliwy stan struktury. Biegun układu odniesienia jest nazywany stanem referencyjnym, od którego są mierzone obciążenie i deformacje struktury. Jednak w niektórych przypadkach stan referencyjny może być wybrany w dowolny sposób, jeżeli tylko wymaga tego proces formułowania zagadnienia lub przyjęta metoda rozwiązania.



Rys. 2.6. Zależność pomiędzy obciążeniem a deformacją struktury

Dla struktur idealnych, które nie posiadają żadnych imperfekcji oraz wstępnego obciążenia, stan referencyjny odnosi się do nieobciążonej i niezdeformowanej struktury znajdującej się w stanie równowagi statycznej.

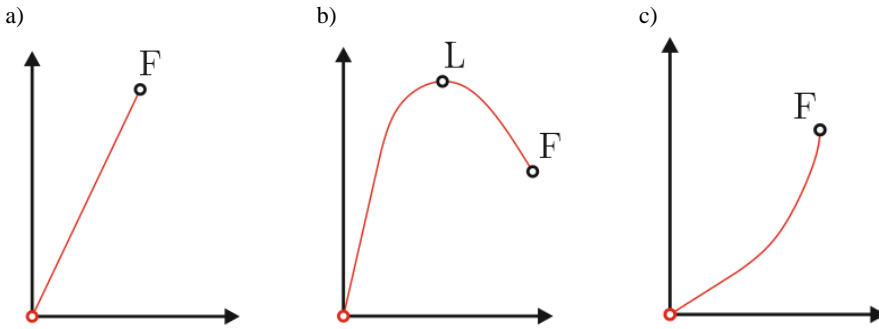
Ścieżka równowagi, która przecina stan referencyjny, jest określana jako zasadnicza lub pierwotna (rys. 2.7). Ścieżka ta biegnie aż do punktu krytycznego. Każda inna ścieżka równowagi, która nie przecina stanu referencyjnego, ale przechodzi przez punkt krytyczny, jest nazywana wtórną ścieżką równowagi.



Rys. 2.7. Pierwotna i wtórna ścieżka równowagi

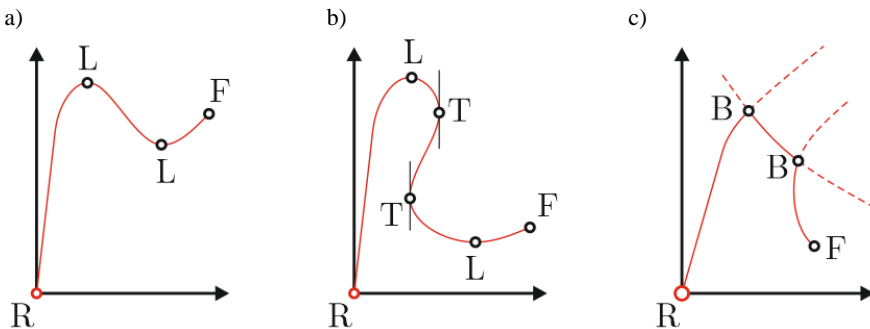
### Możliwe rodzaje odpowiedzi układu

Na rysunku 2.8 przedstawiono trzy podstawowe rodzaje odpowiedzi układów obejmujące relację liniową oraz malejącą i rosnącą sztywność układu.



Rys. 2.8. Podstawowe odpowiedzi nieliniowe:  
a) sztywność liniowa, b) sztywność malejąca, c) sztywność rosnąca

Kombinacje przedstawionych podstawowych rodzajów odpowiedzi nieliniowych prowadzą do sformułowania bardziej skomplikowanych układów. Na rysunku 2.9a przedstawiono utratę stateczności na skutek osiągnięcia maksymalnego obciążenia, cechującą struktury z małymi krzywiznami. Rysunek 2.9b przedstawia zachowanie się takich struktur, jak kopuły kratownicowe czy cienkie powłoki. Z kolei utratę stateczności ze zjawiskiem bifurkacji, które obserwuje się np. w przypadku powłok cienkościennych poddanych ścisłaniu, zaprezentowano na rys. 2.9c.



Rys. 2.9. Przykładowe odpowiedzi nieliniowe o charakterze złożonym:  
a) utrata stateczności przez osiągnięcie maksimum obciążenia (*snap-through*),  
b) utrata stateczności przez cofanie ścieżki po osiągnięciu punktu krytycznego (*snap-back*), c) utrata stateczności na skutek bifurkacji

## Punkty charakterystyczne

Niektóre punkty na ścieżce równowagi mają specjalne znaczenie. Wśród nich można wymienić punkty krytyczne, zwrotne (*turning*) i punkty zniszczenia (*failure*). Punkty krytyczne dzielą się na graniczne i punkty bifurkacji.

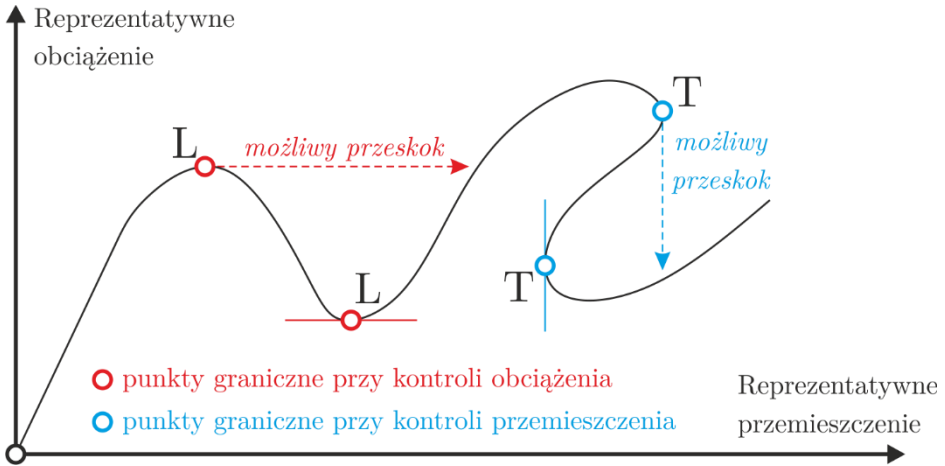
**Punkty graniczne ( $L$ )** – punkty, których styczna do ścieżki równowagi jest równoległa do osi reprezentującej deformację. W przypadku kontroli poziomu przemieszczenia w strukturze punkt graniczny będzie punktem, którego styczna jest równoległa do osi obciążenia.

**Punkty bifurkacji ( $B$ )** – miejsce krzyżowania się co najmniej dwóch ścieżek równowagi. Z fizycznego punktu widzenia w punktach tych struktura staje się niekontrolowana lub niemal niekontrolowana. Z tego powodu punkty te nabierają szczególnego znaczenia inżynierskiego.

**Punkty zwrotne ( $T$ )** – linie styczne do ścieżki w takich punktach są pionowe (równoległe do osi obciążenia). Nie są to punkty krytyczne w deformacji struktury i nie posiadają dużego znaczenia fizycznego, są jednak istotne w niektórych metodach obliczeniowych.

**Punkty zniszczenia ( $F$ )** – punkty, w których ścieżka nagle zatrzymuje się lub „urywa” z powodu fizycznego uszkodzenia lub zniszczenia struktury. Zjawisko takie może mieć charakter lokalny lub globalny. W przypadku lokalnego uszkodzenia (np. na skutek oddziaływań dynamicznych) ścieżka może przeskoczyć do innego stanu równowagi, a tym samym struktura odzyskuje możliwość przenoszenia dalszych obciążeń. Globalne uszkodzenie prowadzi natomiast do zniszczenia i struktura nie może już pełnić założeń dla niej funkcji.

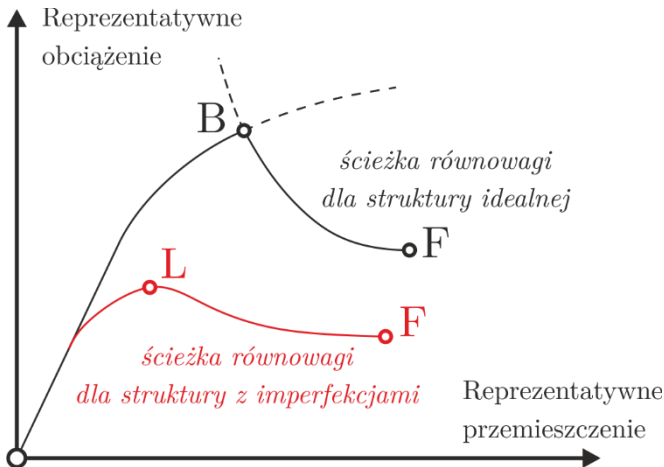
W trakcie rozwiązywania zagadnienia nieliniowego istotny jest również wybór niezależnego parametru kontrolnego wykorzystywanego do sterowania postępowaniem rozwiązania. Na rysunku 2.10 przedstawiono złożoną ścieżkę równowagi, która wymaga zarówno sterowania przyrostami obciążenia, jak i kontroli przemieszczenia.



Rys. 2.10. Punkty krytyczne na ścieżce równowagi w zależności od sposobu wymuszenia

### Wpływ imperfekcji

W rzeczywistych strukturach występują różnego rodzaju imperfekcje, zarówno natury geometrycznej związane z niedokładnościami wykonawczymi czy montażowymi, jak również wynikające z niejednorodności budowy materiału. Imperfekcje te niekiedy w sposób decydujący wpływają na sposób zachowania się struktury nośnej, co ma również odzwierciedlenie na reprezentatywnej ścieżce równowagi (rys. 2.11).



Rys. 2.11. Wpływ imperfekcji na ścieżkę równowagi



## 2.6. Równania stanu

Zasadniczym etapem rozwiązywania problemu w ujęciu numerycznym jest dyskretyzacja układu, zwana również idealizacją konstrukcji. Stanowi ona podstawę opracowania modelu matematycznego w postaci układu równań algebraicznych, zawierających jeden lub kilka parametrów kontrolnych związanych z realizacją obciążenia. Istota algebraicznego odwzorowania nieliniowości opiera się na założeniu, że na danym etapie rozwiązania, przy danym stopniu realizacji obciążenia odkształcony układ zachowuje stan równowagi statycznej. Równowaga dyskretnego układu mechanicznego w zagadnieniach analizy statyki nieliniowej, w sformułowaniu przemieszczeniowym, może być przedstawiona w formie równania sił residualnych:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

gdzie:  $\mathbf{u}$  – wektor stanu zawierający składowe przemieszczenia, czyli stopnie swobody struktury,  $\mathbf{r}$  – wektor niezrównoważonych sił residualnych związany z wektorem  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{A}$  – macierz zawierająca parametry kontrolne (w zagadnieniach mechaniki ciał odkształcalnych najczęściej są to obciążenia mechaniczne, ale mogą to być również uogólnione przemieszczenia, zmiany temperatury i inne).

W ujęciu matematycznym można stwierdzić, że  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{A}$  są zmiennymi odpowiednio aktywnymi i biernymi.

Zakłada się, że zależność  $\mathbf{r}$  od  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{A}$  ma charakter ciągły i poza punktami krytycznymi istnieją pierwsza i druga pochodna. Dla układów Clapeyrona, przy ustalonej wartości  $\mathbf{A}$  wektor  $\mathbf{r}$  jest gradientem całkowitej energii potencjalnej  $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{A})$ :

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{lub} \quad r_i = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} \quad (2.51)$$

Oznacza to, że warunkiem równowagi jest brak przyrostu energii potencjalnej.

Alternatywną formą równania równowagi, która uwidacznia fizyczne znaczenie, jest:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{A}) \quad (2.52)$$

gdzie:  $\mathbf{p}$  – wektor sił wewnętrznych,

$\mathbf{f}$  – wektor sił zewnętrznych zależny od parametrów kontrolnych oraz bieżącego stanu deformacji.

Spełnienie równania (2.52) oznacza, że siły wewnętrzne  $\mathbf{p}$  równoważą przyłożone obciążenie  $\mathbf{f}$ .

Całkowita energia układu może być wyrażona jako:

$$\Pi = U - P \quad (2.53)$$

gdzie  $U$  oznacza energię sprężystą,  $P$  zaś to praca obciążeń zewnętrznych.

Ponadto zachodzi zależność różniczkowa (2.52) oznaczająca, że wartość zarówno sił wewnętrznych, jak i zewnętrznych jest uzależniona od stanu energetycznego układu:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} \quad i \quad \mathbf{f} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.54)$$

### Macierz sztywności i macierz kontroli

Pochodna wektora sił residualnych  $\mathbf{r}$  względem składowych deformacji  $\mathbf{u}$ , przy zachowaniu stałych parametrów kontroli wyrażonych przez macierz  $\Lambda$  (tzn. w bieżącej konfiguracji) określa styczną macierz sztywności układu  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.55)$$

Odwrotność macierzy sztywności  $\mathbf{K}^{-1}$  jest macierzą podatności  $\mathbf{S}$  i poza punktami osobliwymi obie macierze są symetryczne.

Pochodna ujemnego wektora  $\mathbf{r}$  względem parametrów kontrolnych przy zachowaniu stałości  $\mathbf{u}$  prowadzi do określenia macierzy nazywanej macierzą kontrolną lub macierzą obciążenia:

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda} \quad (2.56)$$

### Reprezentacja parametryczna

Reprezentacja parametryczna wektorów  $\mathbf{u}$  i  $\Lambda$  jest przydatna w zagadnieniach pseudodynamicznych. Ogólna postać parametryczna przyjmuje postać:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \Lambda = \Lambda(t) \quad (2.57)$$

gdzie  $t$  jest bezwymiarowym parametrem pseudoczasu, określającym postęp w poszukiwaniu rozwiązania.

Pierwsze dwie pochodne cząstkowe składowych wektora sił residualnych  $\mathbf{r}$  względem pseudoczasu  $t$  mają postać:

$$\begin{aligned}\dot{r}_i &= \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{u}_j} \dot{\mathbf{u}}_j + \frac{\partial r_i}{\partial \Lambda_j} \dot{\Lambda}_j \\ \ddot{r}_i &= \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{\partial r_i}{\partial \mathbf{u}_j} \ddot{\mathbf{u}}_j + \left[ \frac{\partial^2 r_i}{\partial \mathbf{u}_j \partial \mathbf{u}_k} \dot{\mathbf{u}}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial \mathbf{u}_j \partial \Lambda_k} \dot{\Lambda}_k \right] \dot{\mathbf{u}}_j + \\ &\quad + \frac{\partial r_i}{\partial \Lambda_j} \ddot{\Lambda}_j + \left[ \frac{\partial^2 r_i}{\partial \Lambda_j \partial \mathbf{u}_k} \dot{\mathbf{u}}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial \Lambda_j \partial \Lambda_k} \dot{\Lambda}_k \right] \dot{\Lambda}_j\end{aligned}\quad (2.58)$$

co w zapisie macierzowym można przedstawić jako:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\dot{\Lambda} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\ddot{\Lambda} - \dot{\mathbf{Q}}\dot{\Lambda}\end{aligned}\quad (2.59)$$

gdzie pochodne  $\dot{\mathbf{K}}$  i  $\dot{\mathbf{Q}}$  są macierzami o elementach:

$$\dot{K}_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 r_i}{\partial \mathbf{u}_j \partial \mathbf{u}_k} \dot{\mathbf{u}}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial \mathbf{u}_j \partial \Lambda_k} \dot{\Lambda}_k \right] \quad (2.60)$$

$$\dot{Q}_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 r_i}{\partial \Lambda_j \partial \mathbf{u}_k} \dot{\mathbf{u}}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial \Lambda_j \partial \Lambda_k} \dot{\Lambda}_k \right] \quad (2.61)$$

Człony, takie jak  $\partial^2 r_i / \partial \mathbf{u}_j \partial \mathbf{u}_k$  są trójwymiarowymi obiektami, które mogą być przedstawione jako macierze sześciennie.

Macierze  $\dot{\mathbf{K}}$  i  $\dot{\mathbf{Q}}$  często są przedstawiane bezpośrednio w formie pochodnych względem pseudoczasu:

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \quad i \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \quad (2.62)$$

### Redukcja liczby parametrów kontrolnych

Wspomniane wcześniej zależności odnoszą się do dowolnej struktury, o dowolnej liczbie stopni swobody, a co za tym idzie – o dowolnej liczbie parametrów kontrolnych. Należy zaznaczyć, że parametry te nie są od siebie niezależne.

W wielu przypadkach jednak rozwiązanie można podzielić na pewne etapy związane z przykładaniem kolejnych obciążeń lub ich wzrostem

w miarę deformacji struktury. Rozwiązanie dzieli się wtedy na procesy zwane analizą etapu lub prosto etapem. Zakładając jednocześnie, że składowe macierzy kontrolnej  $\mathbf{A}$  zmieniają się proporcjonalnie, można dla uproszczenia wprowadzić jeden parametr kontrolny  $\lambda$ , który zmienia się w zakresie od 0 do 1 w danym etapie. Innymi słowy, jeżeli etap zdefiniujemy jako awansowanie rozwiązania ze stanu  $\mathbf{A}_A$  do stanu  $\mathbf{A}_B$ , to parametr  $\lambda$  można związać z postępowaniem rozwiązania jako:

$$\mathbf{A} = (1 - \lambda)\mathbf{A}_A + \lambda\mathbf{A}_B \quad (2.63)$$

Parametr  $\lambda$  jest zatem parametrem kontrolnym w danym etapie. Równanie nieliniowe, opisujące zmianę pomiędzy stanem  $A$  i  $B$  przyjmie postać:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (2.64)$$

gdzie dla stanu początkowego  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_A$  dla  $\lambda = 0$  i  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_B$  dla  $\lambda = 1$ .

Równania równowagi w funkcji parametru kontrolnego dla danego etapu można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}\dot{\lambda} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}\ddot{\lambda} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda} \\ \mathbf{K} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{u}} \quad \mathbf{q} = -\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \end{aligned} \quad (2.65)$$

gdzie  $\mathbf{K}$  oznacza macierz sztywności, a  $\mathbf{q}$  jest wektorem przyrostu obciążenia.

Podstawowym założeniem przy podziale rozwiązania na etapy i przyrosty obciążenia jest, aby każdy stan konstrukcji odpowiadał stanowi równowagi statycznej, zatem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}\dot{\lambda} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}\ddot{\lambda} + \dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda} \end{aligned} \quad (2.66)$$

W punktach ścieżki równowagi nieobejmujących punktów krytycznych macierz sztywności  $\mathbf{K}$  jest nieosobliwa. Możliwe jest zatem znalezienie rozwiązania w postaci:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}\dot{\lambda} = \mathbf{v}\dot{\lambda} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} = \mathbf{u}' = \mathbf{v} \quad (2.67)$$

gdzie wektor  $\mathbf{v}$  jest nazywany wektorem prędkości przyrostu obciążenia i wyraża się jako:

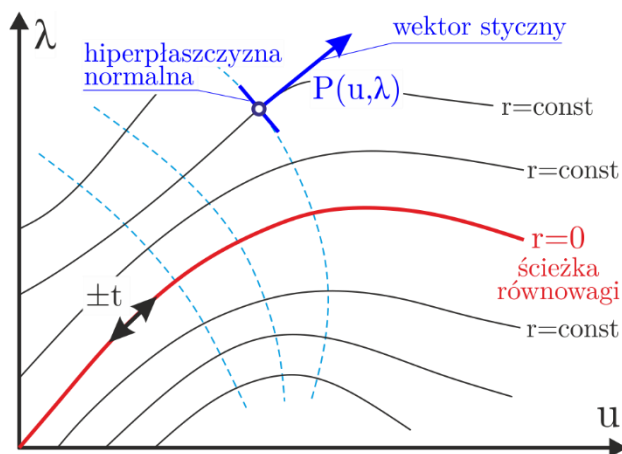
$$\mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \quad (2.68)$$

Równanie sił residualnych (2.50) lub też jego sparametryzowana postać (2.64) odnosi się do układu o dowolnej, skończonej liczbie stopni swobody. Gdy liczba stopni swobody wynosi  $n$ , rozpatrywane zagadnienie nieliniowe zachodzi w  $n$ -wymiarowej przestrzeni stanu. Przedstawienie graficzne zagadnienia jest możliwe w przypadku co najwyżej dwóch stopni swobody. Pomocne w interpretacji wykresy sporządzane w układzie  $\mathbf{u}-\lambda$  mogą również dotyczyć wybranych fragmentów modelu struktury, w szczególności jej wyselekcjonowanych węzłów, których przemieszczenia stanowią wielkości reprezentatywne dla rozważanego nieliniowego zagadnienia.

Interpretacja graficzna może także dotyczyć pojedynczego parametru geometrycznego, zależnego w określony sposób od przemieszczeń struktury jako całości. Ograniczając formę prezentacji graficznej do jednego stopnia swobody, dla równania:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \text{const} \quad (2.69)$$

można skonstruować wykresy w układzie  $\mathbf{u}-\lambda$  (rys. 2.12), stanowiące rodzinę krzywych odpowiadających stałym wartościom wektora  $\mathbf{r}$ . W szczególnym przypadku, gdy  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , otrzymuje się krzywą będącą ścieżką równowagi układu.



Rys. 2.12. Rodzina krzywych odpowiadająca stałym wartościom wektora  $\mathbf{r}$

Przedstawiona na rys. 2.12 rodzina krzywych tworzy pole przyrostowe, określone równaniem różniczkowym (2.65).

Parametr pseudoczasu  $t$  jest związany określoną zależnością z parametrem kontroli stanu  $\lambda$ . W ogólnym przypadku parametry te nie muszą być tożsame. Gdy jednak przyjęte zostanie takie założenie, tj. gdy

$$\lambda \equiv t \quad (2.70)$$

wówczas pole przyrostowe określa równanie:

$$\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad (2.71)$$

co można zapisać następująco:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad (2.72)$$

Ze związków (2.71) i (2.72) wynika, że:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}' - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \text{ gdzie } \mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \quad (2.73)$$

Zakładając, że macierz  $\mathbf{K}$  jest nieosobliwa, na podstawie związku (2.68) otrzymuje się:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{v} \quad (2.74)$$

a zatem w przypadku utrzymania w mocy założenia (2.70) gradient zmian składowych wektora stanu związanych z przyrostem pseudoczasu można utożsamiać ze zdefiniowaną wcześniej prędkością przyrostu obciążenia.

Dla każdego nieosobliwego punktu należącego do dowolnej z krzywych pola przyrostowego można określić wektor styczny do krzywej w tym punkcie:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Wychodząc z punktu  $P(\mathbf{u}, \lambda)$  oraz zakładając, że przy dodatnim zwrocie wektora  $\mathbf{t}$  wielkości  $\mathbf{u}$  i  $\lambda$  doznają odpowiednio przyrostów:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_P \\ \Delta \lambda &= \lambda - \lambda_P \end{aligned} \quad (2.76)$$

można sformułować równanie hiperpłaszczyzny ortogonalnej do wektora  $\mathbf{t}$  w punkcie  $P$ :

$$\mathbf{v}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda = 0 \quad (2.77)$$

zaś różniczkując równanie względem pseudoczasu  $t$ , otrzymuje się:

$$\mathbf{v}^T \dot{\mathbf{u}} + \dot{\lambda} = 0 \quad (2.78)$$

Graficzną interpretację wektora stycznego do dowolnej krzywej pola przyrostowego w punkcie  $P$  oraz płaszczyzny ortogonalnej do wektora stycznego, dla układu o jednym stopniu swobody, przedstawiono na rys. 2.12. Jak wynika z rysunku, równanie (2.78) określa pole ortogonalne do zdefiniowanego wcześniej pola przyrostowego. Krzywe pola ortogonalnego zaznaczono przerywanymi liniami.

Dla dwóch stopni swobody równanie (2.78) określa rodzinę powierzchni, których płaszczyzny styczne w punktach przecięcia się z powierzchnią pola przyrostowego (przykładowo ze ścieżką równowagi) są ortogonalne do wektorów stycznych określonych w tych punktach. Lewa strona równania (2.77) sprowadzona do postaci bezwymiarowej:

$$\Delta s = \frac{1}{\zeta} (\mathbf{v}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda) = 0 \quad (2.79)$$

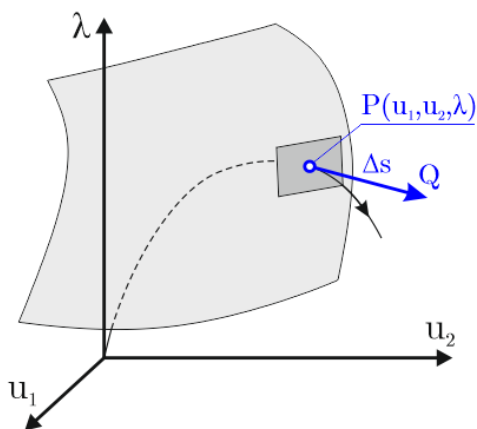
gdzie

$$\zeta = |t| = \sqrt{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (2.80)$$

może być interpretowana jako miara odległości pomiędzy płaszczyzną normalną do powierzchni pola przyrostowego w punkcie  $P$  oraz płaszczyzną do niej równoległą, której punkt  $Q(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda)$  jest wyznaczany przez koniec wektora stycznego. W przypadku przyrostów elementarnych równanie (2.79) można zapisać w postaci:

$$ds = \frac{1}{\zeta} (\mathbf{v}^T d\mathbf{u} + d\lambda) = 0 \quad (2.81)$$

Ograniczając rozważania do układu o jednym stopniu swobody, wielkość  $\Delta s$  może być interpretowana jako długość elementarnego odcinka łuku krzywej pola przyrostowego. Interpretację graficzną opisanych zależności dla układu o dwóch stopniach swobody przedstawiono na rys. 2.13.



Rys. 2.13. Graficzna interpretacja współzależności parametru  $\lambda$  od składowych wektora stanu  $u_1, u_2$

Przedstawione zależności stanowią podstawę ustalania przebiegu ścieżki równowagi dla metod numerycznych określanych jako metody kontroli długości łuku [114, 154].



## 3. NUMERYCZNE METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENÍ NIELINIOWYCH

### 3.1. Wprowadzenie

Podstawowe narzędzie numerycznego rozwiązywania inżynierskich zagadnień stanowi obecnie Metoda Elementów Skończonych (MES). Jest ona procedurą wariacyjną, w której funkcje aproksymujące są wyznaczane w obszarze zastąpionym przez zbiór podobszarów, na jakie ten został podzielony. Jest ona uogólnieniem metody Ritz'a [8] polegającym na wyborze funkcji rozwiązujących, różnych od zera tylko w niewielkiej części obszaru, w którym jest poszukiwane rozwiązanie. Funkcje rozwiązujące zapewniają ciągłość rozwiązania na granicy elementów, a same elementy przyjmują kształt prostych figur lub brył. Zarówno wielkość i kształt elementów, jak i liczba niewiadomych wpływają na dokładność rozwiązania.

Intensywny rozwój MES zapoczątkowany w połowie ubiegłego stulecia trwa do chwili obecnej, czego wyrazem jest bogata baza literaturowa obejmująca zagadnienia odnoszące się do podstaw teoretycznych wykorzystywanych procedur numerycznych oraz do przykładów aplikacyjnych. Do podstawowych pozycji monograficznych poruszających to zagadnienie zaliczyć można przede wszystkim pozycje O.C. Zienkiewicza [164, 165] i K.J. Bathego [7]. Problematykę analiz nieliniowych poruszali w szczegółowych opracowaniach tacy autorzy, jak M. Bhatti [11], C. Felippa [28], T. Belytschko [9], czy też P. Wriggers [155]. Z pozycji w języku polskim z całą pewnością należy wyróżnić prace: G. Rakowskiego i Z. Kacprzyka [108], M. Dacki [22] oraz M. Kleibera [57].

W zagadnieniach wytrzymałości konstrukcji podstawowe równanie MES w odniesieniu do zagadnienia statyki ma postać:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (3.1)$$

gdzie:  $\mathbf{f}$  – wektor sił zewnętrznych,  $\mathbf{u}$  – odpowiadający mu wektor deformacji,  $\mathbf{K}$  – macierz sztywności konstrukcji.

Macierz  $\mathbf{K}$  odnosząca się do konstrukcji jest budowana jako agregacja macierzy sztywności poszczególnych elementów:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}^{(e)} = \sum_{e=1}^n \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{a}_e \quad (3.2)$$

gdzie  $\mathbf{a}_e$  – macierz alokacji elementu, która definiuje położenie składowych lokalnej macierzy sztywności w macierzy globalnej odnoszącej się do całej konstrukcji.

Lokalna macierz sztywności  $\mathbf{k}$  elementu (dla wygody zapisu pominięto wskaźnik  $e$ ) jest wyznaczana przed analizą i przygotowuje się ją odpowiednio dla każdego rozważanego problemu fizycznego. W przypadku ogólnym dla zagadnień deformacji ciał stałych ma ona postać:

$$\mathbf{k} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (3.3)$$

gdzie:  $\mathbf{D}$  – macierz sztywności materiału,  $\mathbf{B}$  – macierz pochodnych funkcji kształtu elementu.

Funkcje kształtu są funkcjami interpolującymi rozkład wielkości fizycznych wewnątrz elementu. Funkcje te, będące najczęściej wielomianami Lagrange’a lub Hermita, muszą spełniać warunek możliwości ruchu ciała jako bryły sztywnej oraz zapewnić ciągłość przemieszczeń wewnątrz elementu i ich zgodność na granicach elementów sąsiadujących [12].

Funkcje kształtu wyznacza się, wychodząc z równania różniczkowego opisującego rozważany problem fizyczny, a następnie zakłada się postać funkcji rozwiązującej. Zastosowanie zasady minimum energii potencjalnej układu umożliwi określenie współczynników funkcji.

Jeżeli brak jest relacji liniowych pomiędzy obciążeniem a deformacją struktury, to wyróżnia się dwa podstawowe zachowania ze względu na zmiany sztywności. Rysunek 2.8b przedstawia konstrukcję o sztywności malejącej, natomiast rys. 2.8c – o sztywności rosnącej. W obydwu przypadkach sztywność jest opisana za pomocą krzywej  $\mathbf{f}$  od  $\mathbf{u}$ . Styczna  $\mathbf{K}$  do tej krzywej nie jest zatem stała w kolejnych punktach i można ją przedstawić jako:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}^{NL} \quad (3.4)$$

gdzie:  $\mathbf{K}_0$  jest początkową sztywnością konstrukcji, natomiast  $\mathbf{K}^{NL}$  wyraża zmianę sztywności z uwagi na nieliniowość.

W przypadku nieliniowości równanie MES przyjmuje zatem postać uwzględniającą zmiany sztywności struktury w zależności od poziomu jej deformacji:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (3.5)$$

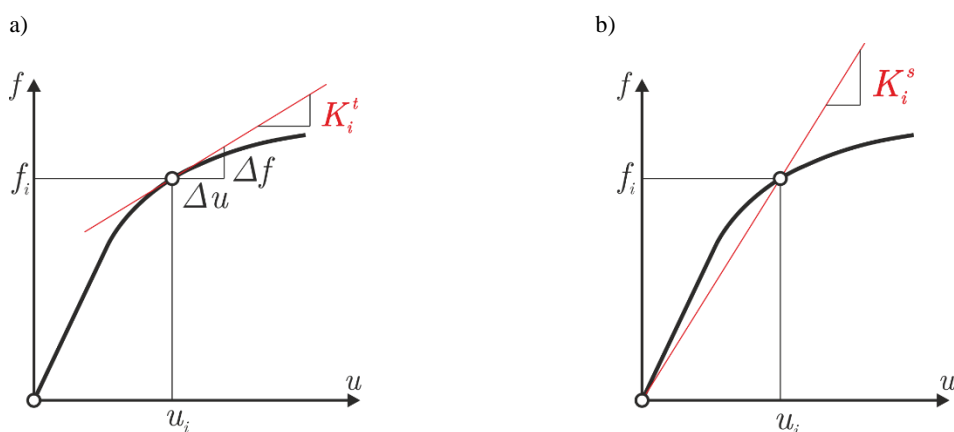
Styczna do ścieżki równowagi może być przedstawiona jako granica stosunku przyrostu obciążenia do przyrostu deformacji (rys. 3.1a). W ten sposób definiuje się sztywność struktury, a dokładniej sztywność styczną do reprezentatywnego obciążenia i deformacji:

$$K_i^t = \left( \frac{df}{du} \right)_i \cong \left( \frac{\Delta f}{\Delta u} \right)_i \quad (3.6)$$

Znak sztywności stycznej (modułu) jest związany ze statecznością struktury. Sztywność ujemna wiąże się ze stanem niestatecznym. Sztywność dodatnia jest warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym do stateczności stałej.

Sztywność sieczna w danym punkcie (rys. 3.1b) wyraża się jako:

$$K_i^s = \frac{f_i}{u_i} \quad (3.7)$$



Rys. 3.1. Definicja sztywności struktury: a) sztywność styczna, b) sztywność sieczna

### 3.2. Metody rozwiązania

Konstruowanie ścieżki równowagi rozpatrywanego układu wymaga wyznaczenia punktów hiperprzestrzeni stanu, spełniających równanie sił residualnych. Wynik rozwiązania stanowią skojarzenia parametrów stanu, którym odpowiadają kolejne konfiguracje geometryczne rozważanego układu, zapewniające jego równowagę statyczną.

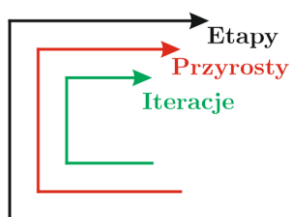
Dla konstrukcji rzeczywistej wyznaczanie ścieżki równowagi wiąże się z przeprowadzaniem badań eksperymentalnych określających zależności pomiędzy obciążeniami i przemieszczeniami reprezentatywnych parametrów struktury, przy czym liczba reprezentatywnych punktów pomiarowych w trakcie badań powinna być dostatecznie duża, by na tej podstawie możliwe było opracowanie adekwatnego modelu matematycznego.

Uzasadnia to koncepcję prowadzenia analiz opierających się na założeniu, że przebieg rozwiązania ma charakter etapowy i składa się z określonej liczby stanów deformacji struktury. Każdemu kolejnemu stanowi odpowiada kombinacja zmieniających się parametrów kontrolnych związanych z obciążeniem układu, wyrażanych przez pojedynczy parametr kontroli stanu  $\lambda$ . Każdemu stanowi struktury odpowiada punkt hiperprzestrzeni stanu należący do ścieżki równowagi, a ściślej – oddalony od niej o dostatecznie mały dystans określony tolerancją, wynikającą z przyjętej dokładności poszukiwania rozwiązania.

Przejście od danego stanu do stanu kolejnego jest inicjowane przez zmianę parametru kontrolnego, któremu odpowiada nowa geometria struktury określona przez nowy wektor stanu. Przejście to nosi miano kroku przyrostowego lub przyrostu. Przejście od danego stanu do stanu kolejnego wiąże się z koniecznością określenia nowej konfiguracji struktury, odpowiadającej nowemu położeniu równowagi statycznej. Faza ta stanowi istotę rozwiązania, a zbieżność otrzymanego wyniku z potwierdzoną w eksperymencie odpowiedzią układu rzeczywistego w istotnej mierze zależy od skuteczności zastosowanego algorytmu. Algorytmy te opierają się na wielu kombinacjach metod numerycznych i wykorzystują uwarunkowania pozwalające określać właściwy zwrot kroku przyrostowego, jak również punkty charakterystyczne pojawiające się na ścieżkach równowagi i skutecznie je przekraczać.

Jakkolwiek w programach komercyjnych struktura algorytmów nie jest udostępniana przez producenta użytkownikowi, to jednak w mniejszym lub większym stopniu możliwa jest ingerencja w procedury rozwiązania. Dobór właściwych parametrów algorytmu rozwiązania jest zazwyczaj kłopotliwy i na ogół wymaga wielu powtórzeń.

Zagadnienia nieliniowe rozwiązuje się zazwyczaj, dzieląc analizę na etapy, które następnie są dzielone na kroki przyrostowe. Te z kolei, w zależności od wybranej metody rozwiązania, mogą być jeszcze podzielone na iteracje (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Procedura rozwiązania zadania nieliniowego

Podział na etapy rozwiązania jest podyktowany wysokim skomplikowaniem zagadnień nieliniowych. Zbiór parametrów kontrolnych wewnątrz etapu obliczeniowego nie zmienia się względem siebie niezależnie, można je zatem wyrazić przez parametr kontroli etapu  $\lambda$ . Kolejne etapy są uzależnione od siebie niemal wyłącznie przez stany graniczne. Oznacza to, że ostatni krok etapu poprzedniego staje się początkowym dla kolejnego etapu.

Metody rozwiązania można podzielić na dwie zasadnicze grupy:

1. Metody czysto przyrostowe – zwane również metodami prognostycznymi.
2. Metody korekcyjne – nazywane prognostyczno-korekcyjnymi lub przyrostowo-iteracyjnymi.

W celu awansowania rozwiązania etap jest podzielony na kroki przyrostowe. Jeżeli wymagany krok przyrostowy zostanie oznaczony jako krok  $n$ , to wtedy po przyroście wektor stanu przyjmie wartość  $\mathbf{u}_n$ . Pomiedzy kolejnymi krokami przyrostowymi parametr stanu  $\lambda$  i wektor stanu  $\mathbf{u}$  doznają przyrostów o odpowiednio  $\Delta\lambda$  i  $\Delta\mathbf{u}$ .

Wspólną cechą obydwu metod jest występowanie fazy przyrostowej. Poszukiwanie rozwiązania nieliniowego polega na kontroli przyrostów:

$$\Delta \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n; \quad \Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (3.8)$$

które spełniają równanie sił residualnych  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$  z zadaną dokładnością.

Ponieważ układ równań jest hiperstatyczny, wprowadza się dodatkowy warunek związany z wybraną strategią kontroli przyrostu, który w ogólnej postaci można wyrazić jako:

$$c(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \lambda_n) = 0 \quad (3.9)$$

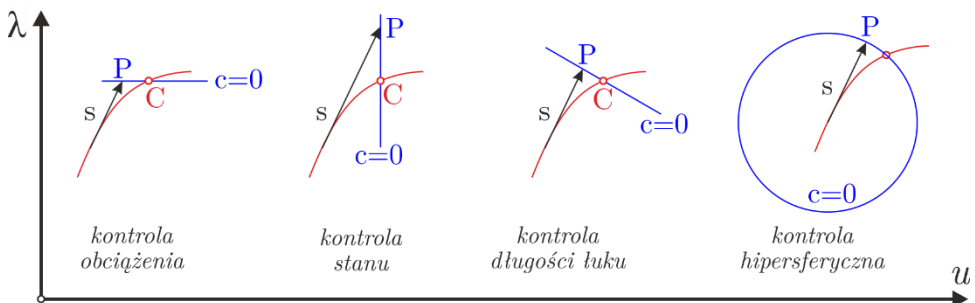
Po zróźniczkowaniu  $c$  względem pseudoczasu  $t$  otrzymuje się:

$$a^T \dot{\mathbf{u}} + g \dot{\lambda} = 0 \quad (3.10)$$

gdzie

$$a^T = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}}; \quad g = \frac{\partial c}{\partial \lambda} \quad (3.11)$$

Podstawowe sposoby kontroli przyrostu przedstawiono graficznie na rys. 3.3. Kontrola ta objawia się sposobem wyznaczenia punktu  $P$  określającego kolejną konfigurację układu. Należą do nich kontrola obciążenia, kontrola stanu (przemieszczenia), kontrola długości łuku (Riksa-Wempnera) oraz kontrola hipersferyczna. Każda z metod cechuje się odmiennym poziomem dokładności, ale również skomplikowaniem w numerycznej realizacji algorytmów.



Rys. 3.3. Metody kontroli przyrostu

Jak wcześniej wspomniano, sposób rozwiązania zadania zależy od wyboru strategii kontroli, wśród których wyróżnia się kilka rodzajów. Podstawową metodą jest kontrola parametru  $\lambda$ , który jest np. wartością obciążenia. Zakłada się, że przyrost dla danego kroku rozwiązania wynosi  $\Delta\lambda_n = l_n$ :

$$c(\Delta\mathbf{u}_n, \Delta\lambda_n) = \Delta\lambda_n - l_n = 0 \quad (3.12)$$

gdzie  $l_n$  jest bezwymiarową wartością określającą wielkość przyrostu.

W postaci różniczkowej warunek przedstawia się jako:

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{g} = 1 \quad (3.13)$$

Kontrola staje się jednak nieprzydatna w przypadku natrafienia na punkty krytyczne.

Kolejną metodą jest kontrola stanu konstrukcji przy stałych parametrach  $\lambda$ :

$$c(\Delta\mathbf{u}_n) = (\Delta\mathbf{u}_n^T \Delta\mathbf{u}_n)^2 - l_n u^2 = 0 \quad (3.14)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest związane z wielkością deformacji.

W przypadku skomplikowanych odpowiedzi układu obejmujących punkty bifurkacji adekwatna staje się grupa metod oparta na kontroli długości łuku, gdzie wykorzystywana jest długość  $|\Delta s|$  wzdłuż stycznej do ścieżki równowagi. W takiej sytuacji dodatkowy warunek równowagi przyjmuje postać zwaną warunkiem Riksa-Wempnera [115, 154]:

$$c(\Delta\mathbf{u}_n, \Delta\lambda_n) = |\Delta s_n| - l_n = \frac{1}{f_n} |v_n^T \Delta\mathbf{u}_n + \Delta\lambda_n| - l_n = 0 \quad (3.15)$$

### Ogólna postać rozwiązania zagadnienia nieliniowego

Pierwszy etap rozwiązania problemu nieliniowego składa się z fazy predykcyjnej, w której przyjmuje się pierwsze przybliżenie parametrów kontrolnych:

$$\Delta\mathbf{u}_n^0 \text{ i } \Delta\lambda_n^0 \quad (3.16)$$

wynikających z warunku:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}\dot{\lambda} \quad (3.17)$$

co prowadzi do postaci:

$$\Delta \mathbf{u}_n^0 = \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{q}_n \Delta \lambda_n^0 = \mathbf{v}_n \Delta \lambda_n^0 \quad (3.18)$$

gdzie  $\mathbf{v}$  jest wektorem prędkości przyrostu obciążenia określonym równaniem (2.68).

Procedura jest uzupełniana wybraną strategią kontroli przyrostu  $c(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \lambda_n)$ .

Wartości  $\Delta \mathbf{u}$  i  $\Delta \lambda$ , które spełniają warunki kontroli przyrostu  $c = 0$ , zazwyczaj charakteryzują się symetrią. Oznacza to, że równania są spełnione dla wartości  $\pm \Delta \mathbf{u}$  i  $\pm \Delta \lambda$ . Konieczne jest zatem wprowadzenie dodatkowego kryterium, które umożliwi awansowanie rozwiązania w poprawnym kierunku ścieżki równowagi.

Najprostszy, a jednocześnie najczęściej stosowany jest warunek dodatniej pracy sił zewnętrznych:

$$\Delta W = \mathbf{q}^T \mathbf{v} \Delta \lambda > 0 \quad (3.19)$$

co zapewnia, że znak  $\Delta \lambda$  jest zgodny z wyrażeniem  $\mathbf{q}^T \mathbf{v} = \mathbf{q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}$ .

Kryterium takie jest jednak niewłaściwe w punktach krytycznych (np. bifurkacji), gdzie  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{v}$  są wzajemnie ortogonalne:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{v} = 0 \quad (3.20)$$

W takiej sytuacji mamy do czynienia ze zjawiskiem cofania się deformacji (tzw. *ping-pong*). Żeby temu zapobiec, stosuje się kolejne kryterium, zwane warunkiem kątowym. Polega on na sprawdzaniu znaku iloczynu wektorów stycznych do ścieżki równowagi w dwóch kolejnych punktach iteracji rozwiązania:

$$\mathbf{t}_n^T \mathbf{t}_{n-1} > 0 \quad (3.21)$$

Jeżeli warunek jest spełniony, to wraca się do kryterium dodatniej pracy sił obciążających strukturę.

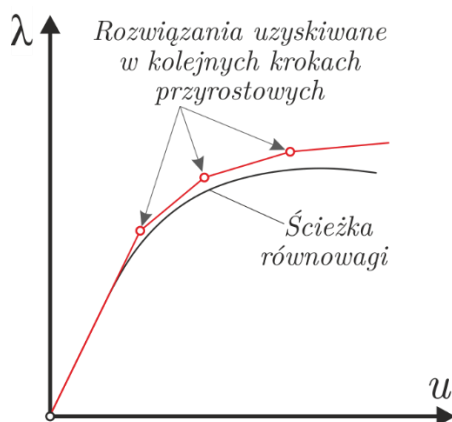
Metody czysto przyrostowe polegają zatem na etapowych obliczeniach, dla których przy zwiększeniu wartości parametru stanu  $\Delta \lambda$  (np. obciążenia) znajduje się odpowiadający mu przyrost deformacji (wektora stanu  $\Delta \mathbf{u}$ ). Rozwiązanie w tej metodzie zależy od liczby przyrostów obciążenia  $\Delta \lambda$ , ale czasochłonność metody rośnie z uwagi na konieczność częstego odwracania macierzy sztywności.



Należy jednak zaznaczyć, że zazwyczaj wartości  $\Delta \mathbf{u}_n^0$  i  $\Delta \lambda_n^0$  nie spełniają równania stanu  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ , tj.

$$\mathbf{r}_n^0 = \mathbf{r}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}_n^0, \lambda + \Delta \lambda_n^0) \neq 0 \quad (3.22)$$

a zjawisko takie jest określane jako błąd dryfu (rys. 3.4) skutkujący zwiększającym się w każdym kolejnym etapie błędem rozwiązania, uniemożliwiającym uzyskanie zadowalającej zbieżności.



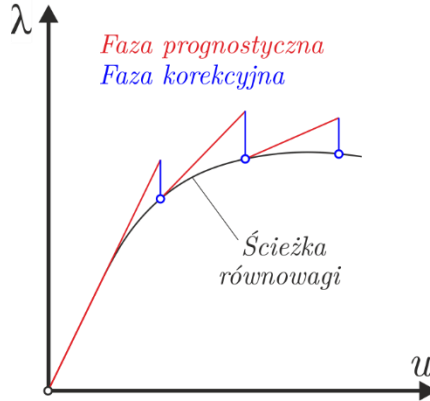
Rys. 3.4. Błąd dryfu

W metodach korekcyjnych stosuje się dodatkowy krok rozwiązania, zwany fazą korekcyjną mającą charakter iteracyjny. Krok ten ma na celu wyeliminowanie lub chociaż ograniczenie postępującego z każdym etapem błędu rozwiązania przez wprowadzenie poprawek  $\Delta \mathbf{u}_n^k$  i  $\Delta \lambda_n^k$ , które umożliwią spełnienie równania stanu. Najpowszechniej stosowaną metodą prognozyjno-korekcyjną jest metoda Newtona-Raphsona w różnych odmianach (rys. 3.5).

Faza korekcyjna rozpoczyna się po pierwszym przybliżeniu rozwiązania, a jej celem jest znalezienie takich wartości parametrów  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$  i  $\Delta \lambda_{n+1}$ , które spełnią warunki  $\mathbf{r} = 0$  i  $\mathbf{c} = 0$ . Faza składa się z wielu etapów iteracyjnych, w ramach których otrzymuje się wielkości:

$$\mathbf{u}_n^k, \lambda_n^k \quad (3.23)$$

gdzie  $k = 1, 2, \dots, m$  oznaczają kolejne iteracje.



Rys. 3.5. Metoda Newtona-Raphsona

Równanie sił residualnych  $\mathbf{r}$  i równanie kontroli przyrostu  $\mathbf{c}$  rozwija się w szereg Taylora:

$$\mathbf{r}_n^{k+1} = \mathbf{r}_n^k + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{u}_n} (\mathbf{u}_n^{k+1} - \mathbf{u}_n^k) + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \lambda_n} (\lambda_n^{k+1} - \lambda_n^k) + m.w.rz \quad (3.24)$$

$$c_n^{k+1} = c_n^k + \frac{\partial c_n}{\partial \mathbf{u}_n} (\mathbf{u}_n^{k+1} - \mathbf{u}_n^k) + \frac{\partial c_n}{\partial \lambda_n} (\lambda_n^{k+1} - \lambda_n^k) + m.w.rz \quad (3.25)$$

gdzie *m.w.rz* oznaczają małe wyższego rzędu, będące iloczynami wielkości, które są zazwyczaj pomijane.

Pamiętając, że:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{u}_n}, & \mathbf{q}_n &= -\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \lambda_n} \\ \mathbf{a}_n &= \frac{\partial c_n}{\partial \mathbf{u}_n}, & g_n &= \frac{\partial c_n}{\partial \lambda_n} \end{aligned} \quad (3.26)$$

dla danych wartości korekcji:

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{u}_n^{k+1} - \mathbf{u}_n^k, \quad \eta_n = \lambda_n^{k+1} - \lambda_n^k \quad (3.27)$$

otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & -\mathbf{q}_n \\ \mathbf{a}_n & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_n \\ \eta_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ c \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

gdzie pierwsza macierz po lewej stronie równania nosi nazwę rozszerzonej macierzy sztywności.

Ponieważ  $\mathbf{u}$ ,  $\lambda$  są rozwiązaniami warunków równowagi, a macierz  $\mathbf{K}$  jest nieosobliwa, to przez metodę eliminacji Gaussa można wyrugować  $\mathbf{d}$  z równania (3.28). Otrzymuje się zależność na  $\lambda$  w postaci:

$$(\mathbf{g}_n + \mathbf{a}_n^T \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{q}_n) \eta_n = -c + \mathbf{a}_n^T \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{r} \quad (3.29)$$

Oznaczając

$$\mathbf{K}_n \mathbf{d}_r = -\mathbf{r}, \quad \mathbf{K} \mathbf{d}_q = \mathbf{q} \quad (3.30)$$

otrzymamy

$$\eta_n = -\frac{c + \mathbf{a}_n^T \mathbf{d}_r}{g + \mathbf{a}_n^T \mathbf{d}_q}, \quad \mathbf{d}_n = \mathbf{d}_r + \eta_n \mathbf{d}_q \quad (3.31)$$

W każdym kroku fazy korekcyjnej muszą być zatem wyznaczone wartości  $\mathbf{r}$  oraz  $\mathbf{q}$ . W przypadku zmodyfikowanej metody Newtona-Raphsona, gdzie  $\mathbf{K}$  jest stałe w fazie korekcyjnej,  $\mathbf{q}$  nie ma wpływu na rozwiązanie.

Procedura rozwiązania zostaje zatrzymana, gdy spełnione jest wybrane kryterium zbieżności. Podstawowe kryteria to:

- kryterium zbieżności deformacji:

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} \leq \epsilon_d \quad (3.32)$$

- kryterium zbieżności równania stanu:

$$\|\mathbf{r}\| \leq \epsilon_r \quad (3.33)$$

Kryteria sprawdzają, czy w ostatnim kroku fazy korekcyjnej zmiana korekcji  $\mathbf{d}$  wektora stanu  $\mathbf{u}$  nie przekracza zadanej wartości dopuszczalnego błędu lub wartość równania stanu zawiera się w wybranym przedziale tolerancji.

Podstawowe wady metody Newtona to duży koszt obliczeniowy związany z koniecznością formowania macierzy sztywności  $\mathbf{K}^k = \mathbf{K}(\mathbf{u}^k, \lambda^k)$  w każdym kroku iteracyjnym oraz niska dokładność. Zbieżność rozwiązania nie jest gwarantowana, dopóki pierwsze przybliżenie nie jest bliskie rzeczywistemu rozwiązaniu. Metoda może prowadzić do wyznaczenia błędnej ścieżki równowagi, zwłaszcza w otoczeniu punktów bifurkacji.

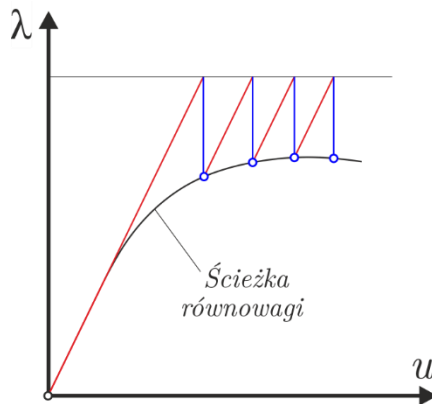
Z uwagi na powyższe stwierdzenia opracowana została grupa odmiennych metod, ale opartych na metodzie Newtona. Najpopularniejszą w aplikacji w komercyjnym oprogramowaniu komputerowym jest zmodyfikowana

metoda Newtona-Raphsona (rys. 3.6), która opiera się na schemacie iteracyjnym w postaci:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_n & -\bar{\mathbf{q}}_n \\ \mathbf{a}_n & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_n \\ \eta_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ c \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}_n^{k+1} = \mathbf{u}_n^k - \mathbf{d}_n, \quad \lambda_n^{k+1} = \lambda_n^k + \eta_n \quad (3.35)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{K}}_n$  i  $\bar{\mathbf{q}}_n$  oznaczają przybliżone wartości, które są utrzymywane jako stałe przez część lub wszystkie kroki iteracyjne danej fazy korekcyjnej.

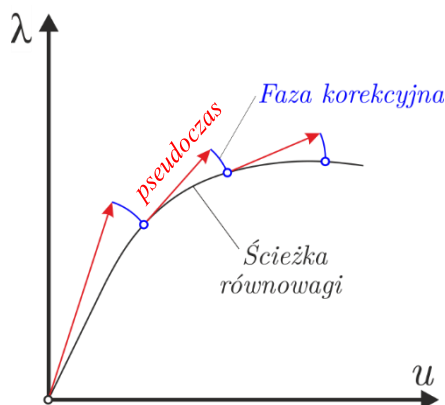


Rys. 3.6. Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona oparta na koncepcji stałej macierzy sztywności

### Metoda mieszana

Metoda mieszana łączy w sobie zarówno metodę przyrostową, jak i iteracyjną. W takim przypadku obciążenie  $R$  jest dzielone na przyrosty  $\Delta R_i$ . W dalszym kroku rozwiązania stosuje się procedurę metody Newtona-Raphsona lub zmodyfikowanej metody Newtona-Raphsona.

W przypadku analizy struktur cienkościennych, w których występują punkty krytyczne i przeskoki pomiędzy nimi, stosowana jest modyfikacja wymienionych metod związana z tzw. korekcją długości łuku [20, 115] (rys. 3.7).



Rys. 3.7. Schemat metody przyrostowo-iteracyjnej opartej na strategii kontroli hipersferycznej

### 3.3. Stateczność zlinearyzowana

Jeżeli nie zachodzi potrzeba analizy stanów deformacji pokrytycznych, wówczas w wielu przypadkach wystarczająca może się okazać zlinearyzowana analiza wybożenia. Sytuacja taka jest spotykana w przypadkach, gdy przyjmuje się warunek, że utrata stateczności struktury jest równoznaczna z jej zniszczeniem.

Podstawą tego typu analiz jest kryterium stateczności Eulera [141], nazywane metodą energetyczną lub metodą stanów przyległych. Stateczność jest oceniana przez porównywanie energii potencjalnej struktury w stanie deformacji (stanie przyległym) z energią w stanie równowagi statycznej. Równowaga stała jest zachowana, jeżeli w stanie przyległym energia potencjalna jest wyższa. W odmiennym przypadku, gdy energia ta jest niższa lub równa energii stanu równowagi, wówczas równowaga układu jest niestabilna (chwiejna).

Stateczność w ujęciu numerycznym można badać przez analizę stycznej macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ . Jeżeli przez  $\mu_i$  oraz  $\mathbf{z}_i$  zostaną oznaczone odpowiednio kolejne wartości własne i wektory (postaci) własne macierzy  $\mathbf{K}$ , to ich zbiór jest rozwiązaniem problemu własnego w postaci:

$$\mathbf{K}\mathbf{z}_i = \mu_i\mathbf{z}_i \quad (3.36)$$

Ponieważ macierz  $\mathbf{K}$  jest macierzą Hessego zawierającą drugie pochodne energii potencjalnej względem przemieszczeń układu, jest ona symetryczna i wszystkie jej wartości własne są liczbami rzeczywistymi. Wobec tego ocena rodzaju stanu równowagi układu sprowadza się do warunków:

1. Jeżeli  $\mu_i > 0$ , to równowaga jest stała.
2. Jeżeli  $\mu_i = 0$ , to równowaga jest obojętna.
2. Jeżeli  $\mu_i < 0$ , to równowaga jest chwiejna.

Z punktu widzenia praktycznego istotna jest ocena zachowania struktury wraz ze zmianą parametru kontrolnego  $\lambda$ . Można przyjąć, że styczna macierz sztywności jest wyrażona jako  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\lambda)$ . Cel analizy stanowi zatem określenie wartości krytycznej parametru kontrolnego  $\lambda_{kr}$ , który jest najniższą wartością powodującą przejście struktury ze stanu równowagi stałej do chwiejnej. Stan taki zaistnieje, jeżeli macierz  $\mathbf{K}$  jest osobliwa, co wiąże się z wystąpieniem punktu krytycznego na ścieżce równowagi i jest wyrażone formułą:

$$\det \mathbf{K}(\lambda_{kr}) = 0 \quad (3.37)$$

Macierz sztywności może być wyrażona przez dwa składniki:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (3.38)$$

gdzie  $\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_0$  określa początkową sztywność konstrukcji związaną z właściwościami materiału, natomiast  $\mathbf{K}_G = \lambda \mathbf{K}_1$  oznacza sztywność w stanie zdeformowanym zależną od wartości parametru kontrolnego  $\lambda$ . Składnik  $\mathbf{K}_1$  jest stały i obliczany w konfiguracji referencyjnej układu.

Ocena stabilności układu prowadzi do tzw. problemu na wartości własne:

$$\mathbf{Kz} = (\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_1)\mathbf{z} = 0 \quad (3.39)$$

Procedura rozwiązania rozpoczyna się od analizy problemu liniowego, dla którego  $\lambda = 1$ . W celu wyznaczenia rozkładu sił wewnętrznych w strukturze należy rozwiązać równanie:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u} = \mathbf{q}_0 \lambda \quad (3.40)$$

W kolejnym kroku, na podstawie otrzymanego rozkładu sił jest budowana geometryczna macierz sztywności  $\mathbf{K}_G = \lambda \mathbf{K}_1$ .

Mając te informacje, można rozwiązać problem własny:

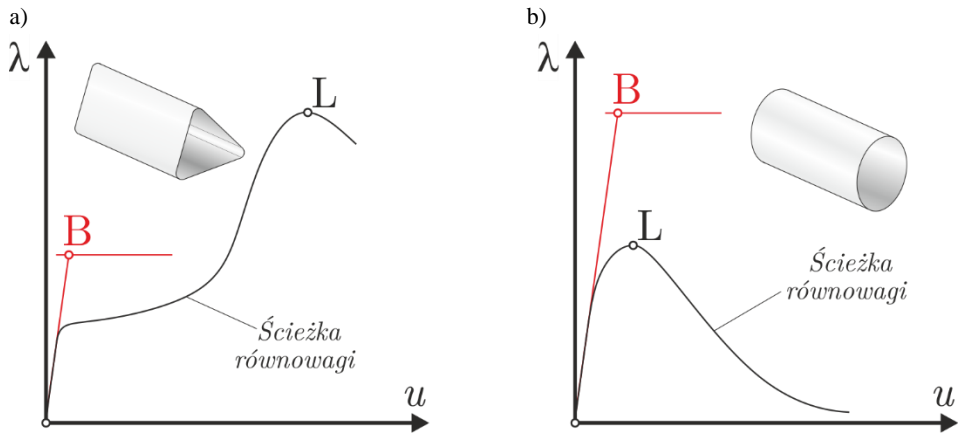
$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_i \mathbf{K}_1) \mathbf{z}_i = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K}_0 \mathbf{z}_i = -\lambda_i \mathbf{K}_1 \quad (3.41)$$

Wartość własna  $\lambda_i$  najbliższa zeru jest mnożnikiem parametru kontrolnego określającym utratę stateczności, a związany z nim wektor własny  $\mathbf{z}_i$  odpowiada pierwszej postaci wyboczenia.

Obliczenia stateczności z wykorzystaniem opisanej metody analizy zlinearyzowanej posiadają jednak wiele ograniczeń. W związku z faktem, że metoda w pierwszym kroku sprowadza obliczenia do zagadnienia liniowego, konieczne jest, aby deformacje przed utratą stateczności, czyli w stanie przedkrytycznym, były małego rzędu. Z tego samego powodu kolejnym ograniczeniem jest liniowe prawo fizyczne, co powoduje, że można stosować tylko materiały liniowo-sprężyste. Należy mieć również na uwadze, że w niektórych przypadkach wstępne imperfekcje geometryczne mogą spowodować niepoprawność rozwiązania na kanwie analiz zlinearyzowanych.

Wyszczególnione ograniczenia powodują, że analiza zlinearyzowana jest odpowiednia tylko dla pewnej grupy struktur, do których należą przede wszystkim struktury symetrycznie obciążone, takie jak kolumny i płyty obciążone w swojej płaszczyźnie. W przypadku innych struktur należy mieć na uwadze, że rezultaty tego rodzaju analiz mogą dać w efekcie wyniki odbiegające od rzeczywistości.

Przykładami konstrukcji, w przypadku których należy się liczyć z błędnymi wynikami w stosunku do rzeczywistości, są konstrukcje cienkościenne. Na rysunku 3.8a przedstawiono ściskaną powłokę zbudowaną z płaskich ścianek, która może reprezentować np. kadłub śmigłowca. W takim przypadku, z uwagi na znaczną redystrybucję naprężania, wraz z postępującą deformacją struktura straciłaby stateczność w punkcie L, który objawia się przy dużo wyższym obciążeniu niż wynikałoby to z analiz numerycznych (punkt B). Rysunek 3.8b przedstawia ściskany cylinder cienkościenny, dla którego obserwuje się odmienną sytuację. Procedura numeryczna wykazałaby znacznie wyższą wartość obciążenia krytycznego (punkt B) niż ta, którą można by zaobserwować w rzeczywistości (punkt L). Jest to



Rys. 3.8. Przykładowe struktury, dla których analiza zlinearyzowana prowadzi do błędnych rezultatów (na podstawie [28]): a) ściskana powłoka o ściankach płaskich, b) ściskany cylinder cienkościenny

związane z faktem, że struktury tego typu są wrażliwe na imperfekcje geometryczne, a co za tym idzie – rzeczywista wartość obciążenia krytycznego jest wysoce uzależniona od stanu początkowego struktury.



## 4. NARZĘDZIA BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

### 4.1. Wprowadzenie

Nie pomniejszając rangi analiz numerycznych jako narzędzia o niekwestionowanej skuteczności, ale też i nie bagatelizując problemów związanych z zawsze istniejącą dozą niepewności wyników takiej analizy, wymogiem dla praktyki projektowania jest absolutne zaufanie do otrzymywanych wyników. Jak już wspomniano we wcześniejszych rozważaniach, rzeczą uzasadnioną, a w niektórych sytuacjach nieodzowną, jest wspomaganie procesu projektowania licznymi badaniami, które znacząco zwiększają dozę wiarygodności wyników analiz numerycznych, wykorzystując przy tym zarówno najnowsze techniki badań, jak i znane od lat metody tradycyjne.

Przez wiele lat metody doświadczalne mechaniki ciał odkształcalnych opierały się na pomiarach dyskretnych. Zaliczamy do nich pomiary tensometryczne wykorzystujące czujniki elektrooporowe oraz coraz częściej stosowane czujniki światłowodowe.

Pomiary pól odkształceń zapoczątkowały metody polaryzacyjno-optyczne. Są to badania wykonywane na modelach z materiału optycznie czynnego. Umożliwiają obserwację ciągłego rozkładu efektów optycznych w postaci prążków tożsamyh z rozkładem różnicy odkształceń głównych oraz głównych kierunków deformacji. W przypadku stosowania metody „zamrażania naprężenia” [23] możliwe są również badania stanów trójwymiarowych.

Z uwagi na fakt, że konwencjonalna aparatura do pomiaru odkształceń (tensometry, ekstensometry) nie dostarcza informacji o rozkładzie badanych wielkości na powierzchni badanego elementu, a pomiary elastoopcyjne są stosunkowo trudne do interpretacji i ograniczone do stosowania do przypadku materiałów wykazujących cechy optycznie czynne, pojawiła się konieczność opracowania nowych metod badawczyh.

Wśród wielu metod umożliwiających bezkontaktowe, polowe pomiary deformacji można wyróżnić metodę mory cieniowej [104], metody holograficzne [117] oraz metody interferometrii plamkowej [123]. Przegląd najpopu-

larniejszych metod można znaleźć w monografii pod redakcją W. Sharpego [120] oraz książce poświęconej pomiarom optycznym pod redakcją P. Rastogiego [116].

Obecnie najprężniej rozwija się grupa metod badawczych oparta na pomiarach optycznych wspomaganych algorytmami numerycznymi umożliwiającymi jednoznaczną interpretację wyników. Szczególne miejsce zajmuje wśród nich metoda cyfrowej korelacji obrazu, opisana w tym rozdziale.

## 4.2. Tensometria elektrooporowa i światłowodowa

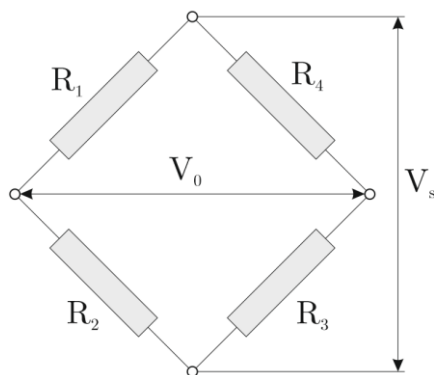
Podstawy tensometrii elektrooporowej opierają się na odkryciach Lorda Kelvina z 1856 r. związanych z podaniem liniowych zależności pomiędzy wydłużeniem metalu  $\varepsilon$  a zmianą jego rezystancji  $\Delta R$ :

$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon \quad (4.1)$$

gdzie  $k$  jest miarą proporcjonalności i zależy od właściwości oraz budowy czujnika tensometrycznego.

Obecnie tensometria elektrooporowa jest jedną z najpowszechniej stosowanych metod eksperymentalnego pomiaru odkształceń.

Pomiary z wykorzystaniem tensometrii elektrooporowej opierają się na zastosowaniu mostka Wheatstone'a (rys. 4.1), który składa się z czterech oporników [120]. Jeżeli wszystkie rezystancje są równe, to mostek znajduje się w stanie równowagi i napięcie wyjściowe jest równe zero.



Rys. 4.1. Schemat mostka Wheatstone'a wykorzystywanego w pomiarach tensometrycznych

Jeden lub więcej oporników układu mogą stanowić tensometry, które ulegając odkształceniu, zmieniają swoją rezystancję. Mostek w takim przypadku traci równowagę, a napięcie na wyjściu posiada wartość różną od zera.

Równanie pełnego mostka tensometrycznego można zapisać jako:

$$\frac{V_0}{V_s} = \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.2)$$

Przyjmując relację pomiędzy zmianą rezystancji a odkształceniem w formie zależności (4.1), otrzymuje się równanie:

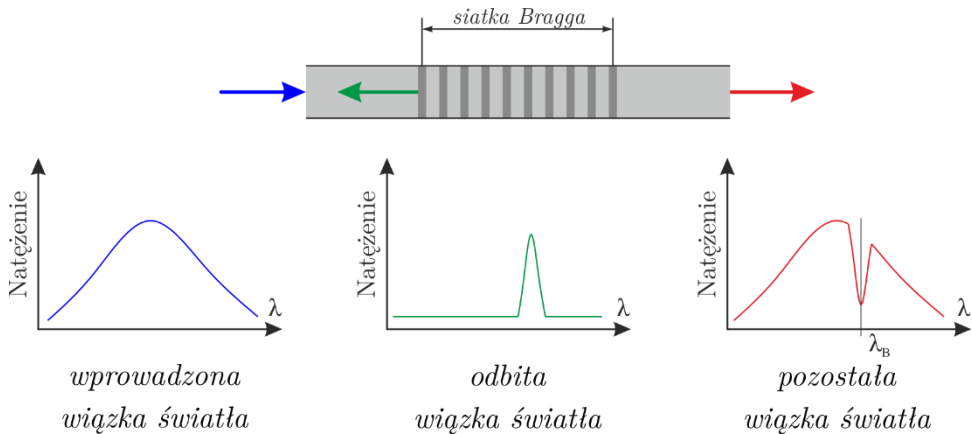
$$\frac{V_0}{V_s} = \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (4.3)$$

które umożliwia określenie odkształcenia w danym punkcie pomiarowym, składającym się z czterech tensometrów tworzących układ kompensujący ewentualny wpływ temperatury na wartość pomiaru. Jeżeli do pomiarów zostaną wykorzystane jedynie dwa tensometry, a pozostałe dwie gałęzie mostka będą stanowić oporniki o nieziennej rezystancji, to układ będzie nosił nazwę półmostka. Jeżeli tylko jeden opornik zostanie zamieniony na tensometr, to taki układ będzie nazywany ćwierćmostkiem.

Pomimo niewątpliwych zalet tensometria elektrooporowa posiada również wady wynikające z faktu, że pomiar odbywa się w dyskretnych punktach. Uzyskanie informacji o gradientach zmian jest zatem skomplikowane i kosztowne. Również zastosowany sygnał pomiarowy, jakim jest prąd elektryczny, sprawia, że konieczne jest zabezpieczenie czujników przed wpływem czynników środowiskowych, które mogą znacząco wpłynąć na wynik pomiaru lub nawet uniemożliwić jego przeprowadzenie. Problematyczne stają się również pomiary przy dużych odległościach pomiędzy czujnikiem a systemem akwizycji danych, co wynika z rosnącego wraz z długością oporu przewodów.

Obecnie coraz powszechniej stosowaną alternatywą dla klasycznych czujników elektrooporowych stają się tensometry światłowodowe [52, 81, 97], których działanie opiera się na wykorzystaniu siatki Bragga (rys. 4.2). Siatkę taką, zwaną również półprzepuszczalnym lustrem, wykonuje się w postaci periodycznych nacięć w poprzek włókna światłowodowego, mających za zadanie odbijanie określonej długości fali świetlnej, stanowiącej

bazę czujnika. Przyjęta zasada pomiaru umożliwia umieszczenie na długości pojedynczego włókna światłowodowego wielu punktów pomiarowych, w postaci kolejnych siatek Bragga odbijających odmienne długości fali.



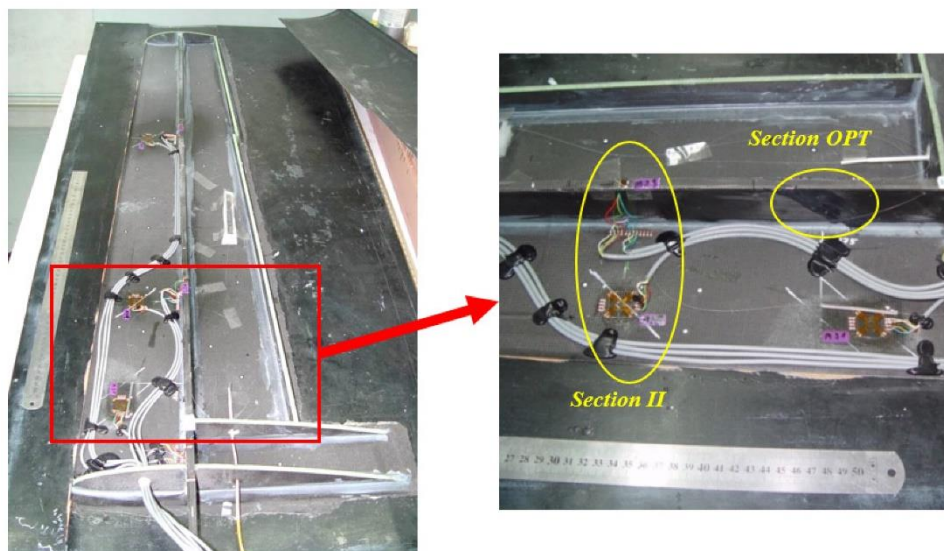
Rys. 4.2. Zasada działania tensometru światłowodowego

Pomiar odkształceń jest realizowany przez porównanie odbitej fali świetlnej, o długości zmienionej na skutek wydłużenia lub skrócenia czujnika, do referencyjnej długości fali czujnika nieodkształconego:

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda_c}{\lambda_{0c}} \right) \quad (4.4)$$

gdzie:  $\Delta\lambda$  – zmiana długości odbitej fali świetlnej na skutek deformacji,  
 $\lambda_0$  – bazowa długość odbitej fali świetlnej,  
 $\Delta\lambda_c$ ,  $\lambda_{0c}$  – parametry kompensacyjne.

Tensometria światłowodowa zyskuje coraz większą popularność w aplikacjach wymagających dużych odległości pomiędzy poszczególnymi punktami pomiarowymi oraz w sytuacjach, kiedy kluczowe staje się obniżenie masy układu pomiarowego, co ma miejsce w zastosowaniach lotniczych [80, 95]. W szczególności w odniesieniu do bezzałogowych aparatów latających niewielka masa systemu pomiarowego w stosunku do ciężaru konstrukcji umożliwia budowę układów pomiarowych, które monitorują w czasie rzeczywistym stan pracy struktury nośnej tego typu statku powietrznego [80, 113, 129]. Przykładowy układ tego typu zaprezentowano na rys. 4.3.



Rys. 4.3. Układ pomiaru sił przekrojowych w skrzydle samolotu bezzałogowego zbudowany zarówno z czujników elektrooporowych, jak i światłowodowych [129]

### 4.3. Badania polaryzacyjno-optyczne

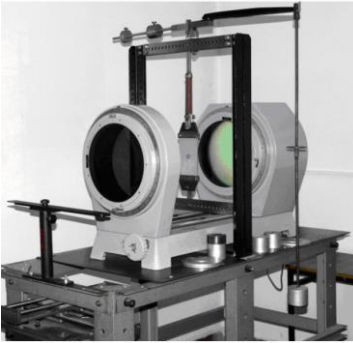
Zespół metod polaryzacyjno-optycznych, powszechnie nazywany elastooptyką, to eksperymentalna metoda analizy pól odkształceń, przybliżająca fenomenologiczne rozumienie zagadnień deformacji ciał stałych. W znacznej mierze przyczyniła się ona do zrozumienia zjawisk występujących w zakresie zagadnień teorii sprężystości i plastyczności.

Metoda opiera się na wykorzystaniu zjawiska dwójłomności wymuszonej w świetle spolaryzowanym, które pierwszy raz opisał David Brewster [14] w 1816 r. Pod wpływem obciążenia mechanicznego przezroczyste materiały optycznie czynne nabierają cech kryształu jednoosiowego o osi optycznej równoległej do kierunków naprężeń głównych. Oświetlenie światłem spolaryzowanym skutkuje rozszczepieniem wiązki światła na dwie składowe, wskutek czego pojawiają się interferencyjne prążki, tworzące dwa rodzaje widocznych linii: izoklin i izochrom. Izokliny są to linie, wzdłuż których kierunki naprężeń głównych zachowują wartość stałą, natomiast izochromy to linie o stałych wartościach różnic naprężeń głównych.

Zastosowanie filtrów ćwierćfalowych eliminuje z pola widzenia izokliny, widoczne zaś pozostają wyłącznie izochromy. Rodzaj polaryzacji, w której

obserwuje się wyłącznie izokliny, jest nazywany polaryzacją kołową [96], w odróżnieniu od polaryzacji liniowej, gdzie widoczne są zarówno izochromy, jak i izokliny.

a)

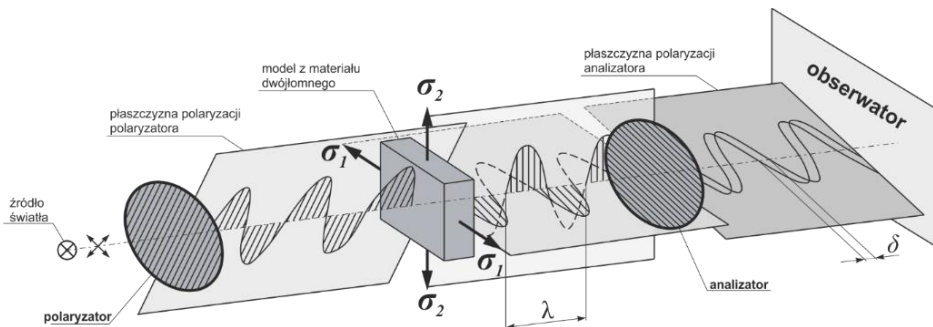


b)



Rys. 4.4. Polaryskop transmisyjny do badań modeli dwuwymiarowych (a) oraz polaryskop wykorzystywany w metodzie światła odbitego (b)

Zasada działania polaryskopu (rys. 4.4), czyli aparatury do pomiarów elastooptycznych, polega na tym, że monochromatyczne światło spolaryzowane, przechodząc przez model wykonany z materiału optycznie czynnego, w którym wskutek obciążenia występuje płaski stan naprężenia, ulega rozłożeniu na dwa promienie składowe, których płaszczyzny drgań pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Wskutek zaistnienia dwójłomności obydwa rozszczepione promienie przebiegają przez model z różną prędkością. Po wyjściu są przesunięte w fazie względem siebie, przy czym przesunięcie (opóźnienie) jest proporcjonalne do różnicy naprężeń (odkształceń) głównych panujących w badanym obiekcie (rys. 4.5).



Rys. 4.5. Schemat polaryskopu liniowego

Dla płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia zależności ilościowe ujmuje prawo Wertheima:

$$\delta = \frac{\lambda g}{K_\varepsilon} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \text{ lub } \delta = \frac{\lambda g}{K_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4.5)$$

gdzie:  $\delta$  jest względnym przesunięciem liniowym,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  oznaczają składowe naprężenia i odkształcenia głównego,  $\lambda$  jest długością fali światła monochromatycznego (stosowanego do prześwietlania),  $g$  to grubość modelu lub grubość powłoki optycznie czynnej (w przypadku metody światła odbitego),  $K_\sigma$  i  $K_\varepsilon$  oznaczają odpowiednio naprężeniową i odkształceniową elastooptyczną stałą materiałową.

Pomiędzy stałymi  $K_\sigma$ ,  $K_\varepsilon$  istnieje związek:

$$\frac{K_\sigma}{K_\varepsilon} = \frac{E}{1 + \nu} \quad (4.6)$$

Przesunięcie względne  $\delta$  wyraża się wielokrotnością  $m$  długości fali świetlnej  $\lambda$ :

$$\delta = m\lambda \quad (4.7)$$

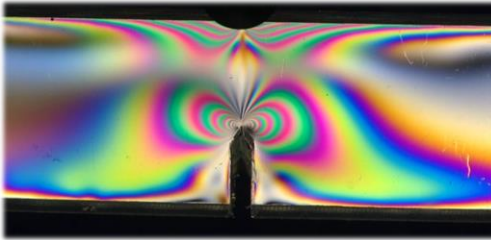
gdzie parametr  $m$  nosi nazwę rzędu izochromy.

Związek pomiędzy wartością rzędu izochromy  $m$  i różnicą naprężenia  $\sigma_1 - \sigma_2$ , a tym samym podwojonej wartości maksymalnej wartości naprężenia stycznego  $\tau_{max}$ , przedstawia równanie:

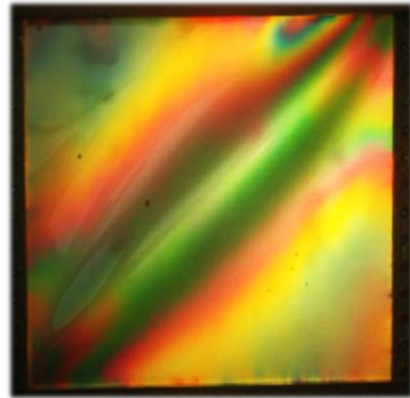
$$\sigma_1 - \sigma_2 = m K_{\sigma M} = 2\tau_{max} = const \quad (4.8)$$

Metody polaryzacyjno-optyczne, w szczególności metoda światła odbitego [2], okazują przydatność w przypadku badania zaawansowanych stanów deformacji struktur powłokowych, gdzie dominującym stanem naprężenia jest stan błonowy. Z wystarczającą dla praktyki inżynierskiej dokładnością można wówczas uznać stan giętny jako pomijalnie mały w stosunku do dominującego stanu błonowego (np. badania pola ciągnięć) [66]. Liczne doświadczenia własne potwierdzają, że obrazy efektów optycznych rejestrowane w trakcie badania stanów zakrytycznych są bardzo pomocne przy opracowywaniu modeli oraz interpretacji wyników analiz numerycznych [51] (rys. 4.6, 4.7).

a)

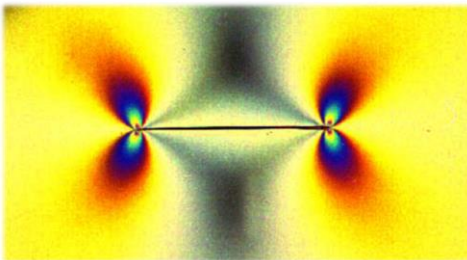


b)

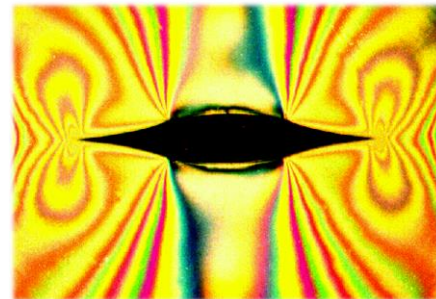


Rys. 4.6. Przykładowe wyniki badań elastoptycznych: a) rozkład efektów optycznych w trójpunktowo zginanej próbce typu CB – wynik uzyskany z wykorzystaniem polaryskopu transmisyjnego [159], b) rozkłady efektów optycznych dla płyty poddanej ścinaniu w stanie po utracie stateczności uzyskane z wykorzystaniem polaryskopu do światła odbitego [64]

a)



b)



Rys. 4.7. Zmiana obrazu efektów elastoptycznych (pole izochrom) wokół szczeliny w cienkościennej płycie poddanej rozciąganiu [63]: a) efekt wstępny, b) rozkład wynikający z otwarcia szczeliny na skutek działającego obciążenia i pojawienia się efektu wrinklingu

Analiza trójwymiarowego stanu naprężenia jest związana z bardziej skomplikowaną techniką doświadczalną aniżeli w przypadkach zagadnień płaskich [23]. W celu określenia naprężenia w odpowiednich punktach modelu są stosowane metody zamrażania [94, 96], metoda światła rozproszonego [125, 153] i metoda elastoptyki zintegrowanej [2, 3].



Rozwój techniki fotografii cyfrowej również wpłynął na metody elastooptyczne, które podążyły w stronę nazywaną elastooptyką cyfrową, umożliwiającą wykorzystanie algorytmów komputerowych do przetwarzania i analizy fotografii efektów optycznych [100, 110-112].

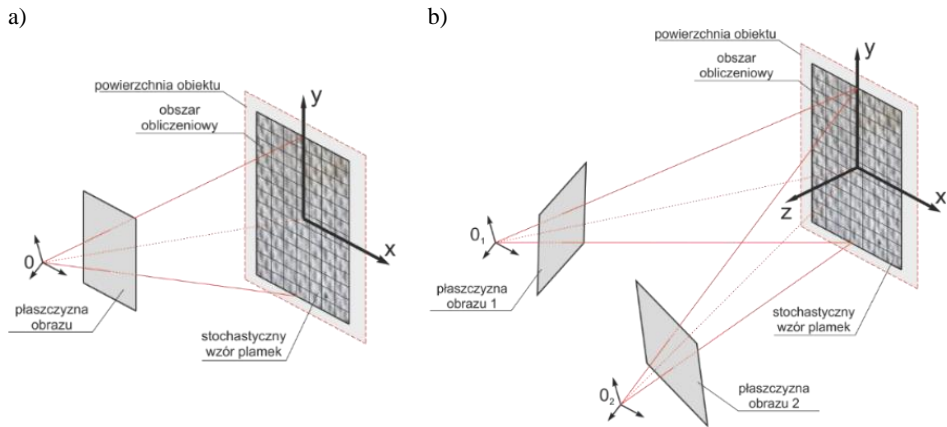
#### 4.4. Metoda cyfrowej korelacji obrazu

Wzrost mocy obliczeniowej komputerów w obszarze eksperymentu uwiódocił się przede wszystkim w zakresie możliwości rejestrowania deformacji polowych. W roku 1980 Vincent J. Park [98] przedstawił możliwość pomiarów przemieszczeń punktów z zastosowaniem fotografii obiektu z naniesionym wzorem plamek i analizy ich zmian położenia, jednak wykorzystanie i dokładność tej metody były ograniczone przez błędy wynikające z dekorrelacji poszczególnych obrazów. W 1982 roku Petnaers i Ransom [101] przedstawili technikę cyfrowej obróbki fotografii do określania przemieszczeń powierzchni elementu pokrytego zbiorem plamek, oświetlanego promieniem lasera. Koncepcja polegała na dzieleniu powierzchni elementu na podobszary, które porównywano dzięki numerycznej procedurze korelacji. Umożliwiało to określanie wielkości przemieszczenia. Sutton et al. [128] w 1983 r. opracowali algorytm numeryczny tzw. *matching proces*, który stał się podstawą dwuwymiarowej wersji Metody Cyfrowej Korelacji Obrazów (ang. *Digital Image Correlation* – DIC). Peters et al. [102] i Chu et al. [18] przeprowadzili pomiary z wykorzystaniem algorytmu DIC, dowodząc, że umożliwia on określenie przemieszczeń translacyjnych i rotacyjnych. W kolejnych latach rozwijano metodę, poszukując coraz bardziej wydajnych algorytmów korelacyjnych [16, 126, 127, 140].

W latach dziewięćdziesiątych Luo et al. [78, 79], Kahnjetter [48] i Helm [40] zaproponowali poszerzenie metody o pomiary deformacji przestrzennych z wykorzystaniem zestawu dwóch kamer cyfrowych. Kluczowa dla tej metody jest technika kalibracji systemu pomiarowego [146, 163].

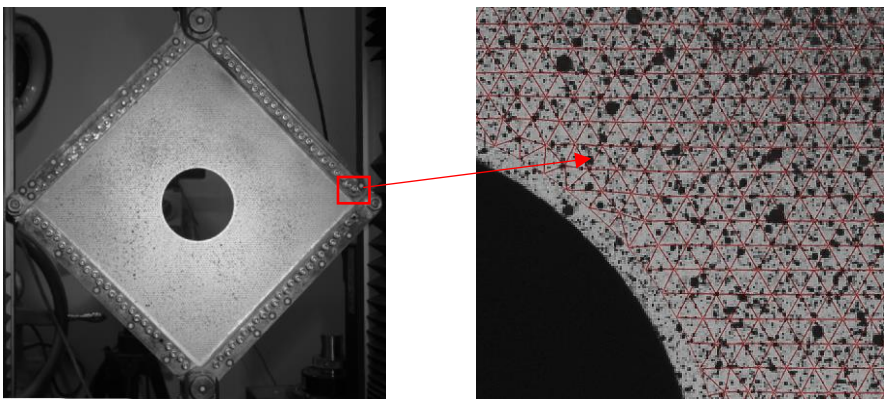
Idea metody DIC opiera się na cyfrowym przetwarzaniu obrazu powierzchni badanego elementu rejestrowanego w trakcie kolejnych etapów wzrastania deformacji, co umożliwia wyznaczenie kształtu obiektu zdeformowanego oraz pola przemieszczeń. Obliczenia odkształcenia i naprężenia opierają się na założeniu, że badany obiekt jest ośrodkiem ciągłym i można do niego stosować równania teorii sprężystości i plastyczności.

Systemy pomiarowe stanowią kamery cyfrowe, źródła światła oraz system akwizycji i obróbki danych pomiarowych. W zależności od wersji systemu pomiarowego wykorzystywana jest jedna kamera umożliwiająca pomiary deformacji w płaszczyźnie lub co najmniej dwie kamery, które umożliwiają dokonywanie pomiarów przestrzennych (rys. 4.8).



Rys. 4.8. Schemat pomiaru metodą DIC w wersji 2D (a) i 3D (b)

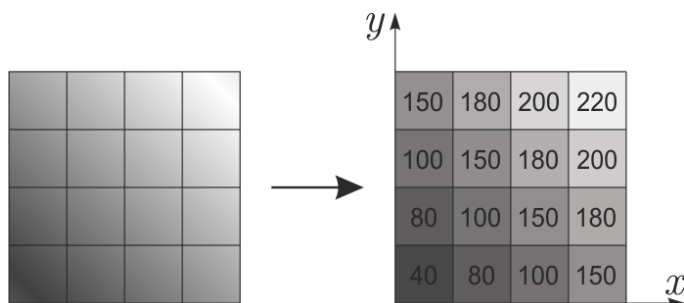
W celu przygotowania elementu do badań jego powierzchnia zostaje pokryta stochastycznym wzorem plamek, który umożliwia jednoznaczną identyfikację ich położenia (rys. 4.9). Wykonane fotografie są dzielone na podobszary, które zwykle mają kształt prostokąta lub trójkąta o wielkości kilkanaście na kilkanaście pikseli.



Rys. 4.9. Pokrycie badanego elementu wzorem plamek i podział obrazu na punkty kontrolne oraz podobszary obliczeniowe

Istota metody polega na odnajdywaniu tego samego obszaru na fotografiach wykonanych w kolejnych etapach awansowanej deformacji. W wyniku korelacji poszczególnych obrazów (etapów deformacji) istnieje możliwość wyznaczenia przemieszczeń punktów powierzchni elementu. Otrzymane w ten sposób pole przemieszczeń stanowi podstawę wyznaczenia odkształceń, obliczanych z wykorzystaniem funkcji interpolacyjnych.

Obraz poddawany analizie przekształcany do formy macierzy zawierającej 8-bitową informację w postaci liczb określających stopień szarości każdego z pikseli podobszaru (rys. 4.10). Liczba ta zawiera się w przedziale od 0 do 255, przy czym najmniejszą wartość reprezentuje kolor czarny, największą – biały, a wszystkie pośrednie odpowiadają różnym poziomom szarości. Ilość kombinacji liczb w ramach jednego podobszaru jest na tyle duża, że umożliwia jednoznaczną identyfikację ich położenia i praktyczny brak powtarzalności w obrębie badanego obszaru. Z uwagi na fakt, że sygnałem pomiarowym jest w istocie wartość wyznaczonego poziomu szarości piksela, wymagany jest możliwie duży kontrast wykonywanych fotografii, który uzyskuje się przez oświetlenie powierzchni badanego elementu. Zmiana intensywności oświetlenia w trakcie pomiaru wpływa w sposób niekorzystny na otrzymywane rezultaty.



Rys. 4.10. Obraz podobszaru obliczeniowego i jego interpretacja cyfrowa

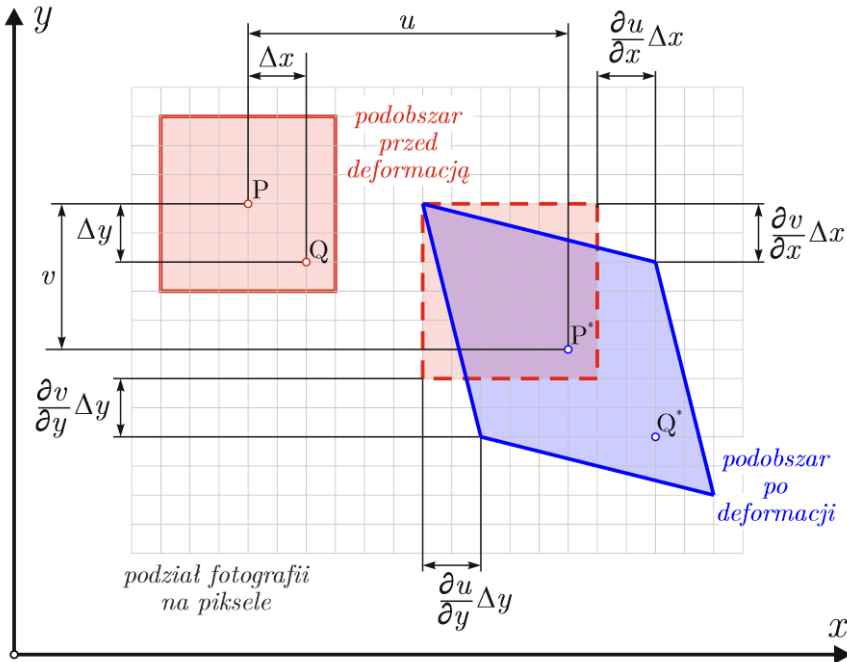
Rozważmy obszar (podobszar) na powierzchni elementu (rys. 4.11), w którym jest określone położenie punktu środkowego  $P$  o współrzędnych  $(x, y)$ . Zadaniem procedury obliczeniowej jest znalezienie tego samego obszaru na kolejnym zdjęciu, którego punkt środkowy  $P$  osiągnie współrzędne

$(x_i^*, y_i^*)$ . Z uwagi na fakt, że względny rozkład poziomów szarości poszczególnych pikseli w obszarze nie zmienia się wraz z deformacją, można wyznaczyć położenie dowolnego punktu  $Q(x_i, y_i)$  oraz  $Q'(x_i^*, y_i^*)$  z wykorzystaniem przyjętej funkcji kształtu.

Najprostsza funkcja umożliwiająca określenie przemieszczeń translacyjnych i rotacyjnych oraz odkształceń normalnych i stycznych wynika z rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ y_i^* &= y_i + v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie:  $u, v$  są przemieszczeniami punktu środkowego obszaru względem osi  $x$  i  $y$ , a  $\Delta x, \Delta y$  są odległościami punktu  $(x_i, y_i)$  od środka obszaru.



Rys. 4.11. Opis deformacji powierzchni i przemieszczeń punktów

Pierwsze dwa człony równania (4.9) odpowiadają za ruch bryły sztywnej. Kolejne dwa prezentują afiniczne transformacje obszaru ze stanu referencyjnego, czyli odkształcenia.

Każdy piksel reprezentujący punkt w rozpatrywanym podobszarze jest opisany liczbą określającą poziom jego szarości (intensywności światła) na fotografii (rys. 4.10). Przyjmijmy, że  $f(x_i, y_i)$  jest poziomem szarości punktu  $(x_i, y_i)$  w stanie niezdeformowanym, a  $g(x_i^*, y_i^*)$  poziomem szarości punktu  $(x_i^*, y_i^*)$  w stanie po deformacji. Teoretycznie wartości  $f$  i  $g$  powinny być identyczne. W rzeczywistości różnią się ze względu na poziom oświetlenia, rozmycie poszczególnych zdjęć, zniekształcenia perspektywy (dystorsja) oraz przypadkowy szum pomiarowy.

Relacja pomiędzy nimi może być określona jako:

$$f(x_i, y_i) - e(x_i, y_i) = r_0 + r_1 g(x_i^*, y_i^*) \quad (4.10)$$

gdzie  $r_0$  i  $r_1$  są parametrami wykorzystywanymi do kompensacji poziomu szarości wynikającego z podanych wcześniej czynników (tzw. transformacja radiometryczna), a  $e(x_i, y_i)$  jest poprawką wynikającą z oszacowanej wartości szumu pomiarowego.

Istota cyfrowej korelacji obrazu polega na porównywaniu zbiorów liczb pomiędzy dwoma obrazami cyfrowymi. Rozpatrywane obrazy cechuje największe podobieństwo, jeżeli osiągnięte zostanie minimum funkcji korelacji.

Podstawową formułą opisu korelacji jest suma kwadratów odchyłeń (ang. *squared sum of differences*):

$$S(p) = \min \sum_{i=1}^n (F_i - G_i)^2 \quad (4.11)$$

gdzie przez  $p$  oznaczono wektor parametrów określających jakość korelacji:

$$p = \left[ x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

Z kolei funkcje rozkładu intensywności poziomu szarości oznaczają się jako:

$$F_i = f(x_i, y_i) \text{ i } G_i = r_0 + r_1 g(x_i^*, y_i^*) \quad (4.12)$$

Funkcja opisana równaniem (4.10) nie umożliwia jednak kompensacji wyników ze względu na zmiany intensywności oświetlenia oraz względnego przesunięcia źródła światła wynikającego z deformacji badanego elementu. Efekty te są szczególnie ważne w przypadku pomiarów przestrzennych. Niezbędne jest zatem wprowadzenie dodatkowych kryteriów optymalizacyjnych, które umożliwiają otrzymanie poprawnych rezultatów przy zmiennych warunkach oświetlenia. Zmiany te są uwzględniane przez wprowadzenie zamiast rozkładu poziomego szarości  $G$  transformacji fotometrycznej w postaci  $\Phi(G) = aG + b$ , gdzie parametr  $a$  jest kryterium niezmienniczym skali oświetlenia, a parametr  $b$  odpowiada za względne przesunięcie źródła światła. Funkcja korelacji przyjmie w takim przypadku postać:

$$S(p) = \min \sum_{i=1}^n (F_i - (aG_i + b))^2 \quad (4.13)$$

Zadanie korelacji stanowi problem, w którym istnieje większa liczba niewiadomych niż równań do dyspozycji. Brakującą informacją umożliwiającą uzyskanie rozwiązania jest gradient rozkładu skali szarości pomiędzy dyskretnymi punktami reprezentowanymi przez piksele.

W 1989 roku Bruck et al. [16] zaproponowali wykorzystanie metody Newtona-Raphsona do wyznaczenia sześciu parametrów określających korelację. Po wyznaczeniu pierwszego przybliżenia wartości  $u$ ,  $v$ ,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial v/\partial x$  i  $\partial v/\partial y$  metoda jest wykorzystywana do znalezienia rzeczywistych wartości, wynikających z minimalizacji funkcji korelacji  $S$ .

Poszczególne zmiany (przyrosty) parametrów są określane jako:

$$\Delta R_i = - \frac{\nabla(R_i)}{H(R_i)} \quad (4.14)$$

gdzie  $R_i$  jest wektorem zawierającym wartości parametrów w bieżącym przyroście obliczeniowym:

$$R_i^T = \left( u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.15)$$

$\nabla(R_i)$  jest Jakobianem zawierającym pochodne funkcji korelacji względem parametrów:

$$\nabla(R_i)^T = \left( \frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial s}, \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}, \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}, \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}, \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \right) \quad (4.16)$$

$H(R_i)$  jest natomiast macierzą Hessego, która zawiera drugie pochodne funkcji korelacji.

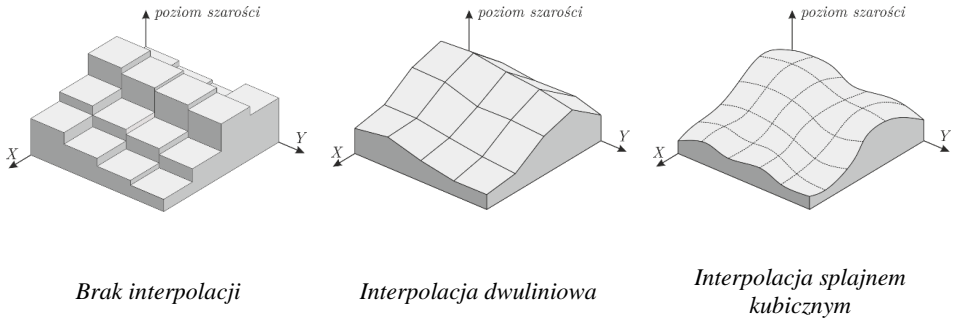
Otrzymane na podstawie równania (4.14) przyrosty  $\Delta R_i$  są dodawane do wartości szacunkowych (wstępnych) w kolejnych krokach iteracyjnych, aż osiągnięta zostanie zbieżność rozwiązania. Kryterium zbieżności rozwiązania, a co za tym idzie – zatrzymanie procedury iteracyjnej, przyjmuje się, monitorując zmiany w poziomie przemieszczenia  $u$  i  $v$ . Zwykle zakłada się, że rozwiązanie jest zbieżne, jeżeli zmiany te nie przekraczają  $10^{-4}$  piksela. Dodatkowym kryterium zbieżności jest zmiana gradientu przemieszczenia na poziomie równym lub mniejszym od  $5 \cdot 10^{-6}$ .

Przeprowadzona korelacja obrazów umożliwia określenie rozkładu stopnia szarości poszczególnych punktów ciała pomiędzy kolejnymi rozwiązanymi etapami obciążenia, co jest jednoznaczne z wyznaczeniem średniej wartości przemieszczenia. Informacja taka jest jednak niepełna i niewystarczająca do analizy pola deformacji elementu, ponieważ ma charakter dyskretny. Oznacza to, że otrzymywana jest informacja jedynie o stopniu szarości poszczególnych pikseli, ale brakuje jej w odniesieniu do charakteru zmian deformacji (stopnia szarości) pomiędzy nimi. Z tego powodu konieczne jest dokonanie interpolacji wartości pomiędzy sąsiadującymi pikselami, co umożliwi określenie przemieszczeń z dokładnością do 1/100 części piksela. W początkowym okresie stosowania metody wykorzystywana była interpolacja dwuliniowa lub wielomianowa (rys. 4.12).

Wyższą dokładność można otrzymać przy zastosowaniu funkcji sklejałych. Przykładowo, funkcja interpolacyjna w postaci splejnu trzeciego stopnia może być zapisana jako:

$$g(x, y) = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 \alpha_{mn} x^m y^n \quad (4.17)$$

gdzie współczynniki  $\alpha_{mn}$  wyznacza się na podstawie rozkładu poziomów szarości punktów analizowanego podobszaru.



Rys. 4.12. Przykładowa prezentacja obszaru pomiarowego oraz wyniku interpolacji poziomu skali szarości

Rozkład odkształceń można wyznaczyć, różniczkując funkcję przemieszczenia. Operacja ta uwzględnia jednak szum pomiarowy zawarty w wyznaczanym przemieszczeniu. Aby wyeliminować ów efekt, funkcja przemieszczenia jest najpierw wygładzana, a następnie różniczkowana. Dzięki temu możliwe jest zwiększenie dokładności. Wśród algorytmów wygładzających można wyróżnić przede wszystkim *finite element smoothing* [83, 126] oraz *thin plate spline smoothing* [151], ale pojawiają się również podejścia odmienne [144].

Wykorzystanie pojedynczej kamery cyfrowej ogranicza zastosowanie metody do zagadnień płaskich. W celu wyeliminowania tego ograniczenia stosowany jest system pomiarowy składający się z co najmniej dwóch kamer, które obserwują obiekt pod różnymi kątami (rys. 4.8b). Umożliwia to wyznaczenie położenia punktów w przestrzennym układzie współrzędnych. W tym celu wykorzystuje się proces triangulacji, oparty na zasadach geometrii epipolarnej [156].

Proces triangulacji jest poprzedzony kalibracją systemu pomiarowego, którą przeprowadza się przy założeniu, że kamery są sztywno połączone i nie zmieniają położenia względem siebie. Obydwie kamery obserwują ten sam obraz (element kalibracyjny, siatka) i wykonują serię fotografii pod różnymi kątami. W efekcie otrzymuje się cyfrową reprezentację elementu kalibracyjnego. Przyjmuje się, że jedna z kamer dostarcza obraz referencyjny. W wyniku kalibracji określanych jest szesnaście parametrów. Sześć spośród nich to parametry zewnętrzne, opisujące względne położenie kamer



traktowanych jako połączone bryły sztywne w stosunku do elementu kalibracyjnego. Pozostałe, po pięć parametrów wewnętrznych dla każdej z kamer, łączy globalny układ odniesienia z układem współrzędnych związanych z kamerą. Parametry te obejmują współczynniki skali fotografii, przesunięcie pomiędzy początkiem układu współrzędnych kamery a osią optyczną oraz współczynnik zniekształceń promieniowych.

W trakcie badania system pomiarowy nie może zmieniać swojego położenia względem mierzonego obiektu. Po wykonaniu serii zdjęć w trakcie procesu obciążania struktury uruchamiane są procedury numeryczne, których celem jest określenie początkowego kształtu obiektu oraz jego późniejszej deformacji.

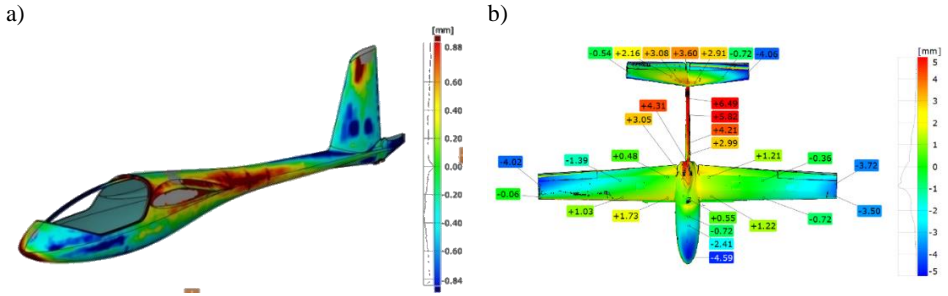
Proces rekonstrukcji trójwymiarowej, czyli wyznaczenia położenia przestrzennego punktów obiektu w stanie referencyjnym, jest wyznaczany przez korelację obrazów niezdeformowanego obiektu pomiędzy fotografiami wykonanymi przez dwie kamery systemu pomiarowego.

Wyznaczanie deformacji pomiędzy kolejnymi etapami obciążenia obiektu odbywa się w kolejnych krokach procedury numerycznej, polegających na korelacji zdjęć pomiędzy kolejnymi etapami oraz pomiędzy kamerami systemu pomiarowego.

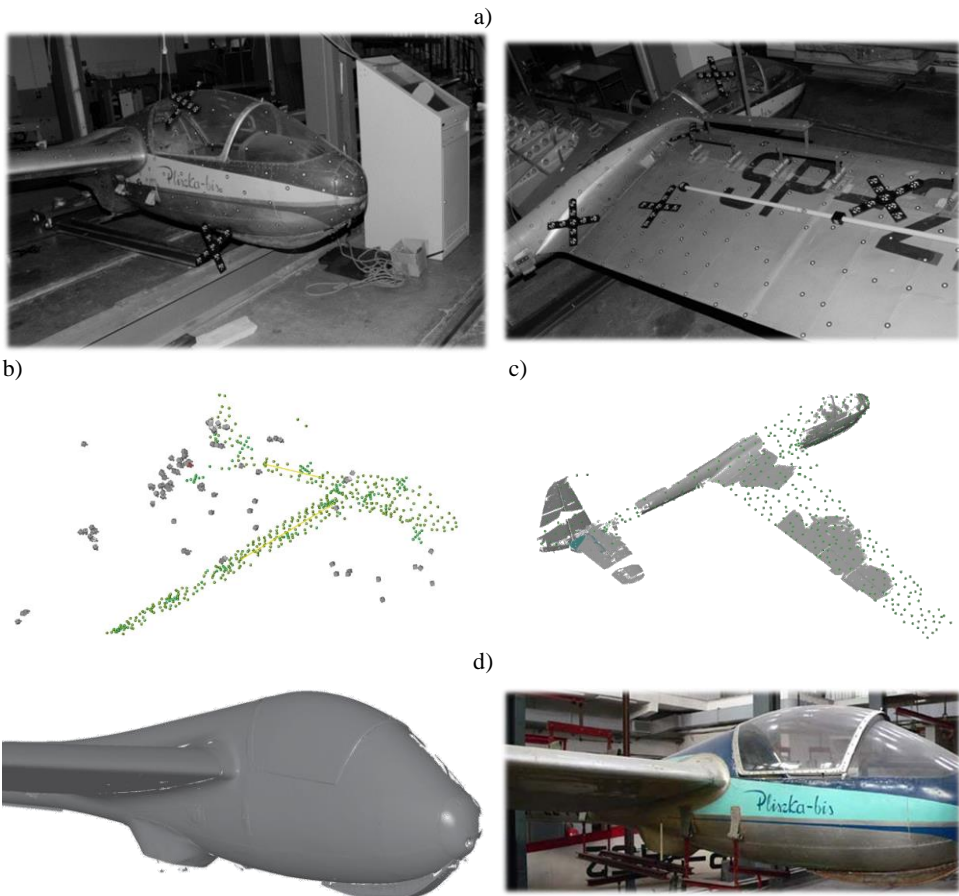
Po przeprowadzonym procesie rekonstrukcji powierzchni do układu 3D możliwe jest wyznaczenie przestrzennego pola przemieszczeń przez porównanie etapu bieżącego i referencyjnego.

Na kanwie procedur wykorzystywanych w metodzie DIC powstała cała grupa metod badawczych, które umożliwiają dokonywanie pomiarów położenia punktów w przestrzeni, jak również odtwarzanie trójwymiarowej geometrii badanych elementów.

Jednymi z najbardziej rozpowszechnionych są skanery prążkowe wykorzystywane do tworzenia cyfrowych reprezentacji obiektów o dowolnie złożonym kształcie [10, 162]. Na badany obiekt są rzucane równoległe prążki, których obraz jest rejestrowany przez system stereoskopowo ułożonych kamer cyfrowych. Następnie geometria jest odtwarzana z wykorzystaniem metody mory cieniowej [104]. Takie skanery są stosowane przede wszystkim do analizy odchyłek wykonawczych, przez porównanie rezultatów pomiaru z referencyjną geometrią utworzoną przy użyciu oprogramowania komputerowego typu CAD (rys. 4.13).



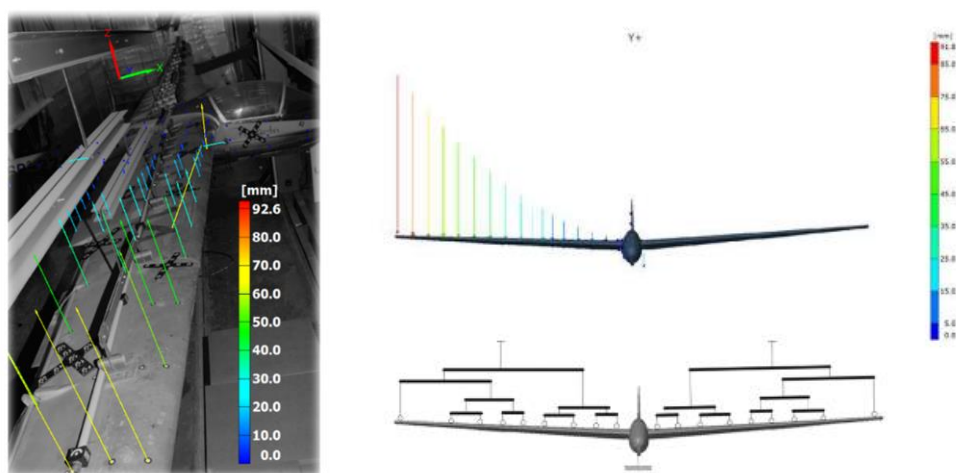
Rys. 4.13. Pomiar odchyłek wykonawczych motoszybowca AOS-71 (a) i samolotu bezzałogowego TWISST-2 (b) (badania własne)



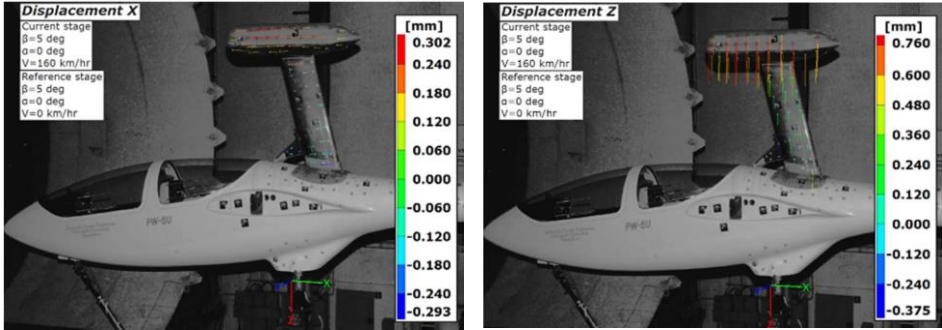
Rys. 4.14. Pomiar geometrii szybowca M3 Pliszka (badania własne):  
 a) szybowiec przygotowany do pomiaru, b) chmura punktów referencyjnych,  
 c) fragmenty zeskanowanej powierzchni, d) jakościowe porównanie wyników skanowania z fotografią rzeczywistego obiektu

Algorytmy identyfikujące położenie punktów na cyfrowych fotografiach wykorzystuje się również w metodach fotogrametrycznych [85]. Wykonanie serii zdjęć badanego obiektu z umieszczonymi na nim punktami pomiarowymi oraz obiektami kalibracyjnymi umożliwia wyznaczenie położenia punktów w przestrzeni.

Połączenie metod fotogrametrycznych oraz skanerów prążkowych umożliwia dokonanie pomiarów rozległych obiektów o dużych wymiarach gabarytowych. W takim przypadku system fotogrametryczny dostarcza informacji o położeniu punktów naklejonych na obiekt, które następnie służą jako punkty referencyjne dla skanera prążkowego. Podejście takie umożliwia uzyskanie wysokiej dokładności pomiarowych i uniknięcie tzw. błędu dryfu, wynikającego z ograniczonej objętości pomiarowej skanera prążkowego (rys. 4.14).



Rys. 4.15. Wynik pomiarów deformacji szybowca M3 Pliszka w trakcie badań statycznych (badania własne)



Rys. 4.16. Wynik pomiarów deformacji zasobnika na aparaturę pomiarową szybowca PW-6. Badania w tunelu aerodynamicznym T-3 w Instytucie Lotnictwa w Warszawie (badania własne [50])

Wykorzystanie systemów cyfrowej fotogrametrii przestrzennej pozwala również na wyznaczanie przemieszczeń punktów pomiarowych. W tym celu należy wykonać serię zdjęć identyfikujących położenie punktów przy kolejnych poziomach obciążenia statycznego. W efekcie możliwe jest wyznaczenie wektorów przemieszczeń tych punktów (rys. 4.15 i 4.16).

## 5. UWARUNKOWANIA BIEŻĄCEGO ŚLEDZENIA ZGODNOŚCI WYNIKÓW OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH ORAZ BADAŃ EKSPERYMENTALNYCH

### 5.1. Wprowadzenie

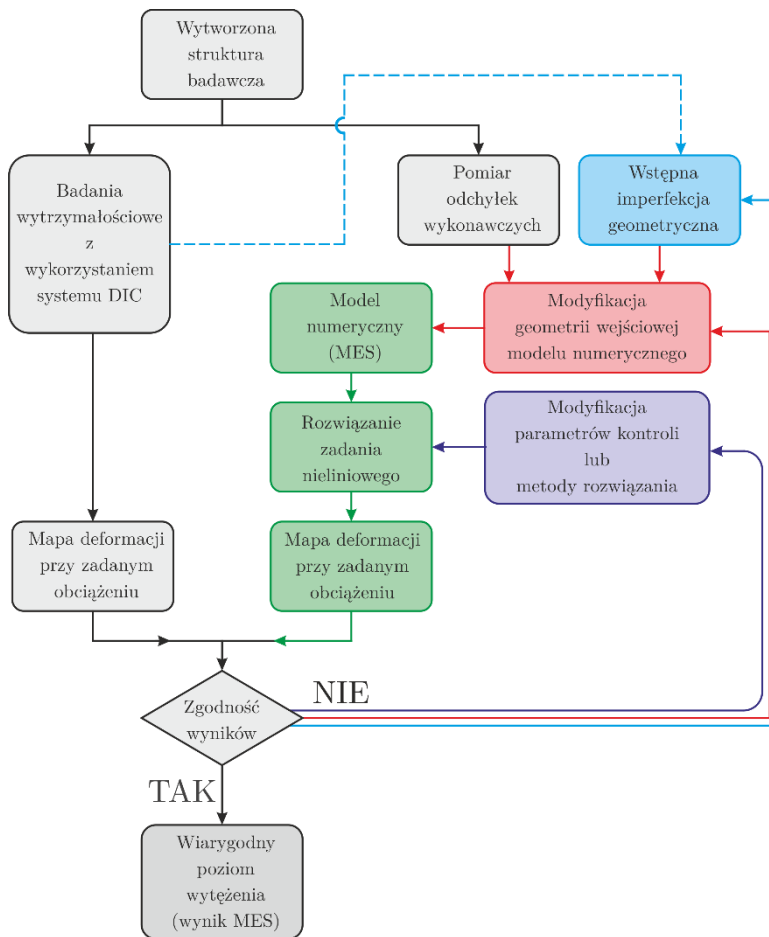
Badanie ustrojów nośnych w stanach deformacji zakrytycznych jest zagadnieniem kłopotliwym ze względu na konieczność uwzględnienia teorii nieliniowych, co w połączeniu ze złożoną geometrią praktycznie uniemożliwia otrzymywanie rozwiązań ścisłych, osiągalnych jedynie w prostych przypadkach. W rozwiązywaniu zagadnienia nieliniowego problematyczna staje się interpretacja uzyskiwanych wyników, niekiedy poprawnych z punktu widzenia matematycznego w analizie numerycznej MES, natomiast sprzecznych z fizycznym przebiegiem zjawiska. W takich sytuacjach wybór poprawnego rozwiązania wymaga często dodatkowych, weryfikacyjnych badań eksperymentalnych, nazwanych komplementarnymi.

Uzyskanie wiarygodnych wyników analiz numerycznych oraz badań eksperymentalnych struktur cienkościennych uwzględniających stany deformacji zakrytycznych w ogólnym przypadku można oprzeć na następującej metodyce:

*Procedurę badania konstrukcji (rys. 5.1) rozpoczyna się od pomiarów odchyłek geometrycznych zaistniałych w trakcie jej wykonywania. Zastosowanie skanera prążkowego w połączeniu z cyfrowym systemem fotogrametrii przestrzennej pozwala na utworzenie dostatecznie dokładnej, trójwymiarowej reprezentacji obiektu. Powstały model jest porównywany z bazową geometrią wyznaczoną za pomocą programu CAD.*

*Badania doświadczalne są przeprowadzane za pomocą maszyny wytrzymałościowej, zapewniającej sterowanie poziomem zadawanego obciążenia. Deformacja struktury w trakcie badania podlega zaś rejestrowaniu za pomocą systemu pomiarowego opartego na trójwymiarowej metodzie cyfrowej korelacji obrazu (DIC).*

*Dodatkowo, etap referencyjny badania doświadczalnego przed obciążeniem umożliwia określenie wstępnej imperfekcji geometrycznej badanej struktury, która wynika zarówno ze sposobu zamocowania w stanowisku badawczym, jak i z nie-dokładności wykonawczych. Imperfekcję tę należy odtworzyć w modelu numerycznym jako początkową geometrię analizowanego układu. Jeżeli nie ma takiej możliwości, np. ze względu na zbyt duże skomplikowanie, imperfekcję można uwzględnić jako perturbację wybranych i odpowiednio skalowanych postaci wyboczenia uzyskanych przez liniowe analizy stateczności lub przez wymuszenie siłami zewnętrznymi w pierwszym kroku analizy numerycznej.*



Rys. 5.1. Procedura kontroli rozwiązania numerycznego z wykorzystaniem wyników badań doświadczalnych

*Wyniki eksperymentu porównywane są „na bieżąco” z rezultatami nieliniowych analiz numerycznych. Jeżeli nie występuje zbieżność rozwiązania lub jest ona uznana za niezadowalającą, model numeryczny podlega modyfikacji przez korektę wstępnej imperfekcji lub zmianę parametrów kontrolnych, ewentualnie wybór nowej metody rozwiązania problemu nieliniowego.*

Opisana metodyka (rys. 5.1) pozwala na uzyskanie wymaganej zbieżności rozwiązania numerycznego w pełnym zakresie obciążeń, jakim jest poddawana badana konstrukcja. Ilustracje dowodzące skuteczności wybranych aspektów opisanej metodyki zostały przedstawione w dalszych rozważaniach.

## **5.2. Ustroje wzmacniane usztywnieniami geodetycznymi**

### **5.2.1. Wprowadzenie**

W wielu gałęziach techniki, w szczególności w przemyśle lotniczym, przestrzenne, cienkościenne struktury nośne znajdują szerokie zastosowanie jako ustroje skorupowe lub półskorupowe. Ustroje półskorupowe są złożone ze szkieletu i pokrycia. Stanowiący ruszt szkielet, składający się z elementów wzdłużnych i poprzecznych, sam w sobie jest mechanizmem. W połączeniu z pokryciem zapewnia sztywność ustroju. Funkcją elementów szkieletu jest przenoszenie sił normalnych, a elementów pokrycia – przenoszenie oddziaływań stycznych [62, 82, 90].

Najpowszechniej stosowanym sposobem łączenia elementów szkieletu z pokryciem jest nitowanie. W dążności do obniżania masy ustroju trwają jednak poszukiwania nowych rozwiązań. Jednym ze sposobów alternatywnych jest zastąpienie tradycyjnych procesów łączenia przez nowe technologie, np. zgrzewanie tarciove [70, 71, 89, 118]. Inną inicjatywą wynikającą z zastosowania obrabiarek CNC jest konstruowanie elementów integralnych, w których cienkie pokrycie oraz usztywnienia są wykonywane jako jeden element [34, 84]. Obniża to masę struktury oraz wpływa korzystnie na wzrost odporności na lokalne uszkodzenia [88, 119]. Zastosowanie konstrukcji integralnych jest realizowane w postaci gęsto żebrowanych cienkich płyt lub powłok z niskoprofilowanymi usztywnieniami. Zadaniem elementów usztywnienia jest, poza przenoszeniem sił normalnych, również

podwyższanie poziomu barier utraty stateczności konstrukcji bez przyrostu masy [105, 106, 131].

Spośród znanych sposobów usztywniania integralnego coraz większe zainteresowanie budzą ustroje składające się z połączonych ze sobą żeber tworzących trójkąty równoboczne. Struktury te noszą nazwę isogrid. Charakteryzują się wysokim ilorazem sztywności do wytrzymałości [87, 148]. Rozwiązania te znalazły zastosowanie przede wszystkim w przemyśle lotniczym (rys. 5.2) i kosmicznym (rys. 5.3). Coraz częściej spotykane są również przykłady wytwarzania tego rodzaju struktur z zastosowaniem druku przestrzennego (rys. 5.4). W takim przypadku stopień skomplikowania geometrycznego nie stanowi czynnika ograniczającego możliwości wykonawcze, jak w tradycyjnych technologiach.



Rys. 5.2. Przykład zastosowania usztywnień w postaci siatki trójkątnej w konstrukcji żeber skrzydła samolotu A330 neo (fot. Airbus)

Pierwsze opracowanie dotyczące analizy struktur isogrid zostało zlecone przez NASA w 1973 r. [87]. Do obliczeń analitycznych wykorzystano metodę rozmytego usztywnienia (ang. *smearred stiffened method*). Podstawy metody opierają się na założeniu, że struktura usztywniana może być traktowana jako ekwiwalentna konstrukcja ototropowa przez wprowadzenie sztywności żeber do pokrycia [138, 145].





Rys. 5.3. Przykład zastosowania struktur typu isogrid w konstrukcji statku kosmicznego Boeing CST-100 Orion (fot. NASA)



Rys. 5.4. Przykład zastosowania siatki trójkątnej do usztywnienia dyszy silnika rakietowego wytwarzanego w technologii druku 3D (fot. AddUp Solution Center)

W przeciągu kolejnych lat opublikowano wiele prac poświęconych wykorzystaniu tej metody zarówno w odniesieniu do struktur metalowych, jak i kompozytowych. Metoda jest ciągle rozwijana i wykorzystywana do określania obciążeń powodujących globalną i lokalną utratę stateczności oraz postaci i obciążenia niszczącego. Wang et al. [150] zaprezentowali opartą

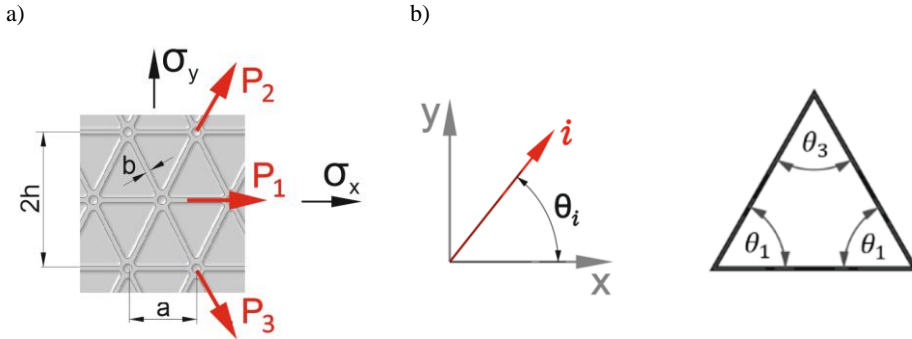
na analizach numerycznych metodę asymptotycznej homogenizacji w celu otrzymania współczynników sztywności dla kompozytowych powłok z siatką usztywnień. Jaunky et al. [46] sformułowali rozszerzenie teorii *smearred stiffened method*, wprowadzając interakcje pomiędzy pokryciem i usztywnieniami podczas analizy płyt poddanych ścisnaniu. Podobne podejście zostało zaproponowane przez Xu et al. [157] przez wprowadzenie parametrycznego wektora zależnego od konfiguracji siatki usztywnień. Wang i Abdalla [152] zaprezentowali metodę określania właściwości paneli usztywnianych, związaną z klasyczną teorią laminacji, porównując energię odkształcenia płyty usztywnianej z odpowiadającym jej zastępczym ustrojem. Obliczenia dotyczyły jednak globalnej utraty stateczności. We wspomnianych publikacjach wyniki obliczeń analitycznych porównywano z rezultatami analiz MES. Luan et al. [77] przedstawili usprawnienia w uproszczonej metodzie *smearred stiffener* do analiz drgań płyt usztywnianych, a w publikacji [76] zaprezentowano skuteczność metody w odniesieniu do struktur cylindrycznych poddawanych ścisnaniu.

Z uwagi na stosunkową prostotę, wspomniana metoda znalazła szerokie zastosowanie na etapie wstępnego projektowania struktur usztywnianych. W celu otrzymania dokładniejszych rezultatów, w tym analizy efektów lokalnych w węzłach siatki usztywnień, oraz uwzględnienia efektów nieliniowych konieczne jest zastosowanie bardziej wyrafinowanych metod. Huybrechts i Tsai [44] opracowali program komputerowy umożliwiający symulację deformacji stanów granicznych struktur z siatką usztywnień oraz stanu granicznego (zniszczenia), przy uwzględnieniu brakujących żeber i wytrzymałości siatki. Kopecki et al. [67, 68] badali wpływ wykrojów na postać deformacji pokrywicznych cienkościennych struktur poddanych ścinaniu.

Można przypuszczać, że wiele zagadnień determinujących szersze aplikacje struktur tego typu wymaga licznych prób i badań. Do tej kategorii zadań determinujących dalsze poznawanie ustroju isogrid można zaliczyć analizy efektów lokalnych, zwłaszcza w węzłach siatki usztywnień oraz uwzględnienie stanów wymagających ujęć nieliniowych.

### 5.2.2. Podstawy teoretyczne

Najczęściej stosowaną metodą analityczną analizy struktur wzmacnianych usztywnieniami ułożonymi w kształt trójkątów jest metoda rozmytego usztywnienia, znana pod angielską nazwą *smearred stiffener*. Struktura składająca się z usztywnień (żeber) oraz pokrycia jest traktowana jako konstrukcja warstwowa o zróżnicowanych sztywnościach wzdłuż wysokości. Przyjmuje się, że usztywnienia znajdują się w jednoosiowym stanie naprężenia i podlegają prawu Hooke'a. Siły w prętach zależą od ich orientacji geometrycznej (rys. 5.5).



Rys 5.5. Siły w elementach siatki usztywnień (a) i definicja kątów (b)

Dla kompletnej siatki, za pomocą formuły transformacyjnej (5.1), można określić zależności pomiędzy odkształceniami na kierunkach prętów a odkształceniami wyrażonymi w kierunkach  $x$  i  $y$  układu współrzędnych [87]:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x \cos^2 \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \cos \theta_i + \varepsilon_y \sin^2 \theta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1a)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_1 & \sin^2 \theta_1 \\ \cos^2 \theta_2 & \sin \theta_2 \cos \theta_2 & \sin^2 \theta_2 \\ \cos^2 \theta_3 & \sin \theta_3 \cos \theta_3 & \sin^2 \theta_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad (5.1b)$$

Pręty znajdują się w stanie osiowego obciążenia, zatem siły w prętach  $P_i$  można wyrazić jako:

$$P_i = bE\varepsilon_i \quad (5.2)$$

Składowe naprężenia na kierunkach  $x$  i  $y$  znajduje się, dzieląc obciążenia przez wymiary charakterystyczne siatki:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2P_1 + (P_2 + P_3)\cos\theta_1}{2hb} \\ \sigma_y &= \frac{(P_2 + P_3)\sin\theta_1}{ab} \\ \tau_{xy} &= \frac{(P_2 - P_3)\sin\theta_1}{2hb}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Uwzględniając równania (5.1), (5.2) i (5.3), otrzymuje się układ równań dla siatki usztywnień złożonej z trójkątów równoramiennych jako prawo fizyczne dla struktury ortotropowej w płaskim stanie naprężenia:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\frac{b}{2h}E\right) \begin{bmatrix} 2(1 + \cos^3\theta_1) & 2\sin^2\theta_1\cos\theta_1 & 0 \\ 4ha^{-1}\cos^3\theta_1\sin^2\theta_1 & 4ha^{-1}\sin^3\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin^2\theta_1\cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\tag{5.4}$$

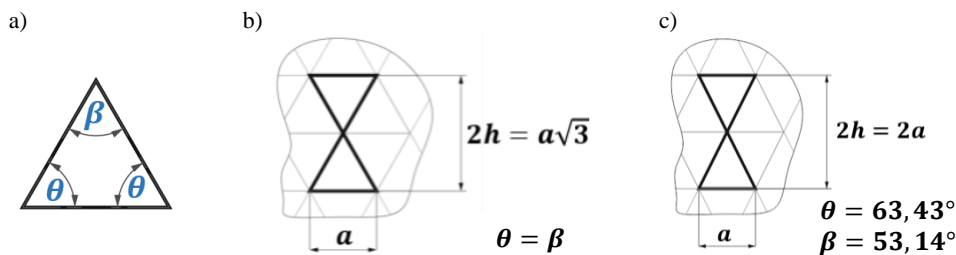
Macierz podatności  $\mathbf{S}$  i macierz sztywności  $\mathbf{Q}$ , wyrażone przez stałe inżynierskie dla ciała ortotropowego w płaskim stanie naprężenia, mają postać:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Z porównania tożsamościowego równań (5.4) i (5.5) wyznaczane są stałe inżynierskie dla rozpatrywanej struktury:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 2 \left( \frac{b}{2h} E \right) = \frac{b}{h} E \\
 E_2 &= \left( \frac{b}{2h} E \right) \frac{4h}{a} \frac{\sin^3 \theta_1}{1 + \cos^3 \theta_1} = \left( \frac{b}{a} E \right) \frac{\sin^3 \theta_1}{1 + \cos^3 \theta_1} \\
 \nu_{12} &= \left( \frac{2h}{a} \right) \frac{\cos^2 \theta_1 \sin \theta_1}{1 + \cos^3 \theta_1} \\
 \nu_{21} &= \left( \frac{a}{2h} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_1} \\
 G_{12} &= \left( \frac{b}{h} E \right) 2 \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

gdzie  $E_1$ ,  $E_2$  są modułami Younga dla kierunku wzdłużnego i poprzecznego,  $G_{12}$  jest modułem ścinania, a  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  to współczynniki Poissona.



Rys. 5.6. Geometria siatki usztywnień: a) oznaczenie kątów, b) zbudowanej z trójkątów równobocznych, c) zbudowanej z trójkątów równoramiennych

W przypadku usztywnień w formie trójkątów równobocznych (rys. 5.6), dla których każdy z kątów  $\theta_i$  jest równy i wynosi  $60^\circ$ , otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} &= \frac{E_{iso}}{1 - \nu_{iso}^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{iso} \\ \nu_{iso} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \\
 \tau_{xy} &= \frac{E_{iso}}{2(1 + \nu_{iso})} \gamma_{xy}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie:

$$E_{iso} = \frac{b}{h} E \quad (5.8)$$

$$\nu_{iso} = 1/3$$

W przypadku szczególnym, gdy geometria usztywnień tworzy trójkąty równoboczne, otrzymuje się prawo Hooke'a dla konstrukcji izotropowej w płaskim stanie naprężenia.

Jeżeli rozpatrywana jest siatka usztywnień w formie trójkątów równoramiennych (rys. 5.5c), to otrzymuje się:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \left(\frac{b}{h} E\right) \begin{bmatrix} 2(1 + \cos^3 \theta) & \sin^3 \theta \\ \sin^3 \theta & 4\sin^3 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{b}{h} E\right) \sin^3 \theta \gamma_{xy}$$

co prowadzi do formuły (5.10) dowodzącej, że zastosowanie siatki opartej na trójkątach równoramiennych skutkuje kierunkowością sztywności struktury:

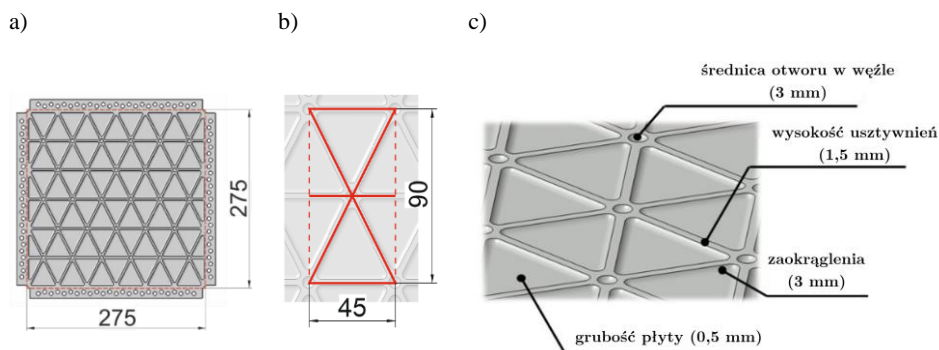
$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \left(\frac{b}{h} E\right) \begin{bmatrix} 1,09 & 0,36 \\ 0,36 & 1,43 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{b}{h} E\right) 0,36 \gamma_{xy}$$

### 5.2.3. Przedmiot badań

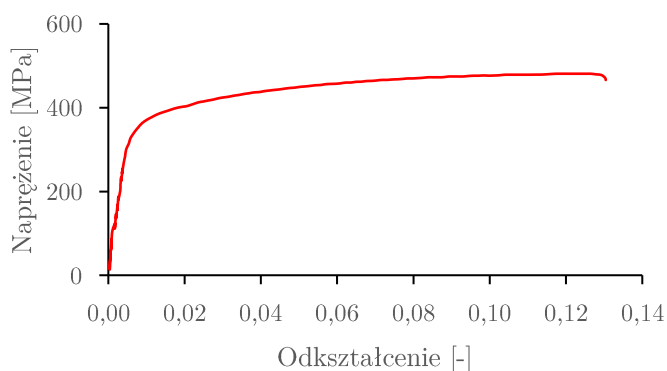
W nawiązaniu do praktycznych zastosowań rozważymy zachowanie się wyodrębnionego elementu pokrycia cienkościennej struktury, w której obciążenie wywołuje stan zaawansowanej deformacji. Płytę o wymiarach  $275 \times 275$  mm (rys. 5.7) wykonano za pomocą obrabiarki CNC z półfabrykatu w postaci płyty ze stopu aluminium 2024 T3 o grubości 2 mm. Podczas wytwarzania konstrukcji wspomagano się specjalnie zaprojektowanym stołem podciśnieniowym, zapewniającym zachowanie odpowiednich tolerancji geometrycznych. Integralne usztywnienie płyty stanowił ruszt w postaci żeber ułożonych w trójkąty równoramienne o wymiarach 45 na 90 mm. Wymiary żebra wynosiły: grubość 2 mm, wysokość 1,5 mm. W węzłach

siatki nawiercono otwory o średnicy 3 mm. Grubość pokrycia w obszarze pomiędzy usztywnieniami wynosiła 0,5 mm.



Rys. 5.7. Geometria badanej płyty: a) wymiary gabarytowe, b) geometria siatki usztywnień, c) wymiary elementów struktury

Jako strukturę referencyjną, służącą do określenia ewentualnych korzyści eksploatacyjnych wynikających z wprowadzenia żeber, wybrano płytę bez usztywnień o identycznych wymiarach gabarytowych, identycznej masie i grubości 0,75 mm. Materiał płyty również stanowił stop aluminium 2024 T3, którego wykres rozciągania prezentuje rys. 5.8.



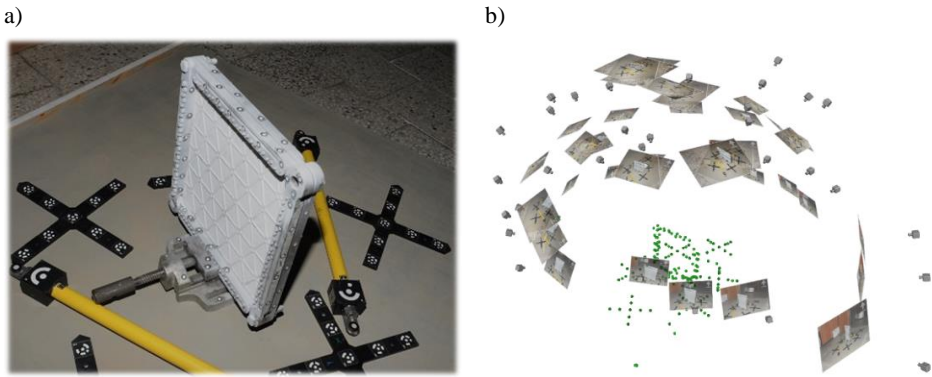
Rys. 5.8. Wykres zależności naprężenie–odkształcenie dla stopu aluminium 2024

#### 5.2.4. Analiza odchyłek wykonawczych

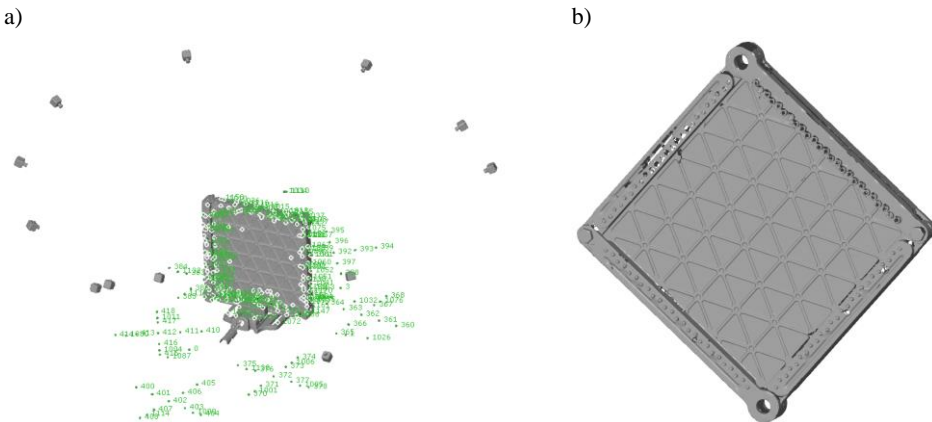
W celu identyfikacji odchyłek wykonawczych przeprowadzono pomiar geometrii płyty z zastosowaniem systemu fotogrametrii cyfrowej GOM

TRITOP [38] i skanera przestrzennego wykorzystującego metodę mory cieniowej GOM ATOS [37].

W wyniku pomiaru systemem fotogrametrycznym zarejestrowano pozycję przestrzenną 228 punktów, które stały się punktami referencyjnymi do skanowania 3D. Wykonano serię 16 zdjęć, które umożliwiły zorientowanie obiektu w przestrzeni (rys. 5.9). W wyniku skanowania powstała cyfrowa reprezentacja obrazu składająca się z 472 827 punktów, na których rozpięto 908 173 trójkąty tworzące powierzchnię mierzonego elementu (rys. 5.10 i 5.11).

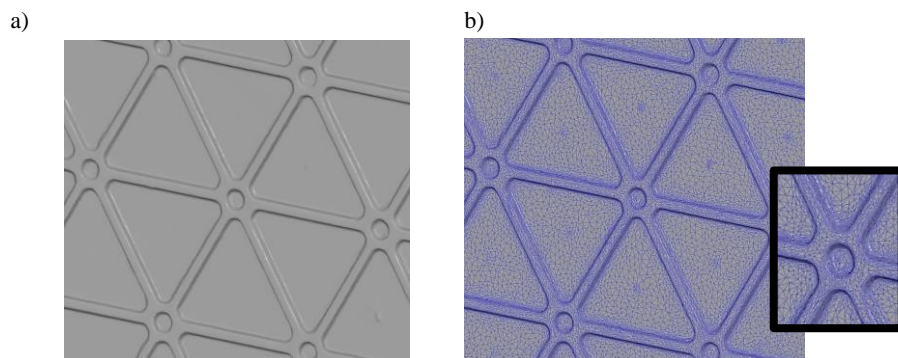


Rys. 5.9. Płyta przygotowana do badań systemem fotogrametrycznym (a) oraz wynik pomiaru (b) z zaznaczonymi kadrami wykonanych zdjęć



Rys. 5.10. Wynik pomiaru skanerem przestrzennym z zaznaczonymi punktami referencyjnymi (a) oraz otrzymana cyfrowa reprezentacja badanego elementu (b)

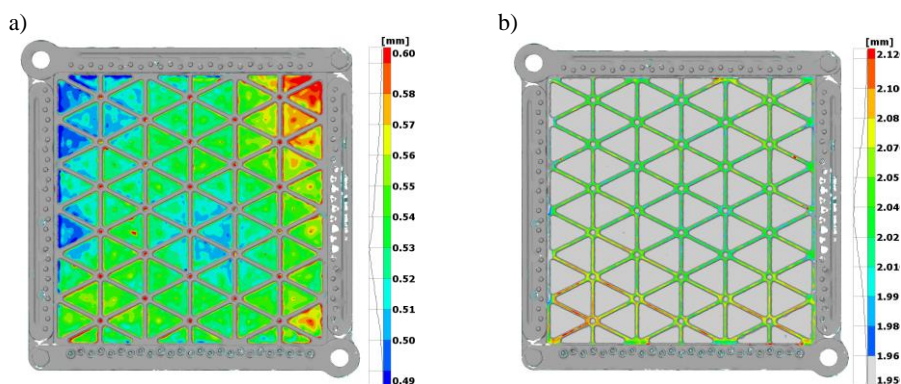




Rys. 5.11. Szczegóły geometrii powierzchni zeskanowanego elementu (a) oraz siatka odwzorowująca kształt elementu (b)

Rezultat pomiarów w postaci cyfrowej reprezentacji płyty zamontowanej w ramce porównano w geometrię referencyjną (model CAD), która posłużyła uprzednio do programowania obróbki CNC płyty.

Rozkład odchyłek wykonawczych w stosunku do geometrii modelu CAD przedstawiono na rys. 5.12. Maksymalne zmierzone odchyłki nie przekraczały 20% grubości płyty i ograniczały się jedynie do obszaru w okolicach jednego z jej naroży. W przeważającej większości powierzchni płyty grubość oscylowała wokół wartości 0,53 mm, co odpowiada odchyłce 6% w stosunku do wymiaru nominalnego. W przypadku usztywnień maksymalna odchyłka wykonawcza nie przekraczała 6%, a „średnia” wysokość wynosiła 2,04 mm, co stanowi odchyłkę od wymiaru nominalnego wynoszącą 2%.

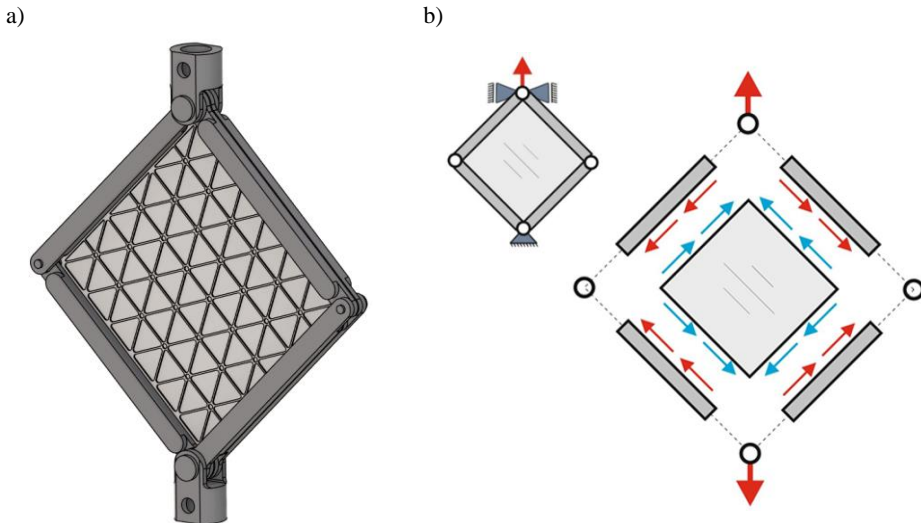


Rys. 5.12. Rozkład odchyłek wykonawczych płyty: a) grubość płyty (wartość nominalna 0,5 mm), b) wysokość usztywnień (wartość nominalna 2,0 mm)

Zmierzone odchyłki są zapewne związane z technologią wykonania płyty. W pierwszej kolejności górną powierzchnię płyty wyrównano (planowano) do grubości 2 mm, a następnie frezowano trójkątne kieszenie na głębokość 1,5 mm. Skutkowało to otrzymaniem w tym obszarze płyty o grubości 0,5 mm. Błędy wykonawcze są jednak niewielkiego rzędu, a grubość płyty oraz wysokość usztywnień można uznać za jednorodną.

### 5.2.5. Badania doświadczalne

Płytę montowano w sztywnej, stalowej ramie stanowiącej czworobok przegubowy, zapewniający możliwość obciążania wydatkiem stycznym wzdłuż brzegów, wywołując stan czystego ścinania (rys. 5.13). Obciążenia realizowano za pomocą uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej Zwick Z050, umożliwiającej sterowanie poziomem zadawanego obciążenia. Płytę obciążano siłą do wartości 40 kN, co powodowało zaistnienie stanów deformacji pokrywyczych, jak również pojawienie się deformacji plastycznych materiału badanej struktury.

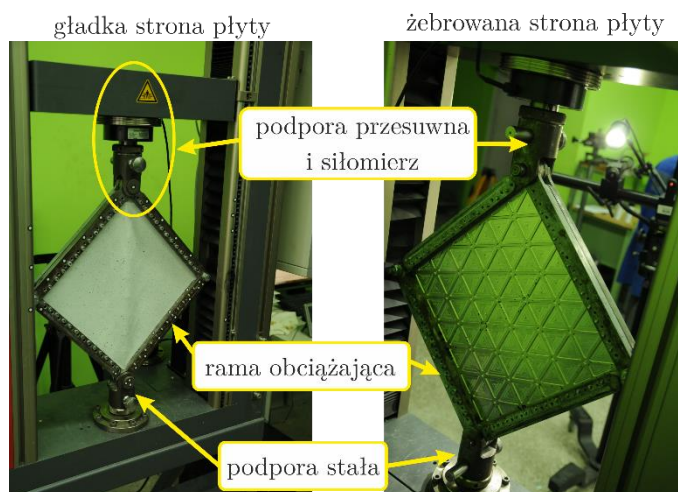


Rys. 5.13. Model CAD stanowiska badawczego (a) oraz schemat obciążenia (b)

W trakcie obciążania dokonywano pomiaru deformacji nieusztywnionej strony płyty za pomocą systemu trójwymiarowej cyfrowej korelacji obrazu (DIC). Pomiary polegały na wykonaniu serii zdjęć odpowiednio przygo-

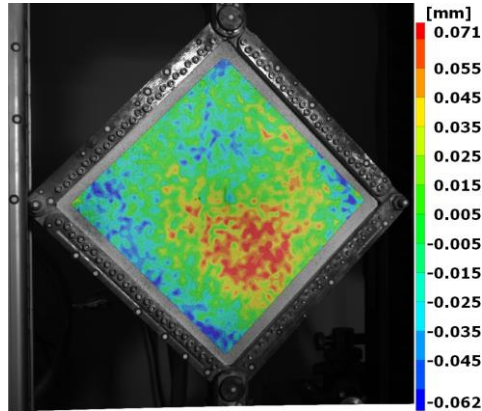
towanego obszaru z częstotliwością 1 Hz. Przygotowanie to obejmowało pokrycie powierzchni pomiarowej stochastycznym wzorem czarnych plamek, zgodnie z informacjami zawartymi w rozdziale czwartym. Do rejestracji przemieszczeń plamek związanych ze zmianami odkształceń pod wpływem wzrostu obciążenia wykorzystano dwie stereometrycznie rozmieszczone kamery cyfrowe oraz źródło światła, tworzące wraz z oprogramowaniem komputerowym system pomiaru deformacji wykorzystujący metodę cyfrowej korelacji obrazu ARAMIS 5M firmy GOM [36].

System DIC połączono z maszyną wytrzymałościową przez sygnał napięciowy, dzięki czemu możliwe stało się skorelowanie poziomu obciążenia z pomiarem deformacji. Realizację techniczną stanowiska badawczego zaprezentowano na rys. 5.14.



Rys. 5.14. Stanowisko przygotowane do badań – płyta zamontowana w przestrzeni pomiarowej maszyny wytrzymałościowej

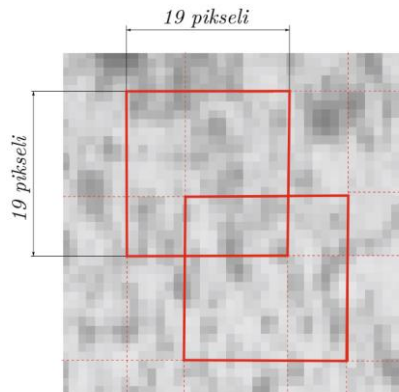
Zastosowanie skanera DIC umożliwia określenie wstępnej imperfekcji geometrycznej płyty. Rysunek 5.15 prezentuje odchyłki położenia punktów względem płaszczyzny teoretycznej pokrywającej się z płaską, nieuszywaną powierzchnią płyty zarejestrowaną w pierwszym etapie badania, gdy struktura nie została jeszcze poddana obciążeniu.



Rys. 5.15. Imperfekcja geometryczna płyty wynikająca z zamocowania w stanowisku badawczym. Wynik pomiaru skanerem DIC

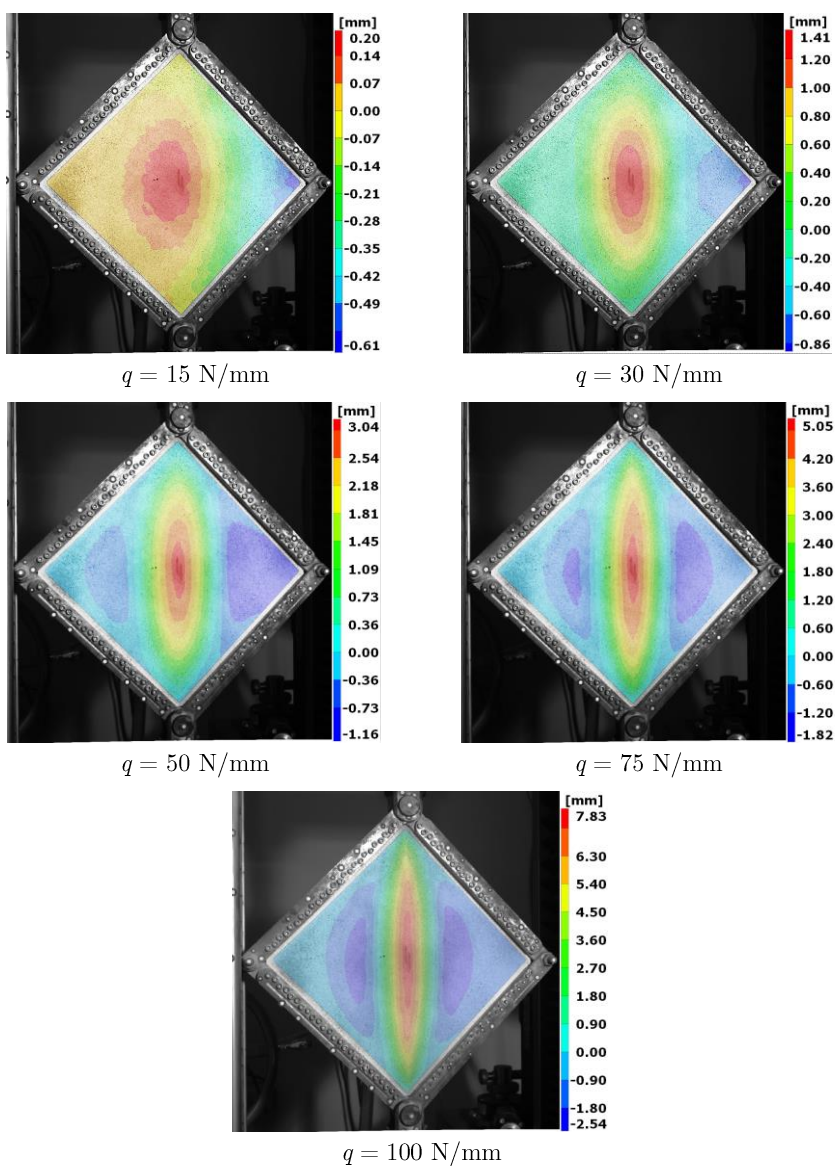
Wynikiem badań z wykorzystaniem skanera DIC jest cyfrowa informacja o przestrzennym położeniu punktów tworzących powierzchnię badanego elementu w każdym zarejestrowanym etapie obciążenia, co skutkuje utworzeniem wektorowego pola przemieszczeń punktów badanego obiektu.

W rozważanym przypadku wymiary objętości pomiarowej wynosiły 495 x 435 x 435 mm (wys. x szer. x głębokość). Fotografie o rozdzielczości obrazu równej 2448 na 2050 pikseli podzielono na 7255 podobszarów obliczeniowych (regionów korelacji) o wymiarach 19 na 19 pikseli (rys. 5.16). Odchyłka kalibracji wyniosła 0,040 piksela. Zdjęcia pomiarowe były wykonywane z częstotliwością 1 Hz, a w trakcie badania zarejestrowano 425 etapów obciążenia.



Rys. 5.16. Podział powierzchni płyty na podobszary obliczeniowe w metodzie DIC

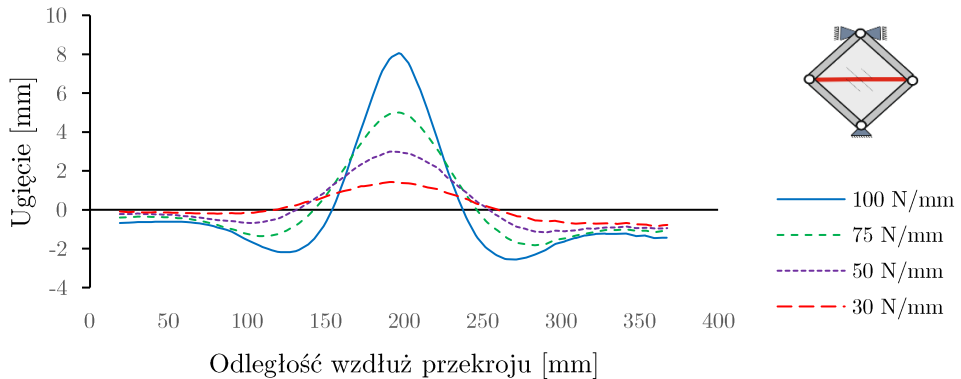
Wyniki otrzymane z wykorzystaniem systemu pomiarowego opartego na metodzie DIC można analizować zarówno w formie wykresów wyznaczonych dla konkretnych punktów, jak również za pomocą barwnych map prezentujących rozkład polowy składowych deformacji wyznaczanych względem dowolnie obranego układu odniesienia. Na rysunku 5.17 przedstawiono



Rys. 5.17. Ugięcie powierzchni płyty usztywnianej dla kolejnych faz deformacji (wynik DIC)

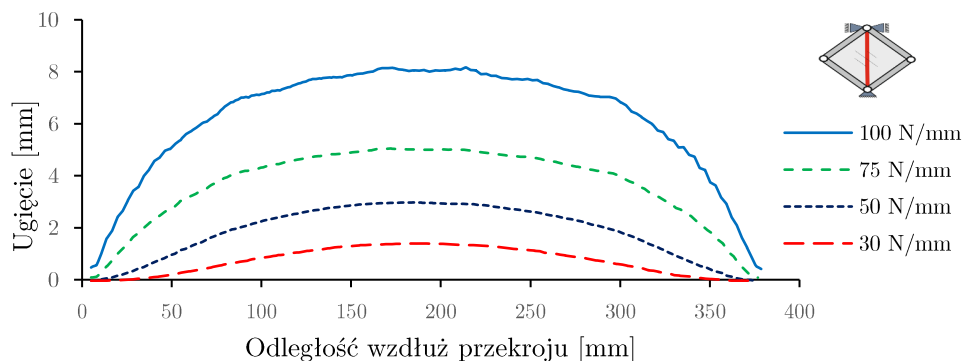
zmianę pola ugięcia punktów płyty na kierunku normalnym do jej powierzchni w kolejnych etapach obciążania. Globalna utrata stateczności objawiła się w postaci ugięcia o kształcie jednej półfali w środkowym obszarze geometrii płyty. Wzrost obciążenia doprowadził do pogłębienia ugięcia na środku płyty oraz pojawienia się dwóch dodatkowych, mniejszych półfal ugięcia symetrycznie ułożonych względem pionowej przekątnej płyty.

Analiza ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty (względem sposobu mocowania w trakcie badań eksperymentalnych) umożliwia dokładniejsze prześledzenie sposobu rozwoju deformacji ustroju wraz ze wzrostem obciążenia (rys. 5.18). Jak już wspomniano, utrata stateczności płyty objawiała się jako jedna półfala wzdłuż długości przekroju, której ugięcie przy maksymalnym obciążeniu wyniosło około 8 mm. Przy obciążeniu około 40 N/mm zaczęły się formować dwie mniejsze przeciwnie skierowane półfale, których deformacja osiągnęła maksymalną wartość 2,5 mm.



Rys. 5.18. Zmiana ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty dla kolejnych etapów obciążenia

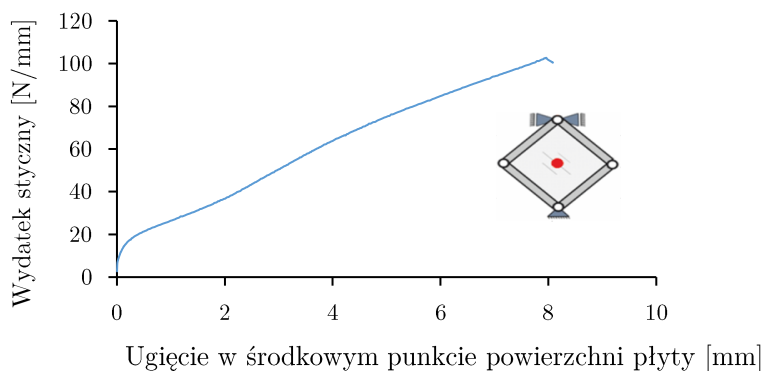
Odmienne zachowanie można obserwować w ugięciu przekroju wzdłuż przekroju pionowego (na kierunku wprowadzania obciążenia w badaniach eksperymentalnych) (rys. 5.19). Przy maksymalnym poziomie obciążenia można było zaobserwować lokalną utratę stateczności pokrycia pomiędzy żebrami w zakresie odkształceń plastycznych.



Rys. 5.19. Zmiana ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż pionowej przekątnej płyty dla kolejnych etapów obciążenia

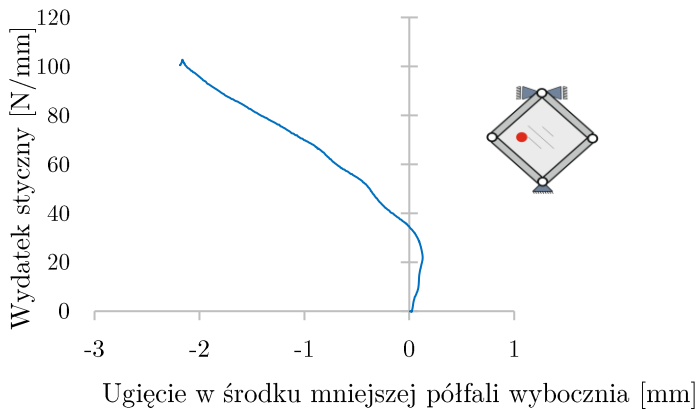
Na podstawie przebiegu ugięcia punktów charakterystycznych w zależności od obciążenia można tworzyć ścieżki równowagi, które obrazują graficznie zmiany deformacji struktury w całym zakresie obciążenia, z uwzględnieniem stanów krytycznych i zakrytycznych.

Na rysunku 5.20 przedstawiono reprezentatywną ścieżkę równowagi dla punktu w środku głównej półfali wybożenia, cechującego się maksymalną wartością ugięcia. W zakresie małych poziomów obciążenia relacja ta miała charakter liniowych zmian. Wraz ze wzrostem obciążenia można zaobserwować łagodną zmianę kąta nachylenia linii, co oznacza zmianę sztywności i przejście do zakresu dużych, tzn. nieliniowych geometrycznie, deformacji. Brak gwałtownej zmiany związanej z osiągnięciem stanu krytycznego jest spowodowany między innymi imperfekcją geometryczną, która cechuje rzeczywistą strukturę badawczą.



Rys. 5.20. Ścieżka równowagi dla środkowego punktu płyty

Rysunek 5.21 prezentuje ścieżkę równowagi wyznaczoną dla punktu położonego na bocznej półfali wybożenia, w którym zaobserwowano największą wartość ugięcia. Zmiana znaku deformacji jest związana z faktem, że w początkowym zakresie obciążenia punkt ten znajdował się na powierzchni ugięcia głównej półfali. Mniejsze półfale pojawiły się początkowo bliżej węzłów ramy obciążającej, a dopiero w późniejszym etapie deformacji przesunęły się bliżej środka płyty (rys. 5.18).

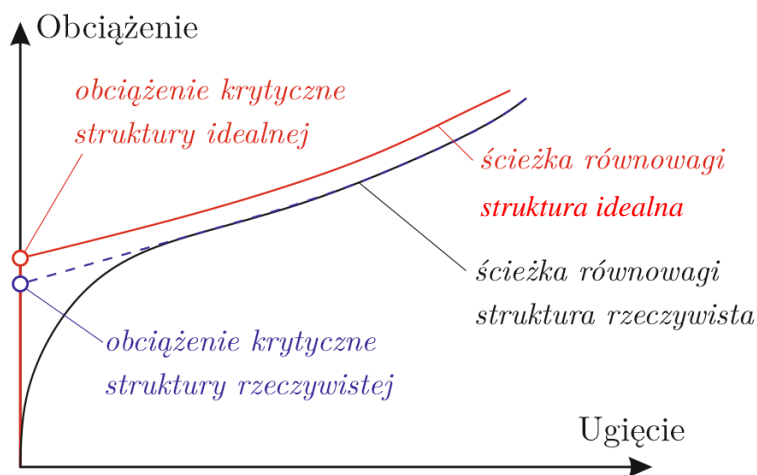


Rys. 5.21. Ścieżka równowagi dla punktu położonego w miejscu maksymalnego ugięcia mniejszej półfali deformacji

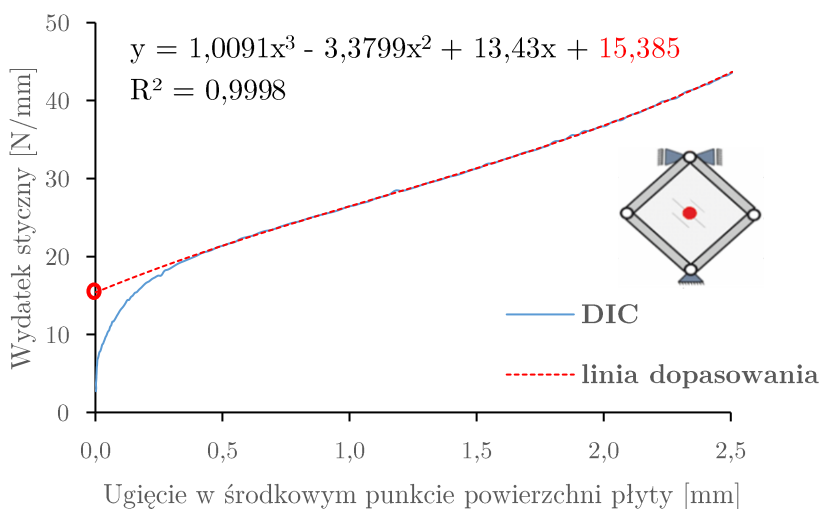
Wyniki pomiaru w postaci znajomości pola deformacji umożliwiają również określenie przybliżonych wartości obciążeń powodujących utratę stateczności. W takim przypadku konieczne jest zastosowanie odpowiednich metod aproksymacyjnych opartych na metodach Koitera [58] albo relacji obciążenia i ugięcia ( $P(w)$ ) lub obciążenia i kwadratu ugięcia ( $P(w^2)$ ) w punkcie charakterystycznym świadczącym o utracie stateczności [99, 121, 139]. W rozważanym przypadku czystego ścinania płyty przybliżona, doświadczalna wartość obciążenia krytycznego została wyznaczona na podstawie metody Koitera (rys. 5.22). W tym celu wykorzystano aproksymowanie fragmentu ścieżki równowagi obciążenie–ugięcie wielomianem trzeciego stopnia, tak by współczynnik korelacji  $R^2$  był zbliżony w ponad 95% z postacią pierwotnej krzywej w zakresie odkształceń sprężystych. Miejsce przecięcia funkcji aproksymacji z pionową osią wykresu, opisującą wydatek



styczny, wyznaczyło przybliżoną wartość obciążenia krytycznego wynoszącą około 15,4 N/mm (rys. 5.23). Określenie wartości obciążenia krytycznego polega zatem na wyznaczeniu takiej jego wartości, pod wpływem której struktura doznaje przeskoku z zakresu liniowych do nieliniowych geometrycznie deformacji.



Rys. 5.22. Schematyczny sposób wyznaczania obciążenia krytycznego na podstawie wyników badań doświadczalnych



Rys. 5.23. Sposób wyznaczania przybliżonej wartości obciążenia krytycznego na podstawie wyników badań doświadczalnych

### 5.2.6. Analizy numeryczne w ujęciu MES

Model numeryczny płyty z geodetycznymi wzmocnieniami w ujęciu Metody Elementów Skończonych przygotowano w komercyjnym oprogramowaniu ABAQUS 6.13 firmy Dassault Systèmes [1].

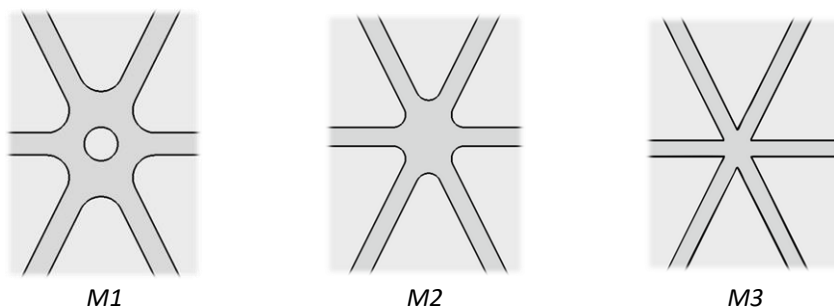
Problem w założeniu traktowano jako fizycznie i geometrycznie nieliniowy. Dla materiału płyty przyjęto charakterystykę sprężysto-plastyczną ze wzmocnieniem (rys. 2.4), o następujących stałych materiałowych: moduł Younga  $E = 70 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0,33$ , moduł styczny w strefie wzmocnienia plastycznego  $E_t = 0,9 \text{ GPa}$ , naprężenia niszczące  $R_u = 488 \text{ MPa}$  w punkcie odpowiadającym odkształceniu plastycznemu równemu 0,164. Elementy stalowej ramy modelowano jako liniowo-sprężyste, z wartością modułu Younga  $E = 210 \text{ GPa}$  oraz współczynnikiem Poissona  $\nu = 0,3$ . Dane wykorzystanych materiałów zawarto w tab. 5.1.

Tabela 5.1. Nominalne właściwości mechaniczne materiałów stosowanych w modelu MES

Materiał	Moduł Younga $E$ [GPa]	Współczynnik Poissona $\nu$ [-]	Granica plastyczności $R_e$ [MPa]	Naprężenia niszczące $R_u$ [MPa]
Al2024	70	0,33	345	488
Stal	210	0,3	-	-

Procedurę podzielono na dwa etapy. Etap pierwszy obejmował analizy wstępne, mające na celu sprawdzenie poprawności funkcjonowania modelu numerycznego. W etapie drugim przeprowadzono właściwe obliczenia, w ujęciu geometrycznie i fizycznie nieliniowym, zmierzające do porównania wyników obliczeń z eksperymentem.

Wzięto pod uwagę trzy sposoby modelowania geometrii węzłów struktury wzmocnień, z różnymi stopniami uproszczenia. Model pierwszy (oznaczenie M1, rys. 5.24) charakteryzował się najdokładniejszym odwzorowaniem geometrii ustroju. W modelu M2 pominięto otwór w środku węzła, natomiast w modelu M3 pominięto zarówno otwór, jak i zaokrąglenia w węzłach siatki.



Rys. 5.24. Stopień uproszczenia geometrii węzłów w modelach numerycznych

Dla każdego z modeli rozważano trzy przypadki obciążenia (rys. 5.25):

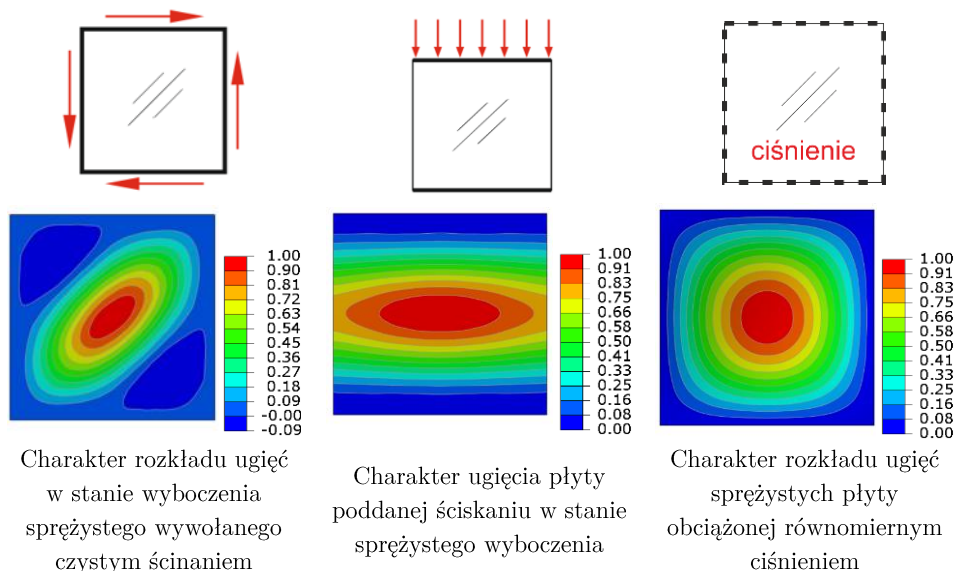
- wyboczenie w warunkach czystego ścinania przy odebraniu rotacyjnych stopni swobody wszystkim brzegom płyty,
- wyboczenie w warunkach ściskania przy utwierdzeniu dolnego i górnego brzegu płyty oraz zachowaniu swobody deformacji brzegów bocznych,
- zginanie przegubowo podpartej płyty na wszystkich brzegach, obciążonej na powierzchni równomiernie rozłożonym ciśnieniem.

Na rysunku 5.25 linią przerywaną zaznaczono brzegi podparte przegubowo, natomiast linia pogrubiona oznacza brzegi, których możliwość obrotu została odebrana. Obok schematów obciążenia przedstawiono względne poziomy deformacji poprzecznych.

Wyniki analiz przedstawiono w tab. 5.2. Założono, że rezultaty dla modelu M1 są wartościami referencyjnymi wobec wyników uzyskiwanych w pozostałych przypadkach. Najbardziej uproszczony geometrycznie model (M3) cechował się mniejszymi o około 5% wartościami obciążeń krytycznych oraz wykazał sztywność niższą o około 3-6% w stosunku do modelu referencyjnego (M1). Różnice te wynikały prawdopodobnie z mniejszej objętości materiału modelu M3 wynikającego z braku zaokrążeń w narożach węzłów siatki isogrid. Przeciwna sytuacja była obserwowana w przypadku wyników modelu M2. Powodem była nadmierna ilość materiału wynikająca z braku otworu w węzłach siatki.

Dla porównania przeprowadzono identyczne analizy dla płyty gładkiej o grubości 0,75 mm. Płyta ta cechowała się identyczną masą w stosunku do struktury usztywnianej. We wszystkich przypadkach obciążenia modele zachowywały się podobnie do płyty gładkiej, pozbawionej usztywnień.

Wyniki zawarte w tab. 5.2 dowodzą, że płyta taka odznacza się obciążeniami krytycznymi niższymi o około 60 i 70% w stosunku do ustroju integralnie usztywnianego, odpowiednio dla ścinania i ściskania. Ugięcie powierzchni płyty pod działaniem ciśnienia było około 200% większe w stosunku do modelu referencyjnego (M1). Jedyne przypadki, dla którego płyta gładka okazała się bardziej sztywna, stanowiło statyczne rozciąganie, dla którego uzyskano deformację około 20% mniejszą niż dla modelu referencyjnego. W przypadku płyty usztywnianej obszary pomiędzy siatką usztywnień miały bowiem mniejszą grubość.



Rys. 5.25. Przypadki obciążeń płyty w stanach sprężystych oraz odpowiadająca im postać deformacji

Analizy w ujęciu nieliniowym przeprowadzono z zastosowaniem zmodyfikowanej metody prognostycznej Newtona-Raphsona z procedurami korekcji obciążenia [32-35]. Parametry sterujące awansowaniem rozwiązania obejmowały wstępny względny przyrost obciążenia jako 0,001 i maksymalny jako 0,01. W ramach każdego przyrostu program wykonuje iteracje, aż do momentu uzyskania stanu równowagi statycznej obciążenia zewnętrznego i sił wewnętrznych (wzór (3.33)) z dokładnością do 0,5%. Sprawdzany jest również relatywny przyrost deformacji na skutek obciążenia (wzór (3.32)), który nie powinien być większy niż 1% w danym przyroście.

Tabela 5.2. Porównanie wyników wstępnych analiz numerycznych w ujęciu MES

Przypadek obciążenia	Wartość	M1	M2	M3	Płyta gładka (grubość 0,75 mm, masa równoważna)
Czyste ścinanie	$\frac{\tau_{kr}}{\tau_{kr\_M1}}$	1	1,03	0,95	0,37
Ściskanie	$\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{kr\_M1}}$	1	1,03	0,95	0,32
Zginanie (obciążenie ciśnieniem)	$\frac{\text{ugięcie}}{\text{ugięcie\_M1}}$	1	0,97	1,06	2,14

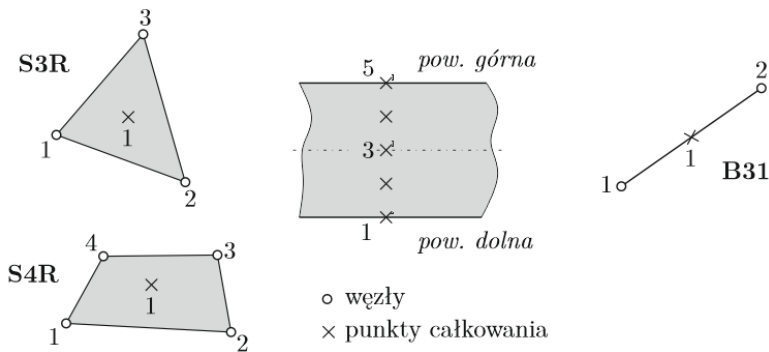
Wielkość każdego kolejnego kroku przyrostowego jest dobierana automatycznie przez algorytm komputerowy. W przypadku gdy zbieżność rozwiązania jest uzyskiwana w mniej niż pięciu iteracjach, kolejny krok przyrostowy jest zwiększany o 50% wielkości. Jeżeli natomiast stan równowagi statycznej nie zostanie osiągnięty w szesnastu kolejnych iteracjach rozwiązania danego przyrostu, to algorytm obniża wartość przyrostu obciążenia o 25% i obliczenia są ponawiane. W przypadku niemożliwości uzyskania zbieżności przy kolejnych pięciu próbach zmniejszających krok przyrostowy obliczenia są przerywane.

Pierwszy etap obliczeń nieliniowych poprzedzały zlinearyzowane analizy stateczności. Wyniki analiz, dostarczające informacji o postaci deformacji stanowiły podstawę ustalenia wstępnej imperfekcji geometrycznej o wielkościach: 1%, 5% i 10% grubości płyty.

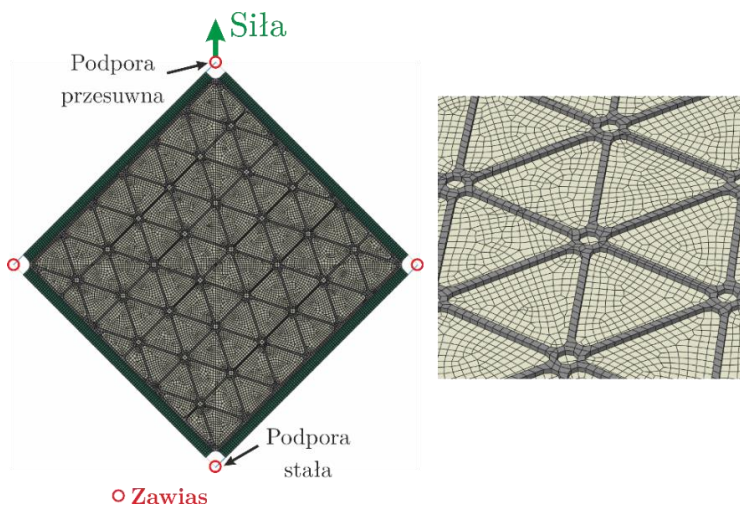
Stalową ramę, w której mocowano konstrukcję, modelowano za pomocą przestrzennych elementów belkowych B31 posiadających po sześć stopni swobody w każdym z dwóch węzłów. Element posiada liniową funkcję kształtu i jest definiowany jako belka Timoshenki, co umożliwia odwzorowanie deformacji poprzecznych. Elementy narożne ramy odwzorowywano połączeniem typu HINGE [1]. Szew śrubowy pomiędzy elementami ramy a płytą modelowano za pomocą elementów MPC typu TIE [1, 11]. W celu odtworzenia warunków brzegowych, w górnym węźle ramy zastosowano podpórę przesuwną. Dolny węzeł stanowiła podpora stała.

Płytę modelowano, stosując standardowe elementy powłokowe cztero-węzłowe (S4R) i trójwęzłowe (S3R) oparte na teorii Koitera-Sandersa, o zredukowanej liczbie punktów całkowania Gaussa [43] i możliwościach

uwzględnienia dużych deformacji [42]. Elementy te posiadają również procedury kontroli rozwiązania, które uniemożliwiają wystąpienie niepoprawnych form deformacji typu *hourglass* oraz *shear locking* [74]. Elementom siatki przyporządkowano stosowne grubości. Przyjęty sposób modelowania umożliwił odtworzenie zaokrągleń w narożach płyty, jednak nie zapewnił możliwości symulacji zaokrągleń w kierunku normalnym do powierzchni. W celach porównawczych modelowano również płytę gładką o identycznej masie. Schematy ideowe przyjętych elementów skończonych przedstawiono na rys. 5.26, natomiast model numeryczny płyty zamontowanej w ramie wraz z zaznaczonymi warunkami brzegowymi i obciążeniem pokazano na rys. 5.27.

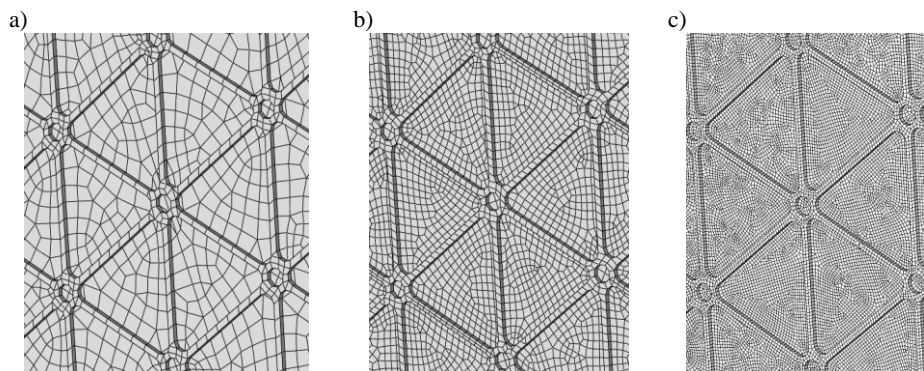


Rys. 5.26. Schematy wykorzystanych elementów skończonych



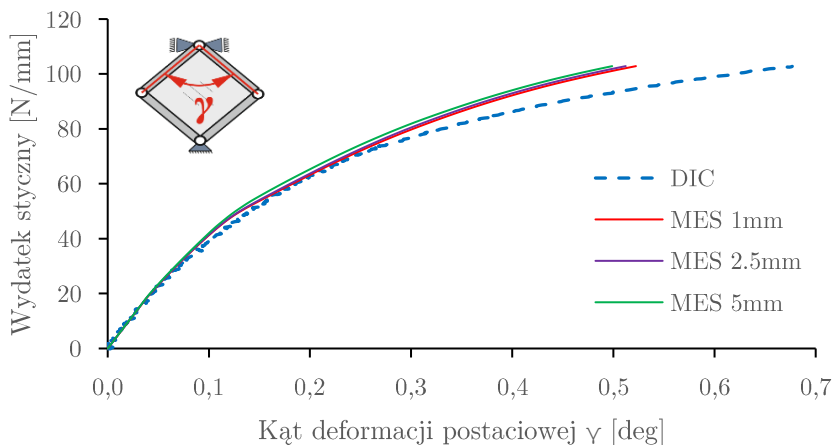
Rys. 5.27. Model numeryczny płyty oraz warunki brzegowe

W trakcie przeprowadzanych analiz rozważono również wpływ wielkości elementów skończonych na wartości pokrytyczne obciążenia oraz formy deformacji. Siatkę elementów skończonych wokół węzłów usztywnienia o różnej wielkości elementów przedstawia rys. 5.28.



Rys. 5.28. Siatka elementów skończonych wykorzystana w badaniu wrażliwości modelu MES na rozmiar elementu. Wymiar charakterystyczny elementu: a) 5 mm, b) 2,5 mm, c) 1 mm

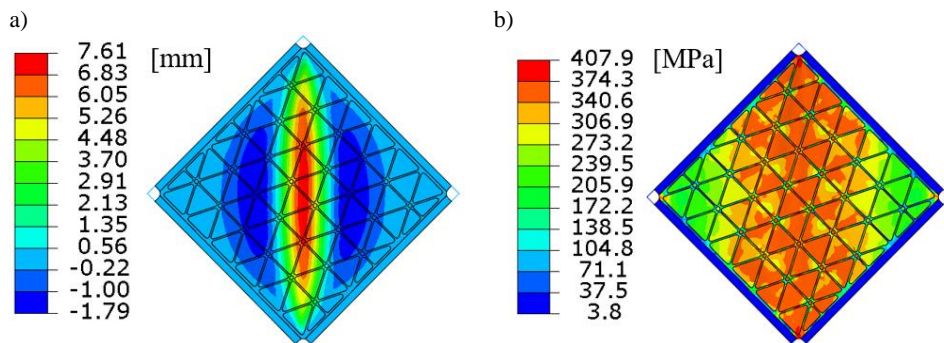
W celach porównawczych, umożliwiającą sprawdzenie przygotowanych do badań modeli, sporządzono krzywe zależności kąta deformacji postaciowej płyty w funkcji obciążenia wydatkiem stycznym (rys. 5.29). Rezultat badań eksperymentalnych skonfrontowano z wynikami obliczeń numerycznych dotyczących trzech przypadków modelowania wg rys. 5.28.



Rys. 5.29. Porównanie przebiegów obciążania wydatkiem stycznym w funkcji kąta deformacji postaciowej ustroju  $\gamma$ . Analiza MES oraz eksperyment

Przedstawione wyniki obliczeń numerycznych wykazują wysoką zgodność z eksperymentem do poziomu obciążenia wydatkiem stycznym około 75 N/mm. Powyżej tej wartości obciążenia obliczenia MES wykazywały tendencję wzrostu sztywności ustroju w miarę wzrostu obciążenia w każdym z rozpatrywanych modeli. Porównanie wyników uzyskanych dla modeli o różnych wymiarach elementów zwraca uwagę na to, że charakterystyczne wymiary elementu w niewielkim stopniu mają wpływ na rozważane deformacje.

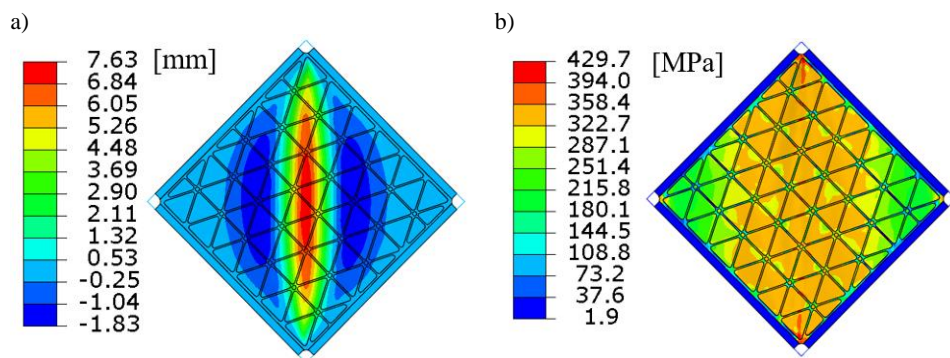
Na rysunkach 5.30-5.32 przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych w postaci pól deformacji poprzecznych (ugięć) oraz rozkładu naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H w warunkach maksymalnego obciążenia płyty wydatkiem 102 N/mm (stan po utracie stateczności) dla trzech przypadków modeli zróżnicowanych charakterystycznymi wymiarami elementu skończonego, wynoszącymi odpowiednio: 5 mm (rys. 5.30), 2,5 mm (rys. 5.31) i 1 mm (rys. 5.32).



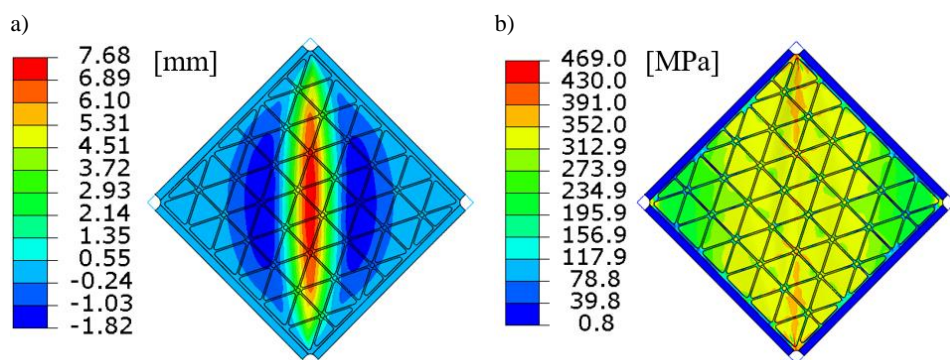
Rys. 5.30. Pole ugięcia (a) oraz rozkład wyężenia wg H-M-H (b) dla modelu o długości elementów 5 mm. Maksymalny poziom obciążenia

Najwyższe wartości ugięć zaobserwowano w modelu z elementami o wymiarze charakterystycznym równym 1 mm. Identyczną zależność zaobserwowano w odniesieniu do wartości naprężenia (rys. 5.32b). Zróżnicowanie pomiędzy modelami opartymi na elementach 1 mm i 5 mm wyniosło 13%. Wraz ze zmniejszaniem się wymiarów elementu skończonego, czyli w miarę wzrostu liczby elementów, obserwowano wzrost wartości naprężenia, szczególnie w sąsiedztwie górnych i dolnych węzłów ramy.





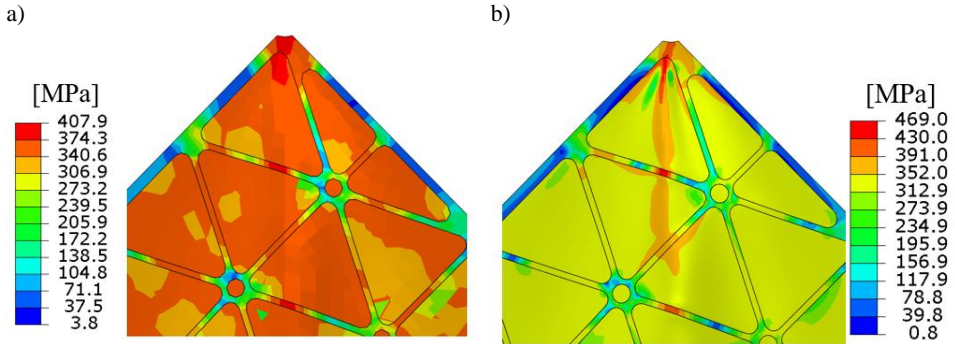
Rys. 5.31. Pole ugięcia (a) oraz rozkład wyężenia wg H-M-H (b) dla modelu o długości elementów 2,5 mm. Maksymalny poziom obciążenia



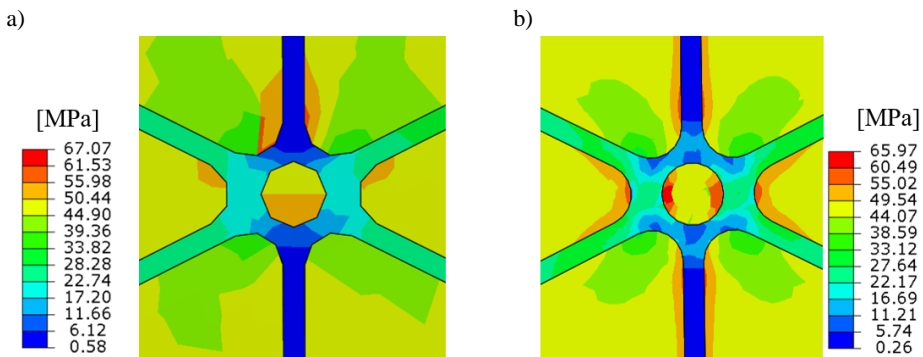
Rys. 5.32. Pole ugięcia (a) oraz rozkład wyężenia wg H-M-H (b) dla modelu o długości elementów 1 mm. Maksymalny poziom obciążenia

W celu zwrócenia uwagi na poziomy gradientów wyężenia oraz ich lokalizację, na rys. 5.33 przedstawiono w zbliżeniu rozkłady wyężenia dla modeli o długości elementów 5 mm i 1 mm, w warunkach ekstremalnego obciążenia płyty.

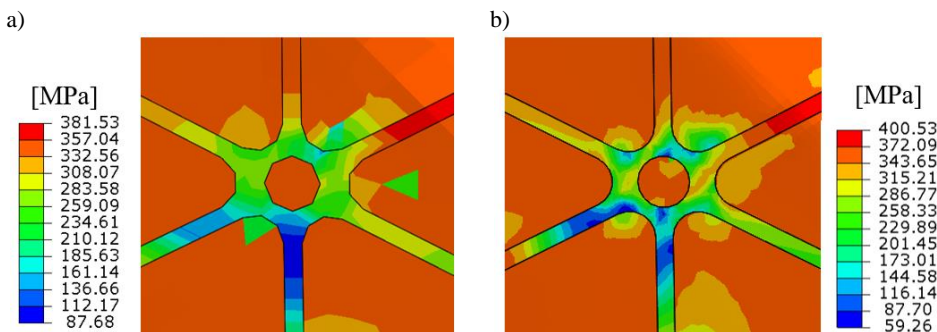
Na rysunkach 5.34 i 5.35 przedstawiono stan napężenia wg hipotezy H-M-H dla etapu odkształcenia przed utratą stateczności konstrukcji (wydatek styczny około 15 N/mm) oraz odpowiednio dla maksymalnego poziomu obciążenia (wydatek styczny około 102 N/mm), dla modeli o najwyższej i najniższej gęstości siatki. Położenie węzła przedstawionego na tych rysunkach zostało wybrane w środku płyty, aby w jak najmniejszym stopniu przedstawić obszar dotknięty warunkami brzegowymi.



Rys. 5.33. Porównanie stanów wyężenia wg H-M-H w obszarze górnego węzła modelu dla maksymalnego obciążenia, dla modeli o wymiarach charakterystycznych elementu:  
a) 5 mm, b) 1 mm



Rys. 5.34. Porównanie stanów naprężeń H-M-H w węźle siatki usztywniającej dla obciążenia 15 N/mm (stan przed wyboczeniem). Wyniki dla modeli o długości charakterystycznej elementu równej 5 mm (a) i 1 mm (b)



Rys. 5.35. Porównanie stanów wyężenia wg H-M-H [MPa] w węźle siatki usztywniającej dla maksymalnego obciążenia (stan po wyboczeniu w zakresie odkształceń plastycznych). Wyniki dla modeli o długości charakterystycznej elementu równej 5 mm (a) i 1 mm (b)

Poza oczywistymi różnicami związanymi z wielkością zastosowanych elementów i możliwością symulacji efektów lokalnych należy zauważyć, że w rozpatrywanych modelach MES nie odtwarzano zaokrągleń pomiędzy podłużnicami a pokryciem, co prawdopodobnie ma wpływ na poziom naprężenia w rzeczywistej konstrukcji.

Na podstawie przeprowadzonych badań i analiz numerycznych można sformułować pewne wnioski. Przede wszystkim wielkość siatki ma niewielki wpływ na ogólną sztywność rozpatrywanej konstrukcji w warunkach obciążenia statycznego. Rozkład naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera-Misesa-Henckego (H-M-H) uzyskany dla modeli o różnej charakterystycznej długości elementu (rys. 5.35) różnił się istotnie, co może mieć decydujący wpływ na ocenę trwałości zmęczeniowej.

Model wybrany do dalszych analiz składał się z 17 947 elementów o średnim wymiarze charakterystycznym równym 2,5 mm. Zapewniono w ten sposób rozsądny kompromis pomiędzy dokładnością otrzymanywnych wyników a czasem niezbędnym do przeprowadzenia obliczeń.

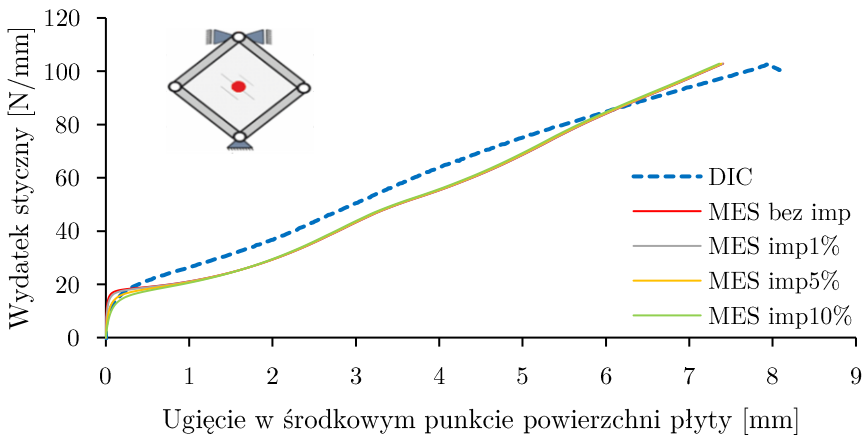
Ocena poprawności modelowania numerycznego rozważanych ustrojów jest uwarunkowana dostateczną zgodnością wyników analiz numerycznych z rezultatami badań eksperymentalnych. Stopień zbieżności wyników wydaje się jedynym racjonalnym kryterium przyzwalającym na podejmowanie podobnych rozwiązań w szczególności wówczas, gdy projektowany ustrój jest poddawany obciążeniom wywołującym stany zaawansowanych deformacji. Spójność obydwu form badania ustroju podjęto w dalszych rozważaniach.

### **5.2.7. Konfrontacja wyników badań eksperymentalnych i analiz numerycznych**

Zważywszy, że jednemu stanowi deformacji odpowiada tylko jeden stan sił wewnętrznych ustroju, kryterium zgodności rezultatów analiz numerycznych z wynikami badań doświadczalnych ustrojów nośnych może stanowić wyłącznie zgodność geometrii w warunkach obciążenia wywołującego ekstremalne deformacje, eksploatacyjnie dopuszczalne.

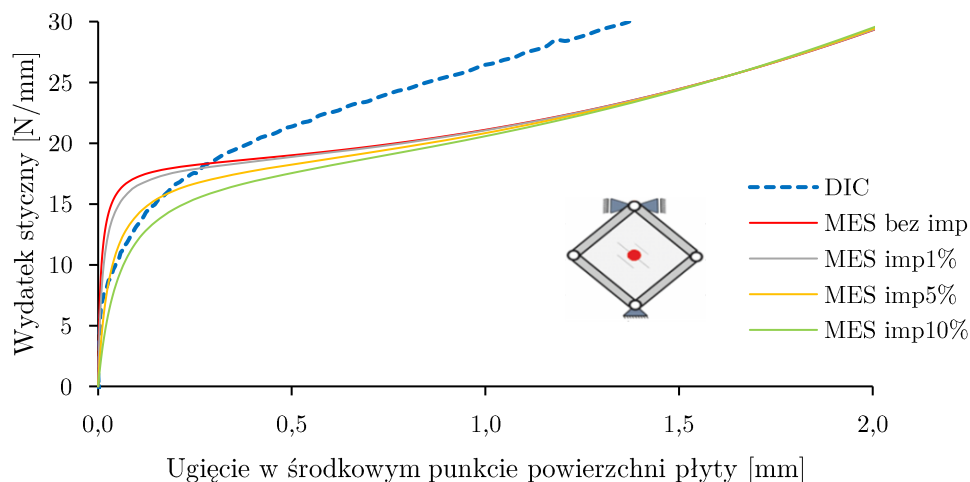
Analizie poddano modele numeryczne o wstępnej imperfekcji wprowadzonej jako pierwsza postać wybożenia o wielkości 1%, 5% i 10% grubości płyty oraz dla modelu o geometrii idealnej.

Zagadnienie zgodności geometrii deformacji rozważano, rozpoczynając od porównania zależności pomiędzy ugięciem środka geometrycznego płyty a obciążeniem struktury (rys. 5.36). W fazie awansowania deformacji poniżej obciążenia około 85 N/mm model MES zachowywał mniejszą sztywność niż ta wynikająca z pomiarów eksperymentalnych. Przebiegi takie mogą uzasadniać uproszczenia geometrii modelu (np. brak zaokrągleń pomiędzy żebrami a pokryciem) i zbyt uproszczony model właściwości materiałowych.



Rys. 5.36. Porównanie eksperymentalnej i numerycznej ścieżki równowagi dla punktu środkowego płyty żebrowanej (imp oznacza imperfekcję geometryczną)

Wstępna imperfekcja geometryczna wprowadzona do modelu MES skutkowała różnicami w zachowaniu się analizowanej struktury tylko dla niskich poziomów obciążenia. Powyżej wydatku około 20 N/mm wszystkie ścieżki równowagi przyjmowały niemal identyczne przebiegi (rys. 5.37). Obliczenia numeryczne dowiodły, że wzrost wartości imperfekcji wstępnej prowadzi do łagodniejszej ścieżki równowagi w zakresie obciążeń bliskich utracie stateczności.

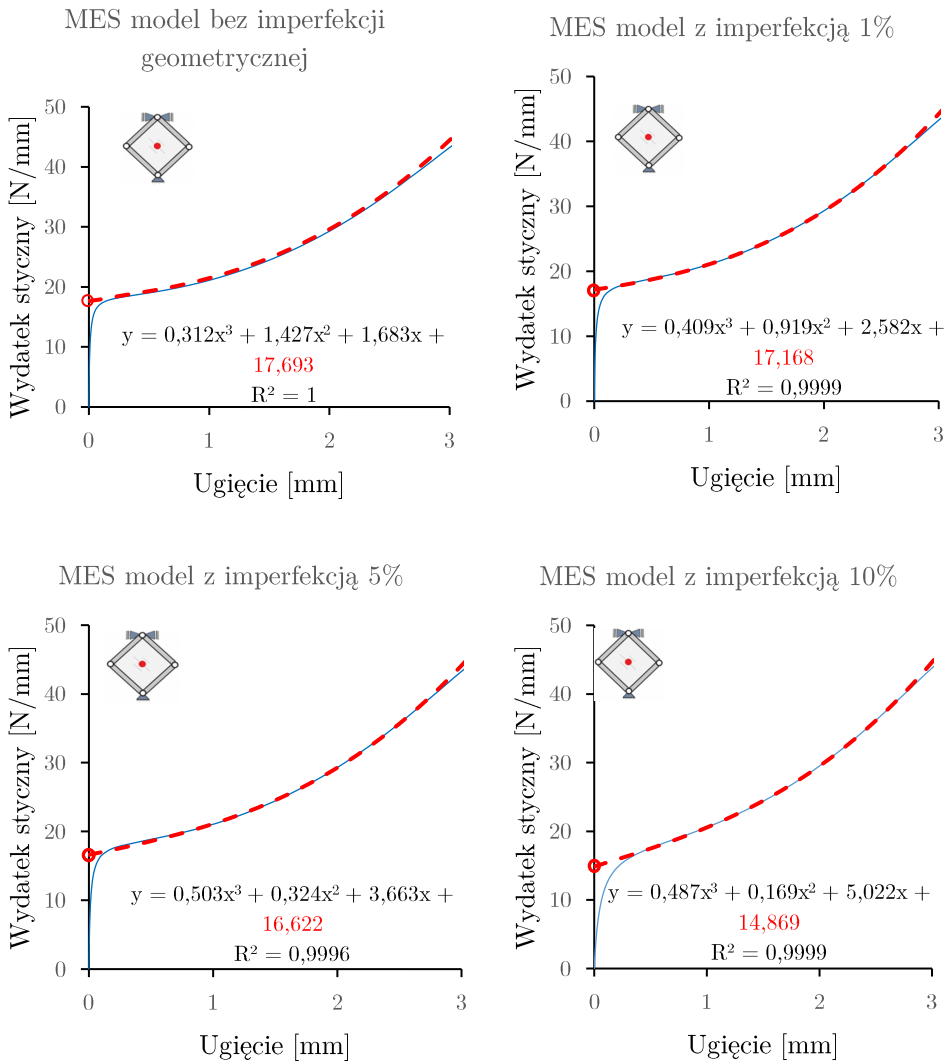


Rys. 5.37. Porównanie eksperymentalnej i numerycznej ścieżki równowagi dla punktu środkowego płyty żebrowanej. Zbliżenie na zakres utraty stateczności

Z wykorzystaniem metodyki zaprezentowanej w punkcie dotyczącym badań doświadczalnych (pkt 5.2.5) możliwe jest również wyznaczenie obciążenia krytycznego dla przypadków analiz numerycznych prowadzonych w zakresie deformacji nieliniowych. Przyjętym kryterium, podobnie jak poprzednio, było wyboczenie określane jako deformacja punktu środkowego płyty. Wyniki zawarto w tab. 5.3 oraz na rys. 5.38.

Tabela 5.3. Krytyczne wartości wydatku stycznego otrzymane na podstawie funkcji aproksymacyjnych dla wyników badań doświadczalnych i nieliniowych analiz MES

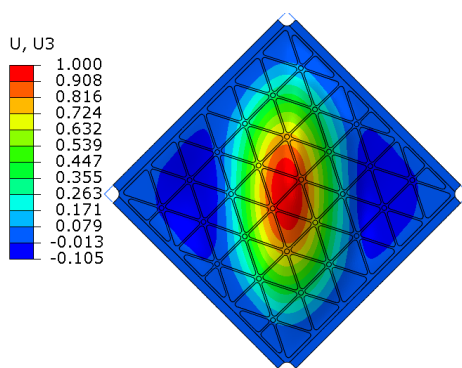
Przypadek analizy MES	Obciążenie krytyczne $q_{kr}$ [N/mm]
Model MES bez wprowadzonej imperfekcji geometrycznej	17,7
Model MES ze wstępną imperfekcją geometryczną o wartości 1% grubości płyty	17,2
Model MES ze wstępną imperfekcją geometryczną o wartości 5% grubości płyty	16,6
Model MES ze wstępną imperfekcją geometryczną o wartości 10% grubości płyty	14,9
Eksperyment (DIC)	15,4



Rys. 5.38. Sposób wyznaczania przybliżonej wartości obciążenia krytycznego na podstawie wyników nieliniowych analiz numerycznych MES dla punktu w środku powierzchni płyty

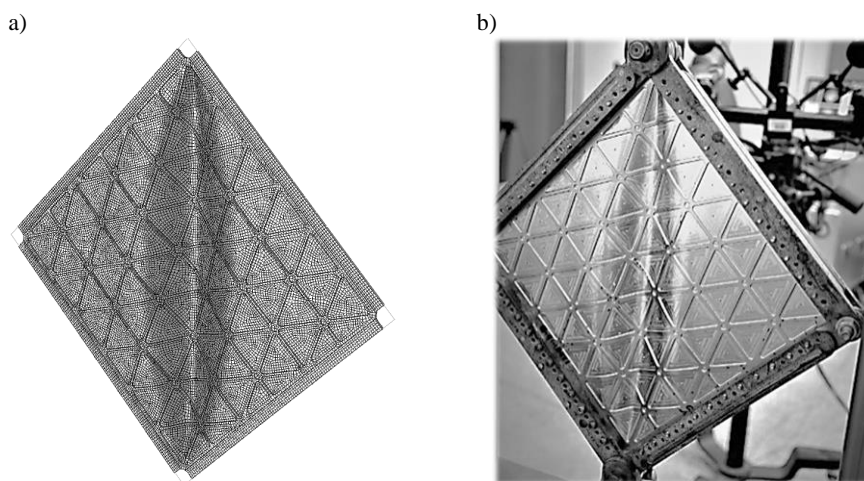
Na rysunku 5.39 zaprezentowano również postać deformacji oraz wartość obciążenia krytycznego wynikającą z przeprowadzonych analiz MES realizowanych jako zagadnienie na wartości własne tzw. wyoboczenia liniowego wg metody Lanczosa [73]. Różnice w stosunku do wyników przedstawionych w tab. 5.3 wynikają z faktu, że obciążenie krytyczne wyznaczone

z analiz zlinearyzowanych odnosi się do struktury o geometrii idealnej, pozabawionej wstępnej imperfekcji.

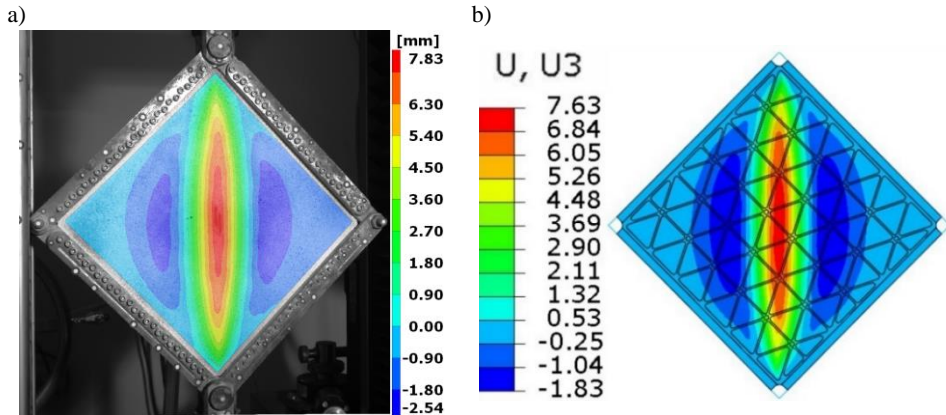


Rys. 5.39. Znormalizowane pole ugięcia dla pierwszej postaci wyboczenia płyty usztywnianej – wynik MES, analiza na wartości własne. Obciążenie krytyczne  $q_{kr} = 18,3 \text{ N/mm}$

Rysunek 5.40 przedstawia jakościowe porównanie powierzchni deformacji (ugięcia) dla maksymalnego poziomego obciążenia, otrzymanych na drodze analiz numerycznych i badań eksperymentalnych. Rysunek 5.41 prezentuje ilościową konfrontację pola ugięcia otrzymanego w tych samych warunkach obciążenia. Należy zauważyć, że mimo wspomnianych wcześniej różnic ogólna postać deformacji modelu numerycznego jest zbieżna z wynikiem eksperymentu.

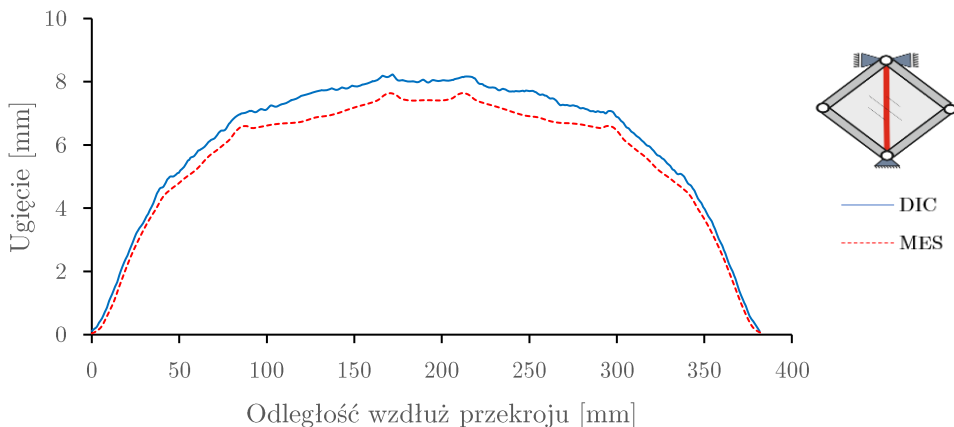


Rys. 5.40. Jakościowe porównanie deformacji płyty poddanej działaniu maksymalnego obciążenia: a) wynik analiz numerycznych, b) rezultat eksperymentalny



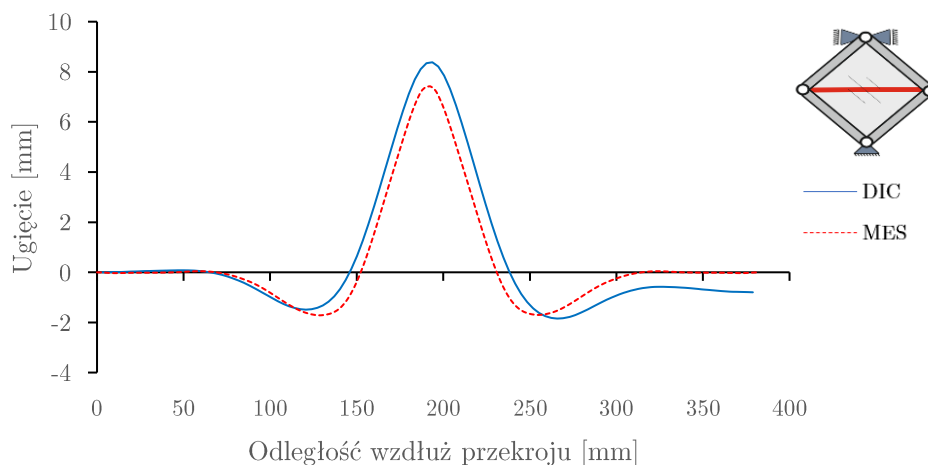
Rys. 5.41. Ilościowe porównanie deformacji płyty poddanej działaniu maksymalnego obciążenia: a) rezultat eksperymentalny (DIC), b) wynik analiz numerycznych (wartość przemieszczenia w [mm])

Wykorzystanie skanera DIC umożliwiło również ilościowe porównanie innych składowych deformacji. Rysunki 5.42 i 5.43 przedstawiają ugięcie przekrojów płyty poprowadzonych wzdłuż pionowej i poziomej przekątnej dla maksymalnego obciążenia realizowanego w trakcie badań doświadczalnych. Przekrój pionowy oprócz ogólnego ugięcia pokazał również lokalne deformacje pomiędzy żebrami w zakresie odkształceń plastycznych. Zjawisko to jest widoczne na rys. 5.42, gdzie żebra są przedstawione jako piki (górkę), a pomiędzy nimi można zaobserwować deformacje w postaci utraty stateczności pokrycia.

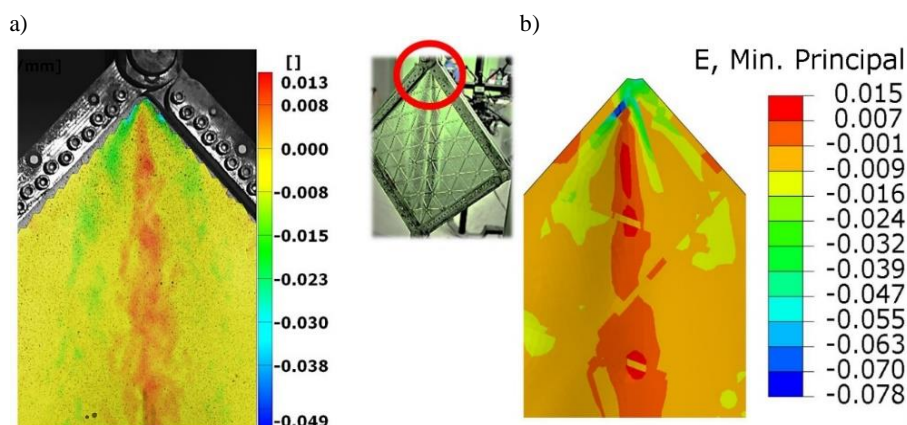


Rys. 5.42. Ugięcie przekroju poprowadzonego wzdłuż pionowej przekątnej płyty poddanej działaniu maksymalnego obciążenia





Rys. 5.43. Ugięcie przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty poddanej działaniu maksymalnego obciążenia

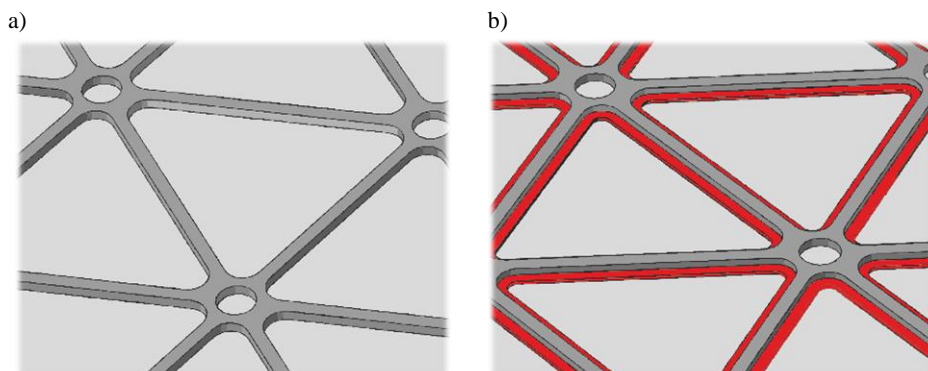


Rys. 5.44. Porównanie rozkładu składowej minimalnej odkształcenia głównego, a) wynik eksperymentalny DIC, b) wynik analiz numerycznych MES

Rysunek 5.44 przedstawia pola odkształceń w obszarze górnego węzła ramy obciążającej, zarejestrowane systemem DIC i otrzymane przez analizy numeryczne, spowodowane działaniem maksymalnego obciążenia. Porównanie obydwu rezultatów może być dowodem na wystarczającą zbieżność rozwiązania MES również w tym aspekcie.

### 5.2.8. Analiza sposobu modelowania szczegółów geometrii konstrukcji

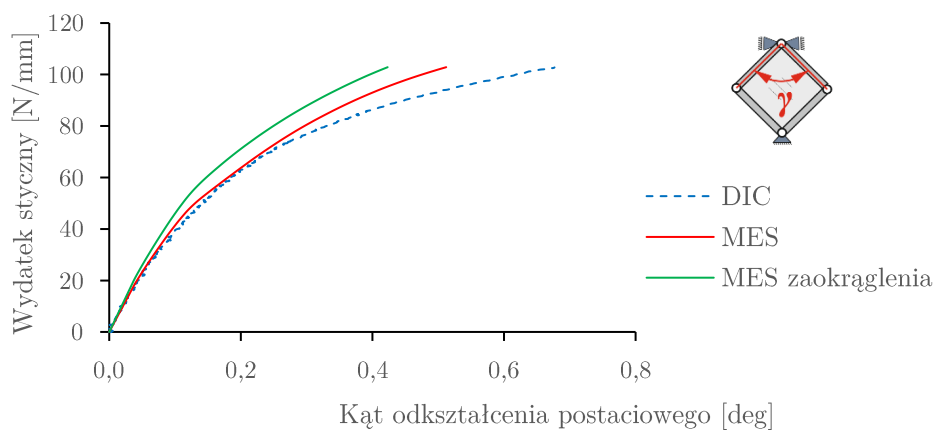
Przyjęty sposób modelowania struktury z wykorzystaniem elementów powłokowych nie umożliwiał odtworzenia rzeczywistej zmiany grubości w strefach obejmujących zaokrąglenia na kierunku normalnym do powierzchni płyty (patrz rys. 5.7c). Z uwagi na fakt, że zaokrąglenia występujące w rzeczywistej płycie mają wpływ zarówno na sztywność, jak i rozkład naprężenia, przygotowano model numeryczny, w którym wprowadzono obszar pośredni pomiędzy pokryciem a usztywnieniami. Strefa ta, której nadano grubość będącą średnim wymiarem pomiędzy grubością płyty a wysokością usztywnień (rys. 5.45), umożliwiała przybliżone symulowanie istnienia w tym obszarze zaokrąglenia [61].



Rys. 5.45. Model geometryczny wykorzystany w analizach numerycznych dotyczących wpływu modelowania promieni pomiędzy płytą a usztywnieniami:  
a) model podstawowy, b) model z symulowanymi promieniami

Przeprowadzone analizy numeryczne, podobnie jak w poprzednim przypadku, uwzględniające zarówno skończone, jak i plastyczne deformacje, umożliwiły porównanie wyników pomiędzy odmiennymi sposobami modelowania.

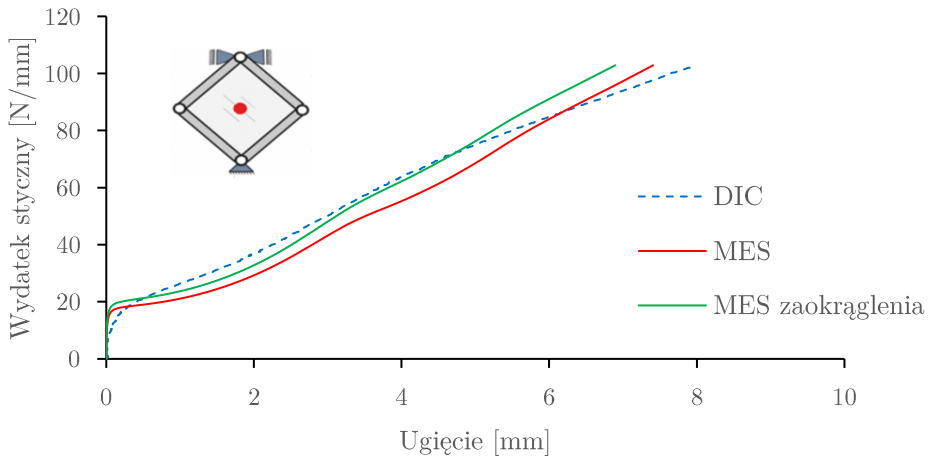
W przypadku ogólnej odpowiedzi struktury wyrażonej jako zależność kąta odkształcenia postaciowego od obciążenia płyty (rys. 5.46) model z symulowanymi zaokrągleniami wykazał większą sztywność niż wynik badań eksperymentalnych i cechował się mniejszą zbieżnością rozwiązania niż podstawowy model numeryczny.



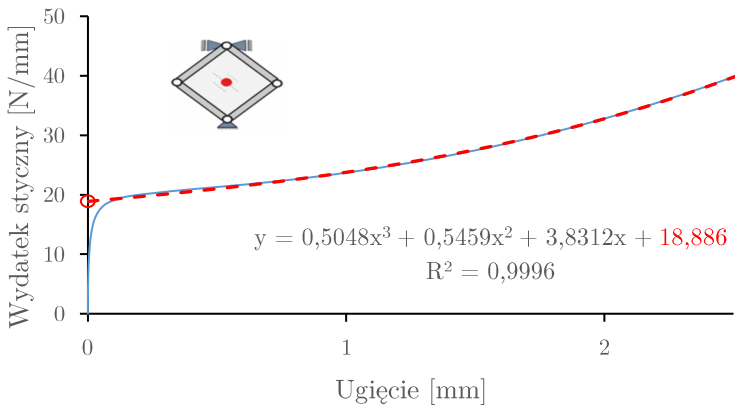
Rys. 5.46. Porównanie eksperymentalnych i numerycznych przebiegów obciążania wydatkiem stycznym w funkcji kąta deformacji postaciowej ustroju  $\gamma$

Ścieżkę równowagi dla punktu środkowego płyty w postaci relacji pomiędzy ugięciem a obciążeniem (rys. 5.47) przyjęto jako reprezentatywne zachowanie struktury w pełnym spektrum obciążenia. Model z przybliżonymi zaokrągleniami wykazał wzrost poziomu obciążenia krytycznego do wartości około 18,9 N/mm (rys. 5.48), co jest wielkością około 23% wyższą niż wynik uzyskany z analizy eksperymentalnej (tab. 5.3). Przebieg zmian ugięcia w trakcie obciążania struktury cechował się dobrą zbieżnością z wynikami eksperymentu do poziomu obciążenia około 80 N/mm. Powyżej tej wartości model numeryczny okazał się sztywniejszy niż rzeczywista struktura. Sytuacja taka była zapewne spowodowana odmiennym od rzeczywistego rozkładem naprężenia i koncentracjami w obszarach węzłów siatki usztywnień.

Rysunek 5.49 prezentuje porównanie rozkładów naprężenia zredukowanego wg hipotezy H-M-H dla modelu podstawowego i modelu z symulowanymi zaokrągleniami, przy maksymalnym poziomie obciążenia. Wprowadzenie do modelu stref o zróżnicowanej grubości spowodowało spadek stopnia wyętwienia struktury o około 2,5%, ale nie wpłynęło w sposób znaczący na rozkład i gradient jego wartości.

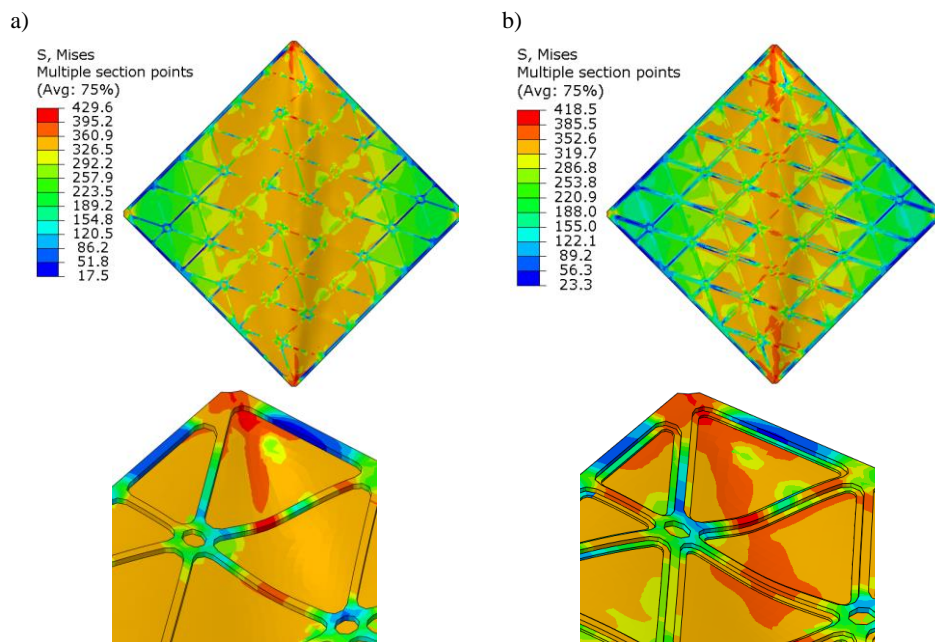


Rys. 5.47. Porównanie ścieżek równowagi dla punktu środkowego płyty, uzyskanych w badaniach doświadczalnych i analizach numerycznych



Rys. 5.48. Sposób wyznaczania przybliżonej wartości obciążenia krytycznego dla modelu MES, w którym symulowano zaokrąglenia, dla punktu w środku powierzchni płyty

Przeprowadzone analizy dowodzą, że sposób modelowania szczegółów geometrycznych struktury, takich jak zaokrąglenia wykazuje wpływ na otrzymywane rezultaty analiz numerycznych. Należy jednak zaznaczyć, że w globalnym ujęciu problemu różnice wynikające z uwzględnienia tych cech nie wpływają znacząco na wyniki analiz.



Rys. 5.49. Rozkład naprężenia zredukowanego wg H-M-H:  
a) model podstawowy, b) model z symulowanymi promieniami

### 5.2.9. Wpływ parametrów kontroli rozwiązania na otrzymywane rezultaty

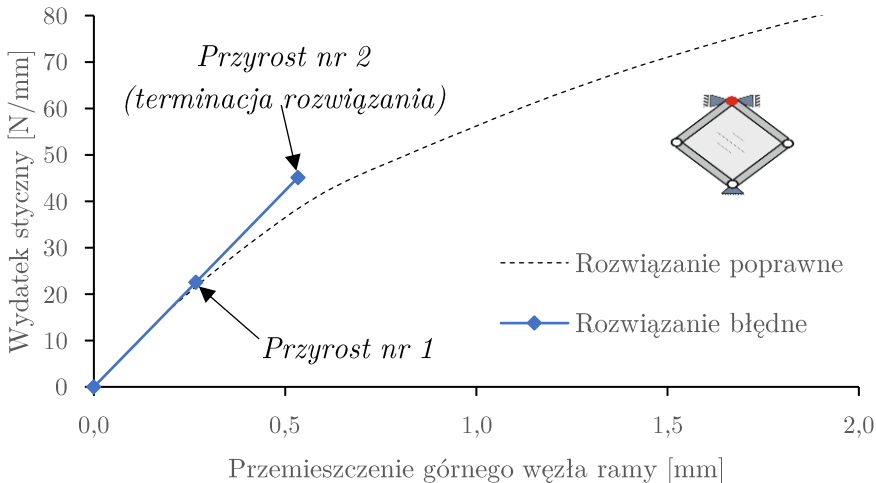
W poprzednich punktach rozdziału przedstawiono zasadniczo poprawne wyniki obliczeń MES, obejmujące analizy wpływu wielkości elementów oraz wstępnej imperfekcji na uzyskiwane rezultaty. W celu przedstawienia złożoności zagadnień poszukiwania rozwiązania problemów nieliniowych należy również wspomnieć o wpływie wybranej metody rozwiązania oraz wartości parametrów kontrynych na uzyskiwane rezultaty.

W przypadku korzystania z komercyjnego oprogramowania MES użytkownik ma zazwyczaj możliwość wyboru metody rozwiązania zagadnienia dużych deformacji oraz metody kontroli przyrostu. Sposób kontroli przyrostu ogranicza się jedynie do wyboru stałego kroku przyrostowego lub podania wartości minimalnej, maksymalnej i wstępnej przy automatycznym doborze parametrów dla każdego kroku. Podejście takie nie umożliwia pełnej kontroli nad sposobem poszukiwania zbieżności rozwiązania, która jest realizowana przez procedurę numeryczną zaimplementowaną w oprogramowaniu.

Należy zachować szczególną ostrożność w interpretacji tak otrzymanych rezultatów obliczeń numerycznych, ponieważ mogą one odbiegać znacząco od rzeczywistego zachowania się struktury.

Dalej zaprezentowano kilka przykładów ewidentnie błędnych rozwiązań dla płyty usztywnianej żebrami geodetycznymi. Przedstawione przykłady odnoszą się do modelu numerycznego, do którego nie wprowadzono wstępnej imperfekcji geometrycznej.

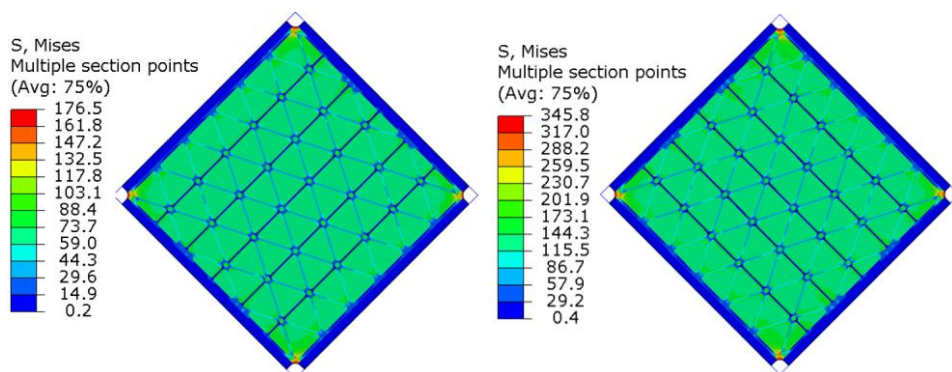
W przypadku stosowania metody Newtona-Raphsona błędny wybór wielkości kroku przyrostowego może prowadzić do nieprawidłowych wyników. Jeżeli krok przyrostowy jest zbyt duży, zbieżność rozwiązania nie zostanie osiągnięta i procedura numeryczna zatrzyma rozwiązanie. Sytuację taką zobrazowano na rys. 5.50, w postaci ścieżki równowagi w formie relacji pomiędzy przemieszczeniem górnego punktu mocowania ramy i działającego obciążenia. Celem porównania na rysunku przedstawiono również poprawną ścieżkę równowagi dla rozważanego punktu.



Rys. 5.50. Brak zbieżności rozwiązania będący konsekwencją przyjęcia zbyt dużego kroku przyrostowego

W przedstawionym przypadku zastosowano metodę kontroli przyrostu opartą na kontroli obciążenia. Krok przyrostowy wynosił 10 kN, co odpowiada przyrostowi wydatku stycznego działającego na brzegi płyty o około 25,5 N/mm. Przyjęte parametry kontrolne uniemożliwiły uzyskanie poprawnego rozwiązania i już po dwóch krokach przyrostowych procedura

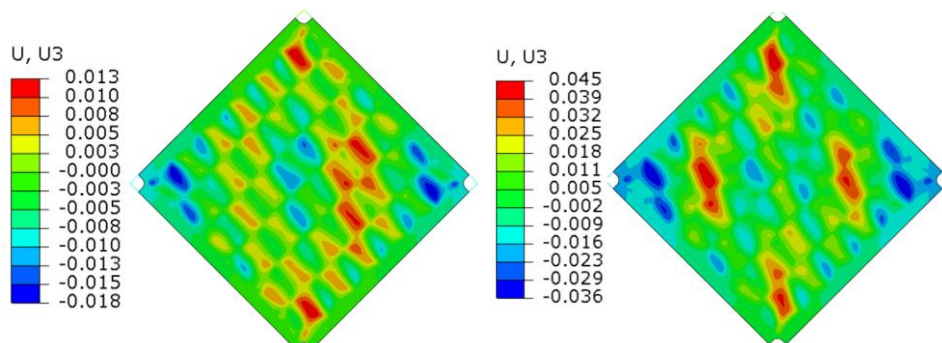
numeryczna została przerwana (rys. 5.50). Fakt ten był spowodowany zbyt dużym poziomem wyężenia w obszarach naroży płyty (rys. 5.51), bez wyraźnej zmiany postaci deformacji. Formujące się pole ugięcia (rys. 5.52) nie przyjęło poprawnej formy utraty stateczności mimo wzrostu wielkości wyężenia w kroku pierwszym do poziomu około 175 MPa. Stanowi to w przybliżeniu połowę naprężenia odpowiadającego granicy plastyczności materiału, z jakiego wykonana była płyta. Konsekwencją było osiągnięcie tej granicy w kolejnym kroku przyrostowym, bez wyraźnej zmiany formy deformacji i zatrzymanie procedury numerycznej z uwagi na zbyt duże przyrosty odkształcenia w trakcie kolejnych iteracji kroku przyrostowego.



Pierwszy krok przyrostowy ( $q = 22,5 \text{ N/mm}$ )

Drugi krok przyrostowy ( $q = 45,1 \text{ N/mm}$ )

Rys. 5.51. Rozkład wyężenia w kolejnych etapach rozwiązania prowadzonego z przyjęciem zbyt dużego kroku przyrostowego



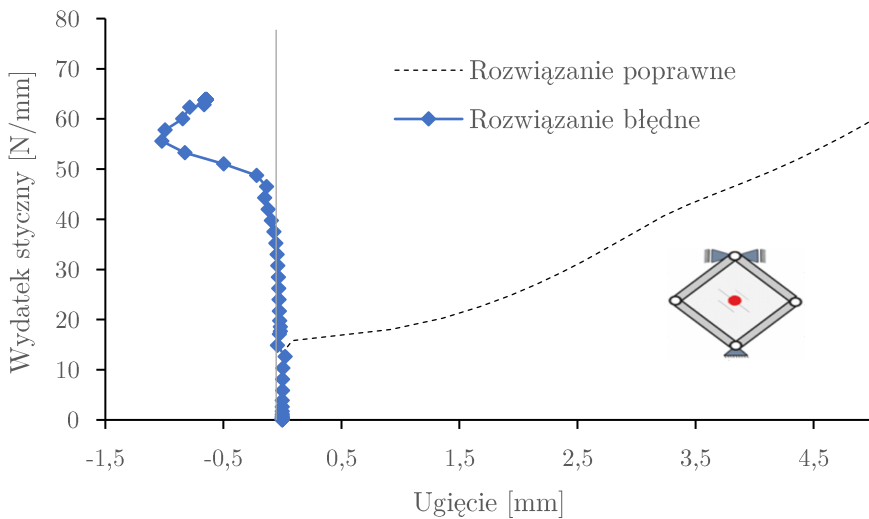
Pierwszy krok przyrostowy ( $q = 22,5 \text{ N/mm}$ )

Drugi krok przyrostowy ( $q = 45,1 \text{ N/mm}$ )

Rys. 5.52. Pole ugięcia powierzchni płyty w kolejnych etapach rozwiązania prowadzonego z przyjęciem zbyt dużego kroku przyrostowego

Błędne rozwiązanie można również otrzymać, jeżeli wybrany krok przyrostowy będzie zbyt mały. W efekcie, realizacja procedury numerycznej prowadzi do wyboru nieprzewidywanej postaci deformacji struktury.

Przykładem tego rodzaju błędnego rozwiązania jest ścieżka równowagi przedstawiona na rys. 5.53, kreślona jako zależność ugięcia w punkcie leżącym w przecięciu przekątnych płyty oraz wzrastającej wartości obciążenia. Jako metodę kontroli poprawności rozwiązania, tak jak w poprzednim przykładzie, wybrano kontrolę obciążenia. Wielkość kroku przyrostowego wynosiła 100 N, co odpowiada przyrostowi wydatku stycznego działającego na brzegi płyty o około 0,0255 N/mm.

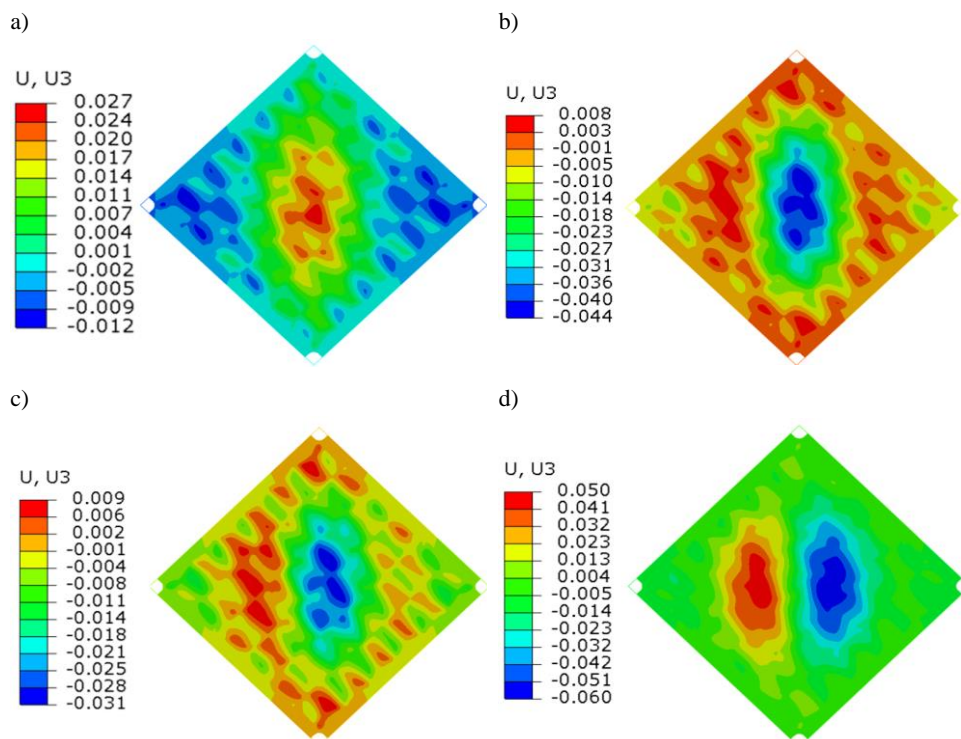


Rys. 5.53. Wybór błędnej postaci deformacji będący konsekwencją przyjęcia zbyt małego kroku przyrostowego. Punkty na wykresie oznaczają rozwiązania w kolejnych krokach przyrostowych

Początkowe pole ugięcia kształtowało się w prawidłowy sposób i przy obciążeniu 14,8 N/mm zaczęła się formować główna półfała wybočenja (rys. 5.54a). Następny krok przyrostowy doprowadził do zmiany kierunku ugięcia (rys. 5.54b), a kolejne spowodowały powstanie błędnej deformacji, w postaci dwóch półfal wybočenja względem głównej przekątnej pionowej płyty (rys. 5.54c i 5.54d). W efekcie procedura kontroli rozwiązania wybrała niepoprawną formę deformacji i przedwcześnie zakończyła analizę.



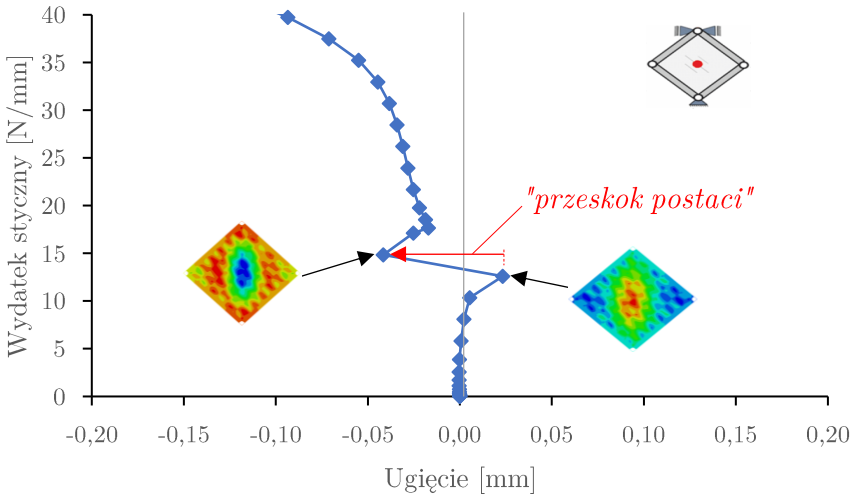
Rozwiązanie awansowano zatem w niewłaściwy sposób przez błąd, który jest określany jako „ping-pong” i polega na skokowej zmianie wartości i kierunku deformacji przy niewielkim wzroście obciążenia (rys. 5.54a i 5.54b). Na rysunku 5.55 przedstawiono zbliżenie na ścieżkę równowagi z rys. 5.52 obrazujące wspomniany efekt.



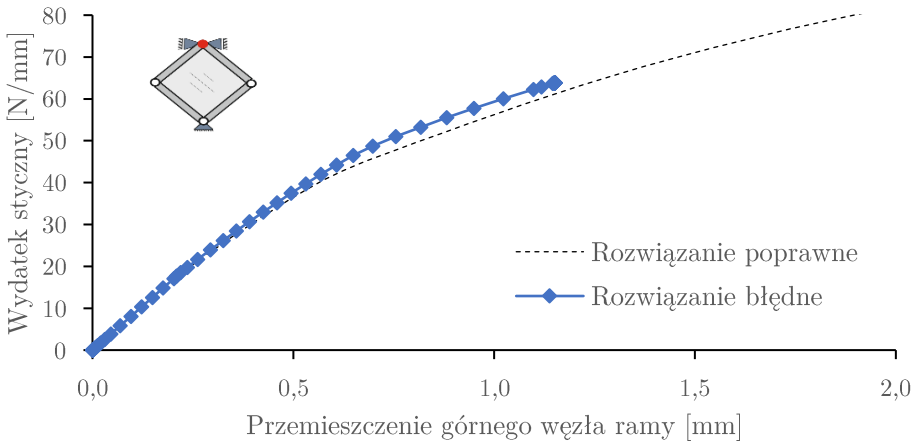
Rys. 5.54. Pole ugięcia powierzchni płyty w kolejnych etapach rozwiązania prowadzonego z przyjęciem zbyt małego kroku przyrostowego. Obciążenie:  $q = 14,8$  N/mm (a),  $q = 17,1$  N/mm (b),  $q = 17,7$  N/mm (c),  $q = 18,5$  N/mm (d)

Na tle przedstawionego przykładu alarmujący jest również fakt, że kontrola tylko jednego parametru, jakim jest np. przemieszczenie górnego węzła ramy (co jest wynikiem bezpośrednio związanym z badaniami doświadczalnymi z wykorzystaniem maszyny wytrzymałościowej), może prowadzić do błędnych wniosków, ponieważ nie zaobserwowano znaczącej zmiany w szywności płyty w jej płaszczyźnie (rys. 5.56). Oznacza to, że mimo ewidentnie błędnego rozwiązania w postaci niepoprawnego rozkładu ugięcia

przeskoczenie górnego węzła koresponduje z globalną odpowiedzią układu dla rozwiązania poprawnego.



Rys. 5.55. Przeskok w postaci utraty stateczności związany z przyjęciem zbyt małego kroku przyrostowego. Punkty na wykresie oznaczają rozwiązania w kolejnych krokach przyrostowych

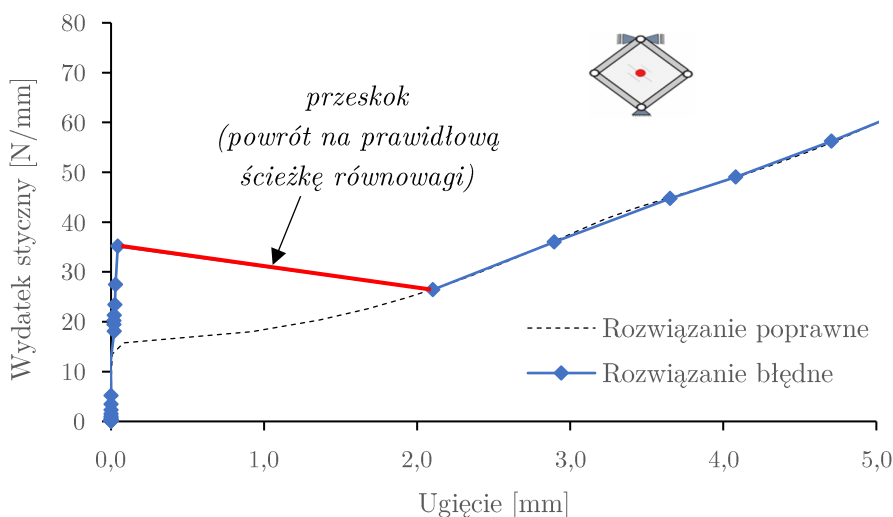


Rys. 5.56. Przeskoczenie górnego punktu ramy w funkcji obciążenia. Wynik analiz numerycznych będący konsekwencją przyjęcia zbyt małego kroku przyrostowego. Punkty na wykresie oznaczają rozwiązania w kolejnych krokach przyrostowych

Problem braku możliwości uzyskania poprawnego rozwiązania w opisanym przypadku wynika również z faktu, że nie wszystkie procedury kontroli rozwiązania wykorzystywane w metodzie Newtona-Raphsona umożliwiają powrót na prawidłową ścieżkę równowagi. Jedną z metod kontroli, która rozwiązuje tę niedogodność, jest kontrola długości łuku, gdzie poprawność przyrostu i iteracji weryfikuje się przez dodatkowy warunek równowagi, zwany warunkiem Riksa-Wempnera, opisany w pkt 3.2.

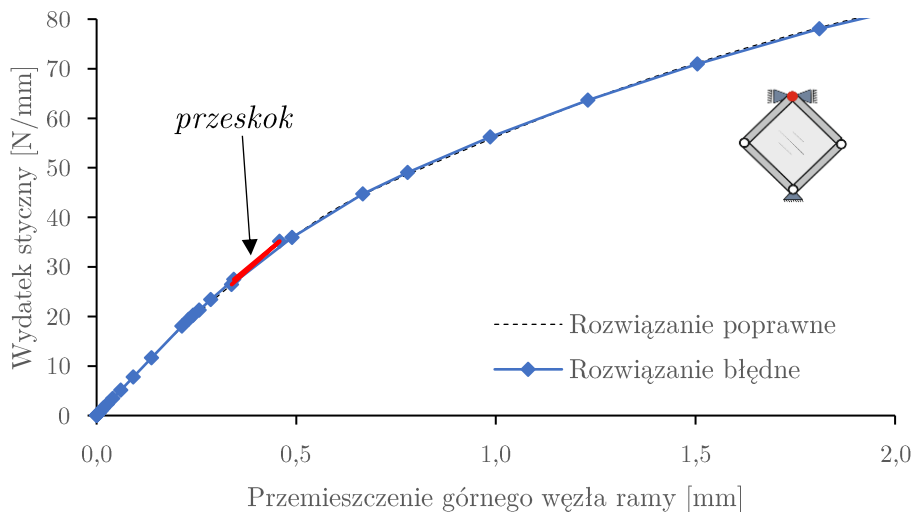
W przypadku stosowania kontroli długości łuku użytkownik programu komputerowego wybiera zazwyczaj jedynie wstępną oraz całkowitą długość łuku, które są wykorzystywane w pierwszym kroku analizy. Wartości te nie odnoszą się bezpośrednio ani do kontroli przyrostu obciążenia, ani do parametru stanu. W kolejnych krokach awansowania rozwiązania procedura działa w sposób automatyczny i nie ma możliwości wpływu na sposób doboru parametrów kontrolnych. Zarówno obciążenie, jak i deformacja dla każdego kolejnego kroku analizy jest wynikiem obliczeń, a nie parametrem kontrolnym.

Dalej przedstawiono analizę płyty usztywnianej przeprowadzoną z wykorzystaniem wspomnianej wcześniej metody. Na rysunku 5.57 przedstawiono ścieżkę równowagi w formie realacji pomiędzy ugięciem w środkowym



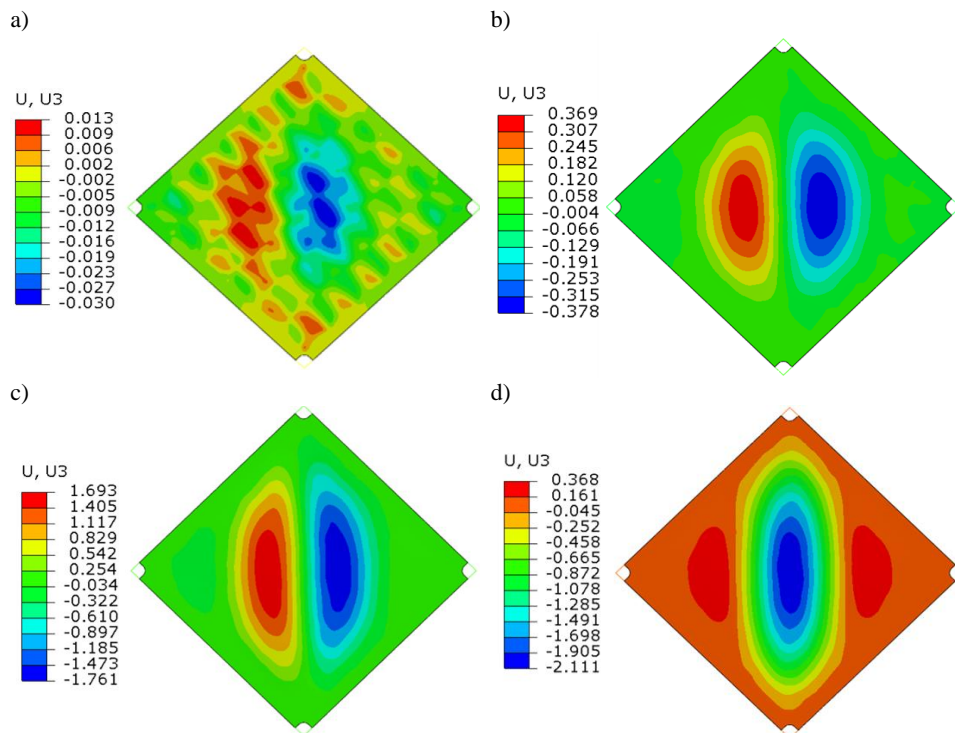
Rys. 5.57. Powrót na prawidłową ścieżkę równowagi w przypadku stosowania metody kontroli długości łuku

punkcie powierzchni płyty a działającym obciążeniem. Należy zwrócić uwagę na znaczne zawyżenie obciążenia krytycznego w takim przypadku, po którym następuje przeskok na poprawną ścieżkę równowagi. Również tutaj globalna odpowiedź struktury w postaci relacji pomiędzy przemieszczeniem górnego węzła ramy obciążającej a obciążeniem może prowadzić do mylnego stwierdzenia o poprawności rozwiązania (rys. 5.58).



Rys. 5.58. Przeskoczenie górnego punktu ramy w funkcji obciążenia.  
Analiza z wykorzystaniem metody kontroli długości łuku

Na rysunku 5.59 przedstawiono zmianę pola ugięcia w kilku kluczowych stanach obciążenia dla opisanego przypadku analizy z wykorzystaniem kontroli długości łuku. Rysunek 5.59a dotyczy etapu formowania się postaci utraty stateczności, która następnie rozwija się w formie dwóch półfal, symetrycznie względem przekątnej płyty. Deformacja taka pogłębiała się, aż do osiągnięcia poziomu obciążenia około 36 N/mm, co stanowi niemal dwukrotność obciążenia krytycznego w przypadku rozwiązania poprawnego. W kolejnym kroku przyrostowym następuje przeskoczenie na ścieżce równowagi (rys. 5.57) i ugięcie przyjmuje zarówno poprawną postać, jak i wartości w dalszych krokach analizy.

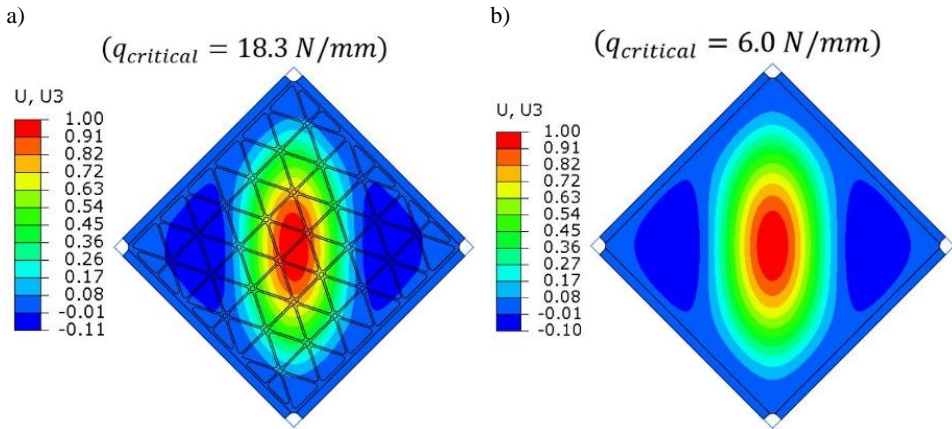


Rys. 5.59. Pole ugięcia powierzchni płyty w kolejnych etapach rozwiązania prowadzonego z wykorzystaniem kontroli długości łuku. Obciążenie:  $q = 18,1$  N/mm (a),  $q = 19,4$  N/mm (b),  $q = 35,9$  N/mm (c),  $q = 26,4$  N/mm (d)

### 5.2.10. Porównanie wyników MES dla płyty gładkiej i żebrowanej

Przeprowadzone analizy numeryczne umożliwiły porównanie deformacji i stanu naprężenia płyty usztywnianej i płyty gładkiej o grubości 0,75 mm. Płyta gładka o takiej grubości cechuje się tą samą masą co płyta usztywniana.

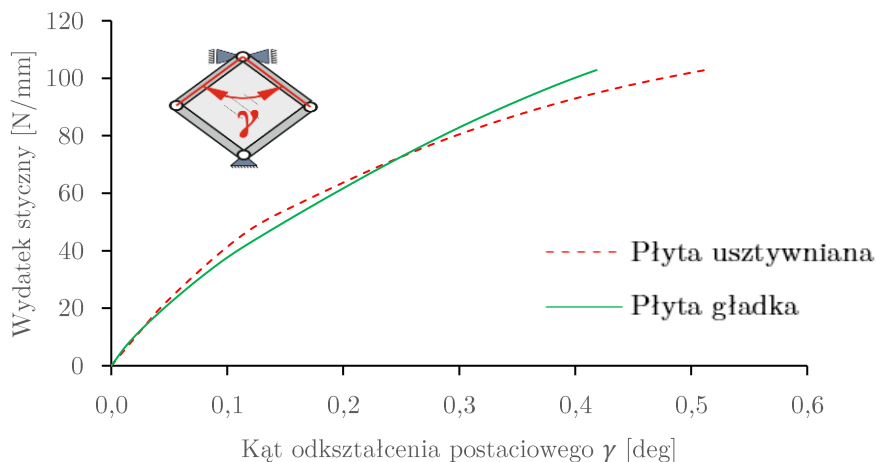
Numerycznie określone obciążenie krytyczne dla płyty usztywnianej integralnie było około trzykrotnie wyższe w porównaniu z obciążeniem dla płyty gładkiej. Wartość obciążenia krytycznego płyty usztywnianej odpowiada obciążeniu dla płyty o grubości 2 mm. Taka struktura miałaby jednak masę wyższą o 167%. Pierwsza postać wyboczenia uzyskana przez analizy zlinearyzowane pod względem jakościowym była taka sama dla obydwu płyt (rys. 5.60).



Rys. 5.60. Znormalizowane pola ugięcia dla pierwszych postaci wyboczenia: a) płyta usztywniona, b) płyta gładka, będące wynikiem MES dla zlinearyzowanych analiz stateczności. Wartości podane w nawiasach oznaczają krytyczne wartości wydatku tnącego odpowiadające pierwszej postaci wyboczenia

Podobnie jak w przypadku struktury usztywnianej, dla płyty gładkiej wprowadzono geometryczne imperfekcje wstępne do pliku wejściowego MES. Kształt wstępnej imperfekcji był zgodny z pierwszą postacią wyboczenia z maksymalnym ugięciem równym 0,05 mm, co odpowiadało 6,67% grubości płyty. Z uwagi na geometrię płyty gładkiej, gdzie wszystkie elementy i ich środki ciężkości leżą w jednej płaszczyźnie, wstępna deformacja tego rodzaju jest niezbędna do analizy utraty stateczności w przypadku analiz nieliniowych geometrycznie. Jest to różnica w stosunku do płyty usztywnianej, gdzie obecność imperfekcji ma wpływ na deformację struktury, ale nie jest niezbędna do utraty stateczności w analizie numerycznej.

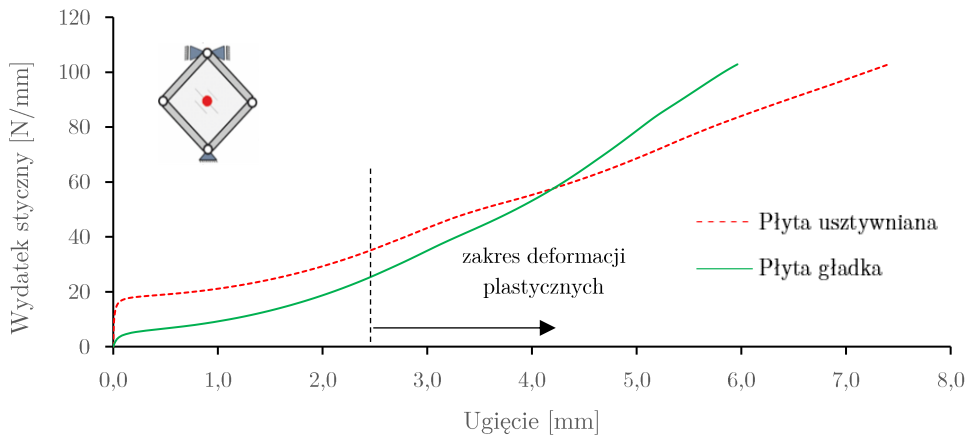
Na rysunku 5.61 porównano zależności kąta ścinania do wzrastającego obciążenia dla obydwu płyt. Do poziomu obciążenia około 70 N/mm ścieżki równowagi były bardzo podobne zarówno pod względem ilościowym, jak i jakościowym. Oznacza to, że w przypadku sztywności w płaszczyźnie wprowadzenie integralnego usztywnienia w rozpatrywanej konfiguracji nie wykazuje znaczącego podwyższenia właściwości.



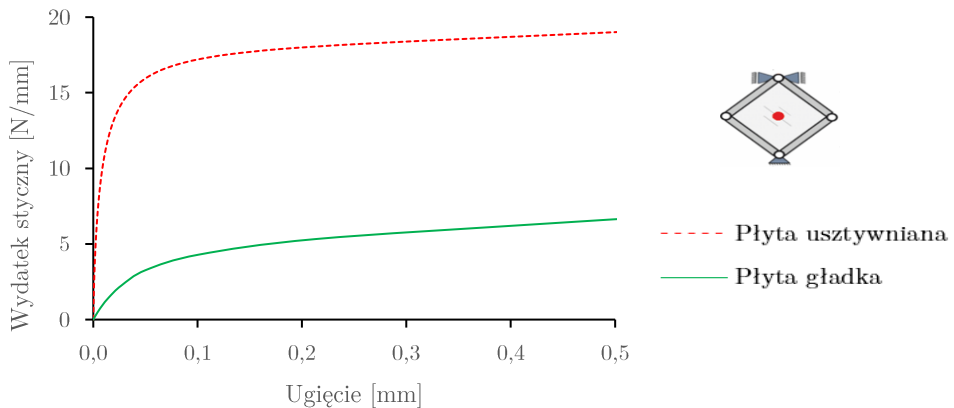
Rys. 5.61. Porównanie numerycznie otrzymanych przebiegów obciążania wydatkiem stycznym w funkcji kąta deformacji postaciowej ustroju  $\gamma$  dla płyty gładkiej i usztywnianej

Porównanie ścieżek równowagi wyrażonych przez relację ugięcia punktu w środku geometrycznym płyty do działającego obciążenia daje szansę na głębsze poznanie charakteru deformacji analizowanych struktur (rys. 5.62). Podobnie jak w przypadku obliczeń z wykorzystaniem procedur zlinearyzowanego badania stateczności, zakres deformacji liniowych jest znacznie dłuższy dla płyty usztywnianej. Brak wyraźnego przejścia pomiędzy zakresem przed i po utracie stateczności był spowodowany wprowadzoną do modelu numerycznego wstępną imperfekcją geometryczną.

Analiza wykresów przedstawionych na rys. 5.62 i 5.63 umożliwia również porównanie sztywności w kierunku normalnym do powierzchni płyty dla rozważanych struktur. Przy obciążeniu do poziomu około 55 N/mm ugięcie płyty usztywnianej było zdecydowanie niższe niż płyty gładkiej o równej masie. Nieliniowe analizy, podobnie jak obliczenia zlinearyzowane, wykazały znaczący wpływ wprowadzenia usztywnień na poziom obciążenia krytycznego. Gładkie przejścia, zamiast nagłej zmiany stanu, były spowodowane wprowadzeniem imperfekcji geometrycznych. Pomimo tego, krytyczne wartości obciążenia były bliskie wynikom uproszczonych analiz wyboczenia (rys. 5.60).



Rys. 5.62. Porównanie ścieżek równowagi dla punktu środkowego płyty uzyskanych przez analizy numeryczne dla płyty gładkiej usztywnianej



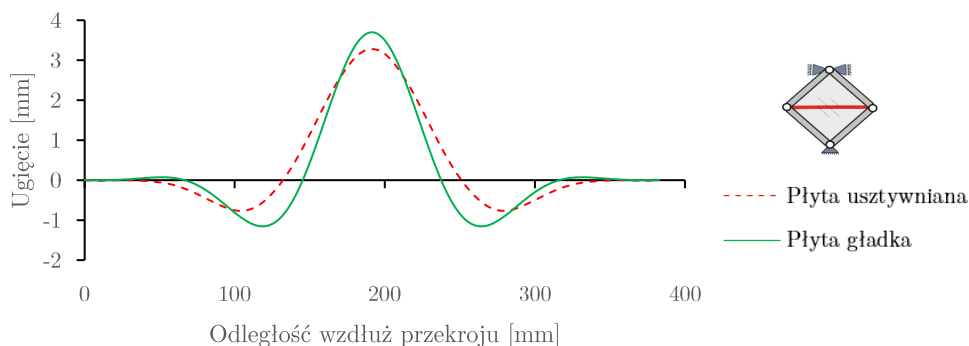
Rys. 5.63. Porównanie ścieżek równowagi dla punktu środkowego płyty uzyskanych przez analizy numeryczne dla płyty gładkiej usztywnianej.  
Zbliżenie na zakres utraty stateczności

Analizy MES umożliwiły również określenie granicznych wartości sił, powodujących pojawienie się odkształceń plastycznych w rozpatrywanych strukturach. Pierwsze trwałe deformacje wystąpiły przy niemal identycznym poziomie ugięcia obydwu struktur: około 2,58 mm dla płyty usztywnianej oraz około 2,61 mm dla płyty gładkiej. Jednak poziomy obciążenia związane z wystąpieniem odkształceń plastycznych wynosiły dla tych struktur odpowiednio 37 i 28 N/mm. Wskazane różnice świadczą o pozytywnym



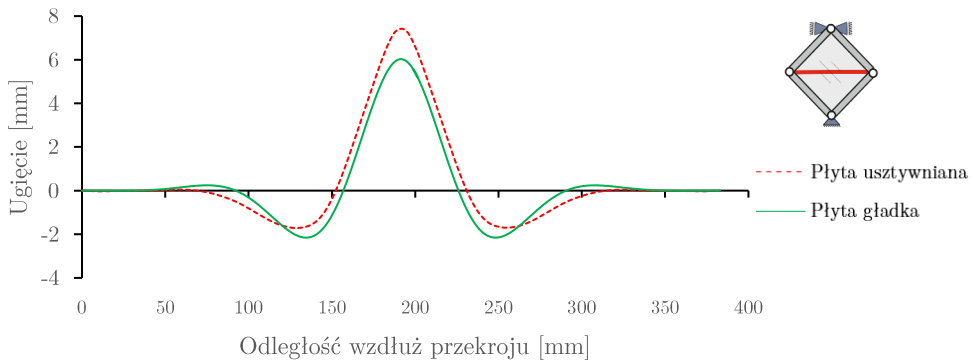
wpływie integralnych usztywnień w postaci możliwości podniesienia obciążeń dopuszczalnych struktury o około 31% bez wzrostu masy. Pionowa linia przerywana na rys. 5.62 prezentuje numerycznie określony początek odkształceń plastycznych. Analizy deformacji i stanu naprężenia w tym zakresie mogą być obarczone błędami wynikającymi z uproszczeń modelu materiału i geometrii wykorzystanych w ujęciu MES dla rozważanego problemu.

Na rysunkach 5.64 i 5.65 porównano ugięcia przekroju płyty poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej dla obydwu rozważanych struktur, dla poziomów obciążenia 37 i 103 N/mm. Przy pierwszym z tych poziomów obciążenia płyta żebrowana wykazała pierwsze odkształcenia plastyczne, przy drugim z nich wystąpiło maksymalne ugięcie. Pola ugięcia oraz pola wyteżenia wg hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H) dla obydwu płyt zaprezentowano na rys. 5.56-5.58. Należy również wspomnieć, że wprowadzenie usztywnienia spowodowało zmniejszenie ugięcia o około 20%, z jednoczesnym obniżeniem poziomu wyteżenia o 9,6% dla obciążenia odpowiadającego pierwszym deformacjom trwałym struktury.



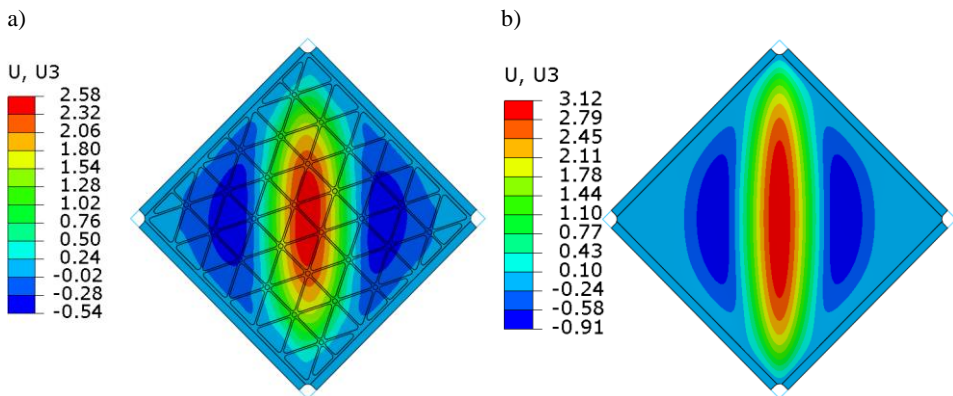
Rys. 5.64. Porównanie ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty poddanej działaniu obciążenia ( $q = 37 \text{ N/mm}$ ) powodującego zaistnienie odkształceń plastycznych

Podobnie jak w przypadku analiz zlinearyzowanych obydwie płyty utraciły stateczność w formie jednej dominującej półfali w środku geometrycznym powierzchni płyty i dwóch mniejszych półfal w okolicach naroży (rys. 5.69). Wartość ugięcia wzrastała wraz z obciążeniem, ale taka postać deformacji utrzymała się do końca analizy.

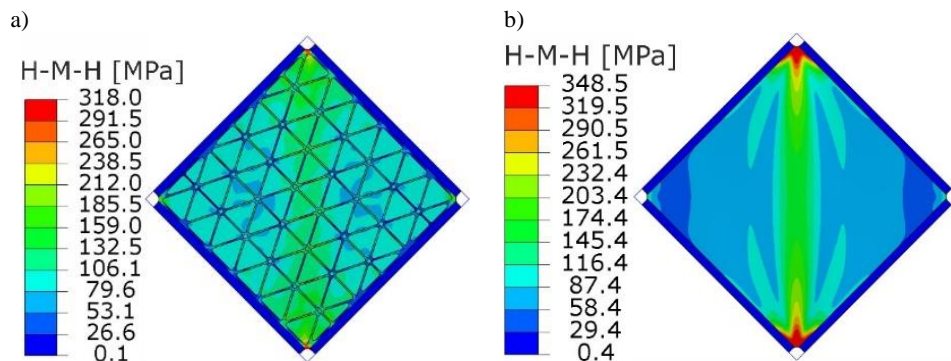


Rys. 5.65. Porównanie ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty poddanej działaniu maksymalnego obciążenia ( $q = 102 \text{ N/mm}$ )

Zgodnie z rys. 5.66 i 5.68 ugięcie płyty trójkątnie usztywnianej było mniejsze od ugięcia płyty gładkiej tylko w zakresie odkształceń sprężystych. Powodem mogą być wysokie koncentracje naprężenia pojawiające się w okolicach naroży płyty usztywnianej (rys. 5.67 i 5.69). Wzrost gradientu naprężenia w tych obszarach może być spowodowany sposobem dyskretyzacji modelu MES albo błędami geometrycznymi, które należy traktować jako błędy konstrukcyjne takiej struktury.

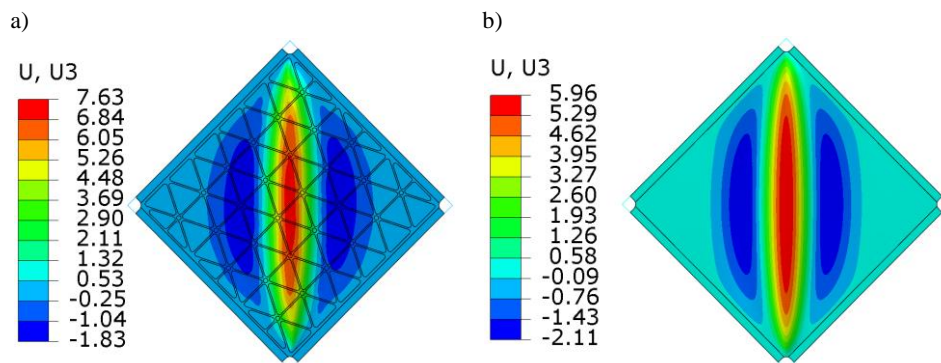


Rys. 5.66. Porównanie pola ugięcia przy poziomie obciążenia powodującym deformacje plastyczne ( $q = 37 \text{ N/mm}$ ): a) płyta usztywniana, b) płyta gładka (wartości w [mm])



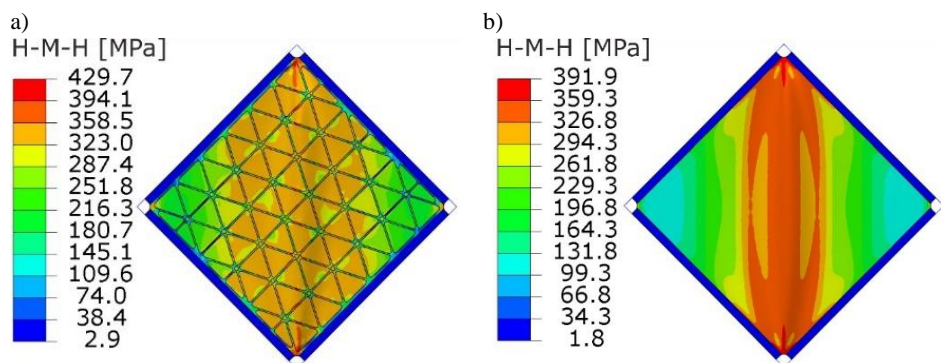
Rys. 5.67. Porównanie rozkładu wyężenia wg H-M-H przy poziomie obciążenia powodującym deformacje plastyczne ( $q = 37 \text{ N/mm}$ ):

a) płyta usztywniana, b) płyta gładka



Rys. 5.68. Porównanie pola ugięcia przy maksymalnym poziomie obciążenia:

a) płyta usztywniana, b) płyta gładka (wartości w [mm])

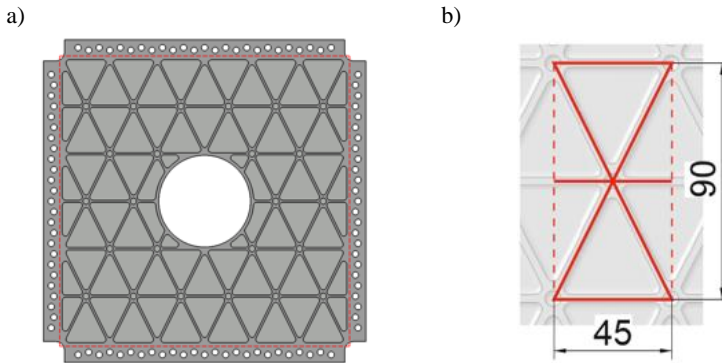


Rys. 5.69. Porównanie rozkładu wyężenia wg H-M-H przy maksymalnym poziomie obciążenia: a) płyta usztywniana, b) płyta gładka

### 5.2.11. Wpływ wykroju w płycie usztywnianej

Wszelkie nieciągłości ustroju nośnego obecne z racji złożoności geometrycznej, wprowadzanej wskutek konieczności zachowania niezbędnych funkcji użytkowych konstrukcji, stanowią koncentratory naprężenia i wpływają na przedwczesne pojawianie się lokalnych uszkodzeń [60, 68, 130]. Korbami są zarówno raptowne zmiany wymiarów, jak również wykroje, istniejące z racji spełniania funkcji użytkowych (np. wzierniki zapewniające dostępność do stref podlegających przeglądowi).

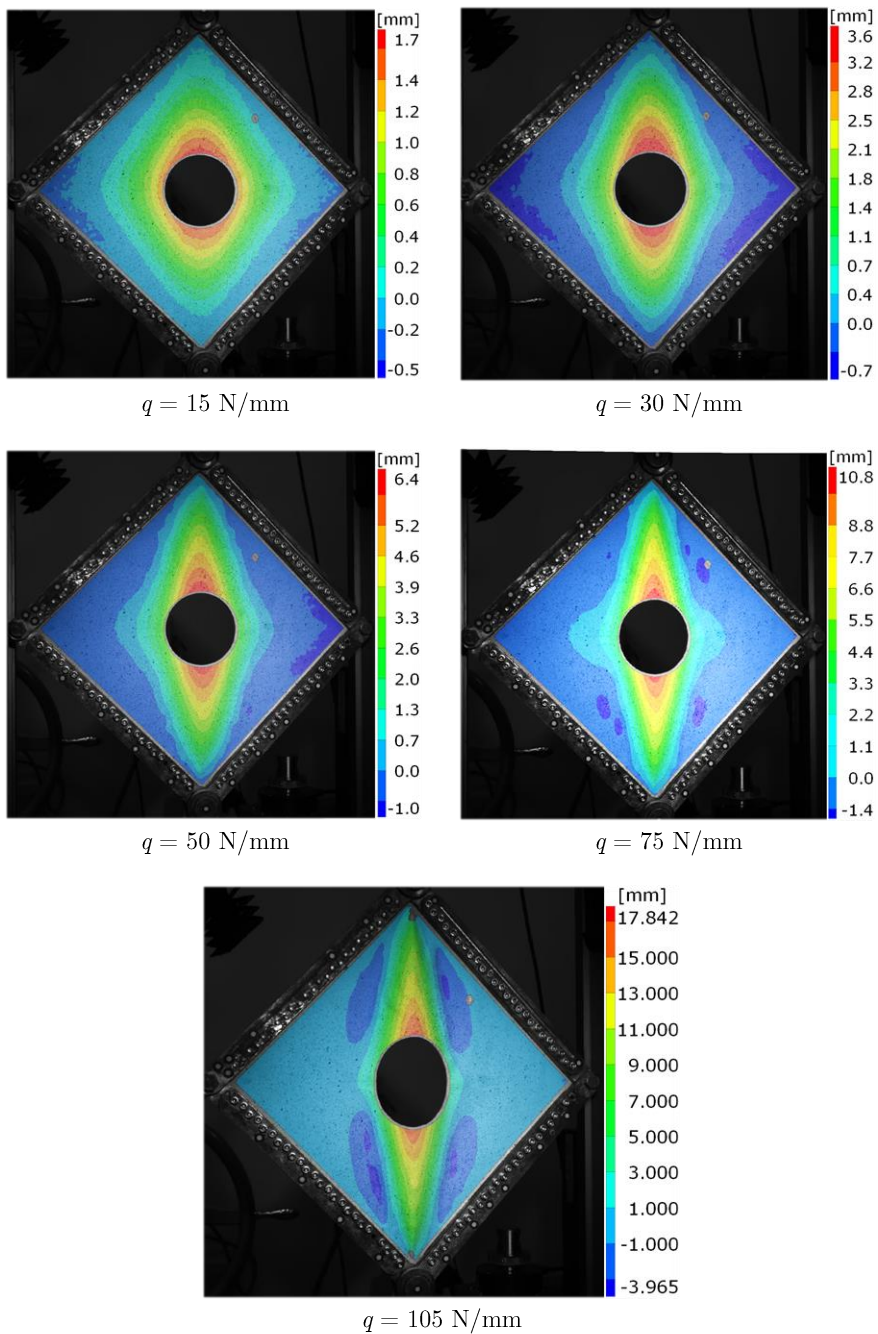
Zasadniczy cel badań stanowiło określenie wpływu wykroju na postać deformacji pokrywyczej oraz zidentyfikowanie zmian w wielkości i rozkładzie naprężenia. W tym celu przeprowadzono badania doświadczalne oraz analizy numeryczne struktury o geometrii odpowiadającej płycie rozważanej w pkt 5.2, osłabionej otworem o średnicy 87 mm, co stanowiło 8% powierzchni płyty. Obwód wykroju wzmocniono obrzeżem o szerokości 3 mm i wysokości równej żebrowaniu (rys. 5.70).



Rys. 5.70. Geometria płyty osłabionej wykrojem: a) widok ogólny, b) wymiary gabarytowe siatki

Podobnie jak w przypadku przedstawionych wcześniej analiz, płytę przeznaczoną do badań wykonano za pomocą obrabiarki sterowanej numerycznie, z półfabrykatu w postaci płyty o grubości 2 mm. Płytę zamocowano w identycznej ramie obciążającej jak w przypadku płyty pozbawionej wykroju i poddano procedurze badawczej opisanej w pkt 5.1.

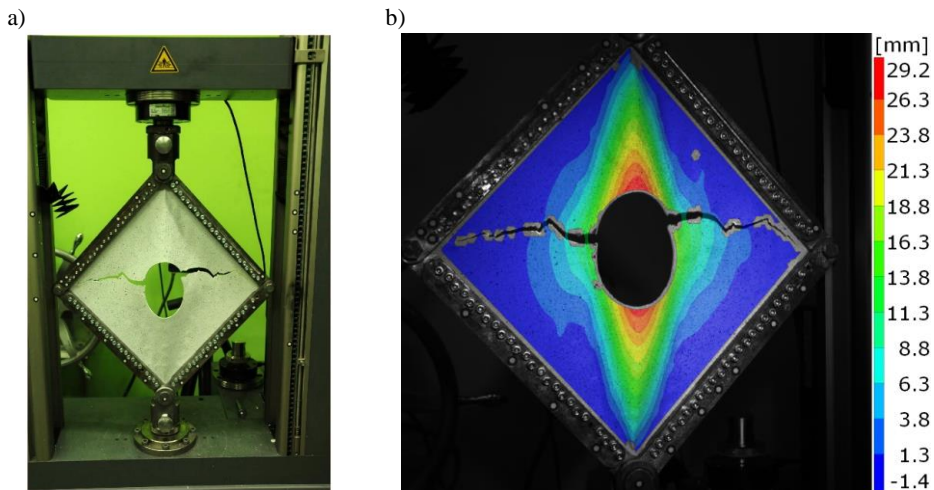
Na rysunku 5.71 przedstawiono kolejne fazy deformacji płyty objawiające się jako ugięcie w środkowej części powierzchni zawierającej kołowy



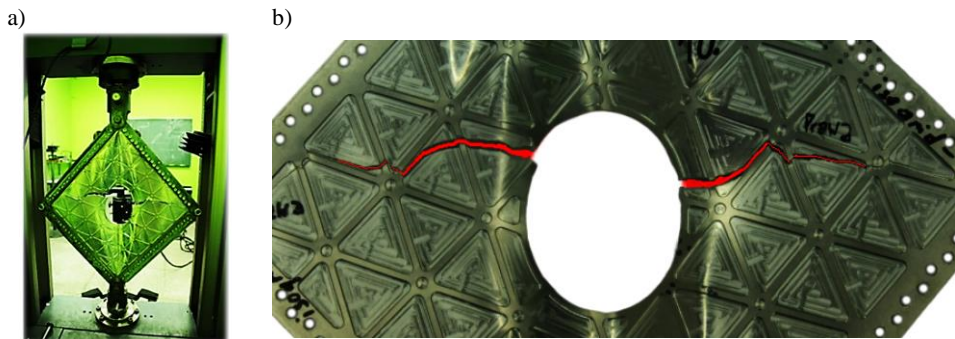
Rys. 5.71. Ugięcie płyty zębowanej z wykresem dla kolejnych faz deformacji (wynik DIC)

wykrój. Wraz ze wzrostem obciążenia ugięcie obejmowało coraz większy obszar wokół pionowej przekątnej płyty, a deformacja przyjęła postać jednej półfali. W ostatniej fazie przed zniszczeniem pojawiły się jeszcze cztery mniejsze półfale rozmieszczone symetrycznie względem głównych przekątnych.

Zniszczenie płyty nastąpiło przy obciążeniu równym 105,4 N/mm. Miało formę dwóch pęknięć wzdłuż kierunku prostopadłego do działającego obciążenia (rys. 5.72 i 5.73). Zniszczenie objęło pokrycie, usztywnienia oraz obrzeże wzmacniające.

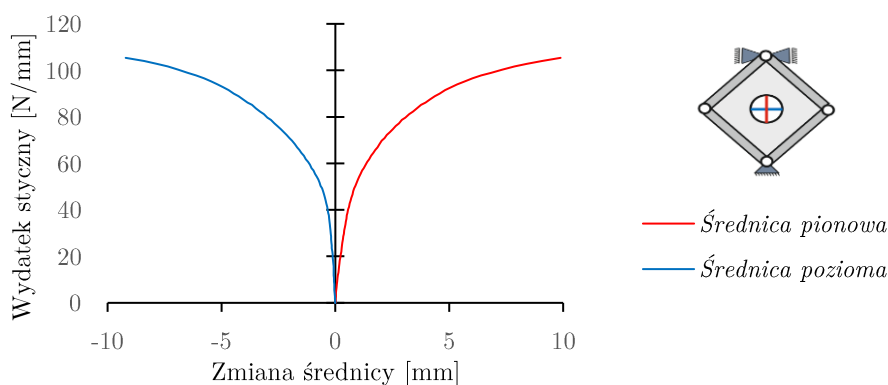


Rys. 5.72. Forma zniszczenia płyty: a) postać deformacji, b) rozkład ugięcia powierzchni, wynik eksperymentalny DIC



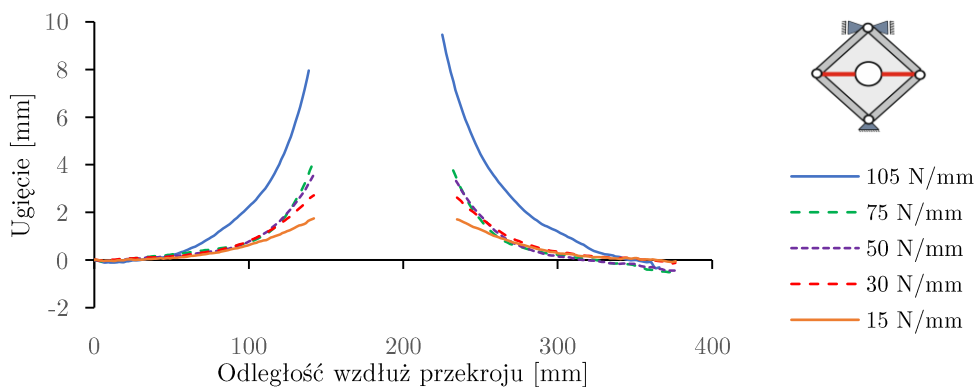
Rys. 5.73. Zbliżenie na obszar pęknięcia w płycie osłabionej wykrójem

Rysunek 5.74 dokumentuje zmianę kształtu wykroju wraz ze wzrostem obciążenia, przez relację zmian długości średnicy otworu w funkcji wydatku siły. W miarę wzrostu obciążenia wykrój przyjmował kształt elipsy. W momencie poprzedzającym zniszczenie średnica na kierunku pionowym zwiększyła wymiar o 9,89 mm, a średnica pozioma zmniejszyła się o 9,20 mm. Należy również zaznaczyć, że pole wykroju pomimo zmiany kształtu nie uległo znaczącej zmianie.

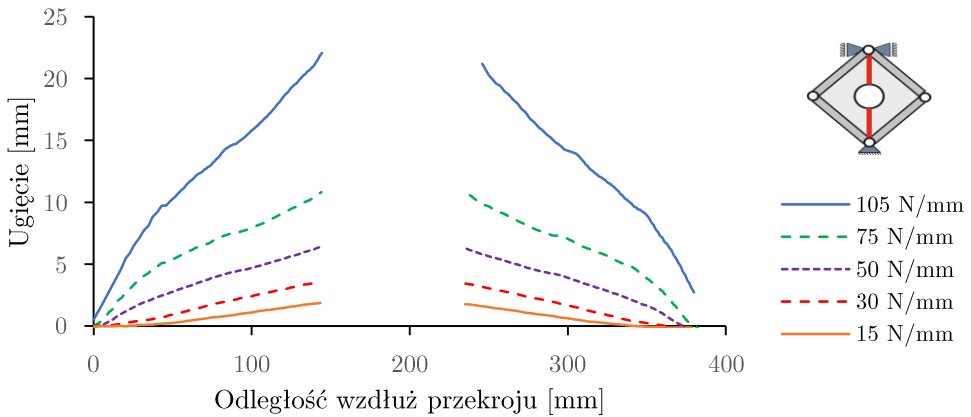


Rys. 5.74. Zmiana długości średnicy otworu na skutek deformacji w płycie usztywnianej osłabionej wykrojem

Rysunki 5.75 i 5.76 przedstawiają zmianę ugięcia punktów przekroju wzdłuż przekątnej poziomej i pionowej. Dodatkowo na rys. 5.77 przedstawiono ugięcie wzdłuż przekroju poprowadzonego w strefie występowania trzech półfal wyboczenia.

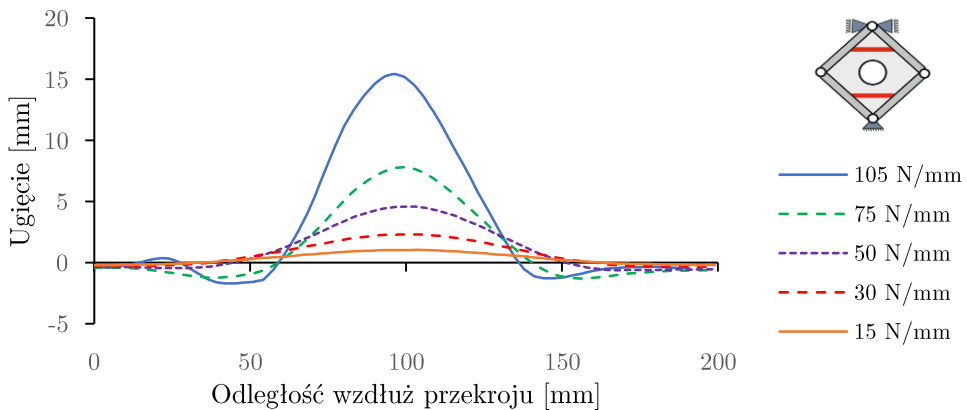


Rys. 5.75. Zmiana ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty usztywnianej, osłabionej wykrojem



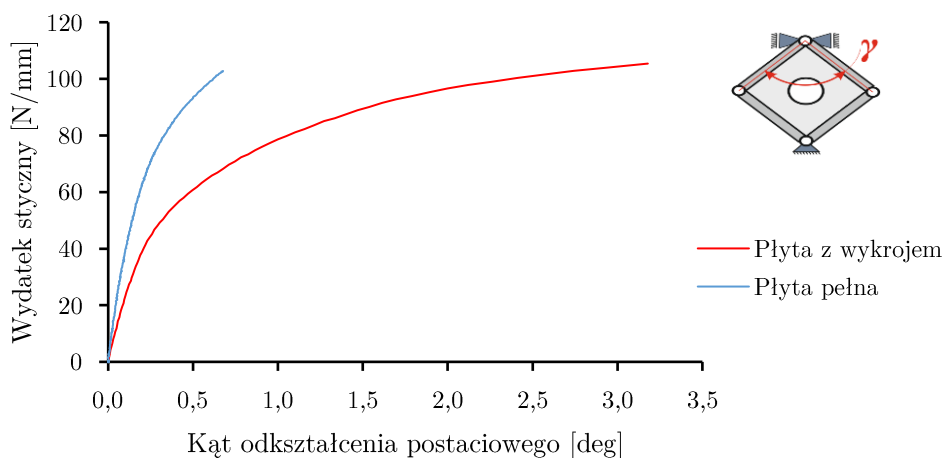
Rys. 5.76. Zmiana ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż pionowej przekątnej płyty usztywnianej, osłabionej wykrejem

Porównanie eksperymentalnie zmierzonych zmian kąta odkształcenia postaciowego dla płyty pełnej i płyty z wykrejem zaprezentowano na rys. 5.78. Płyta z wykrejem okazała się mniej sztywna w całym zakresie działającego obciążenia. Maksymalny kąt odkształcenia wyniósł  $0,60^\circ$  w przypadku płyty pełnej i  $3,17^\circ$  w przypadku płyty z wykrejem, co oznacza ponadpięciokrotny spadek sztywności w płaszczyźnie struktury.



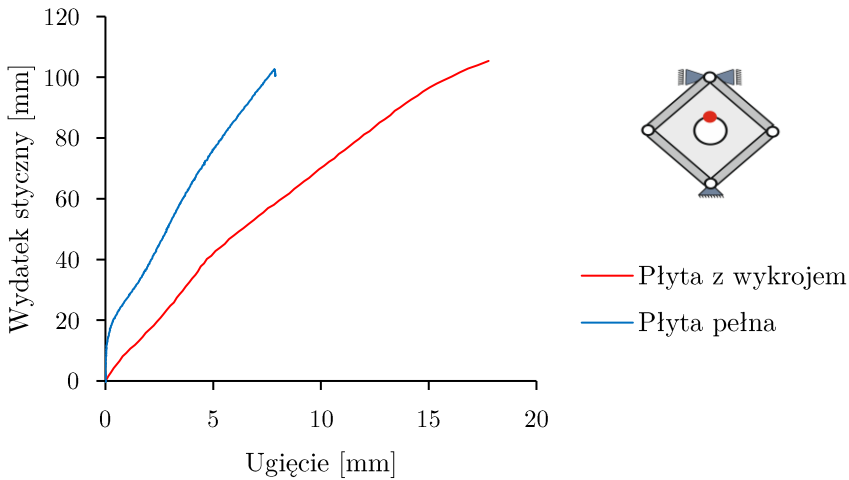
Rys. 5.77. Zmiana ugięcia przekroju poprowadzonego wzdłuż przekątnej zawierającej trzy półfale deformacji dla płyty usztywnianej i osłabionej wykrejem



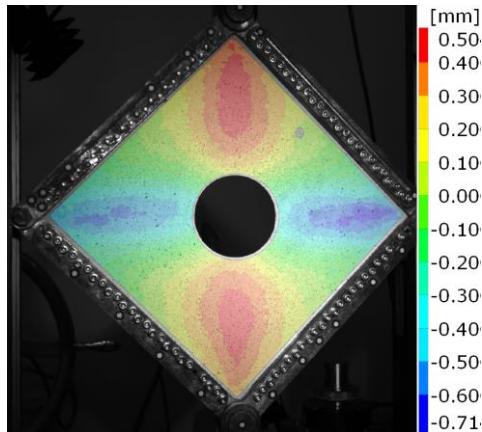


Rys. 5.78. Porównanie zależności obciążenia wydatkiem stycznym w funkcji kąta deformacji postaciowej ustroju  $\gamma$  dla płyty pełnej i osłabionej wykrejmem.  
Wynik badań eksperymentalnych

Ścieżkę równowagi umożliwiającą określenie wartości obciążenia krytycznego wyznaczono jako zależność ugięcia punktu w górnej części obwodu wykreju, który przecinał się z pionową przekątną płyty (rys. 5.79). W przypadku płyty z wykrejmem eksperymentalna wartość obciążenia krytycznego wynosi około 3 N/mm, co jest zdecydowanie niższą wartością niż wyznaczona numerycznie jako wynik analiz zlinearyzowanych (12,8 N/mm). Powodem jest wstępna imperfekcja płyty wynikająca ze sposobu mocowania i odchyłek wykonawczych (rys. 5.80). Należy jednak zaznaczyć, że nawet stosunkowo duże ugięcia wstępne nie mają zasadniczego wpływu na charakter rozkładu deformacji na powierzchni płyty. Porównując ugięcie w rozpatrywanym punkcie z zależnością wyznaczoną dla płyty pełnej w tożsamym geometrycznie miejscu, należy zauważyć, że sztywność w kierunku prostopadłym do powierzchni dla płyty z wykrejmem jest zdecydowanie niższa w całym zakresie działającego obciążenia. Powyżej poziomu obciążenia około 40 N/mm, gdy zaczynają się formować dodatkowe półfale ugięcia w płycie z wykrejmem, sztywność znacząco spada. Objawia się to zmianą kąta nachylenia ścieżki równowagi. W momencie działania maksymalnego obciążenia ugięcie to jest o 125% większe niż w przypadku płyty pełnej.



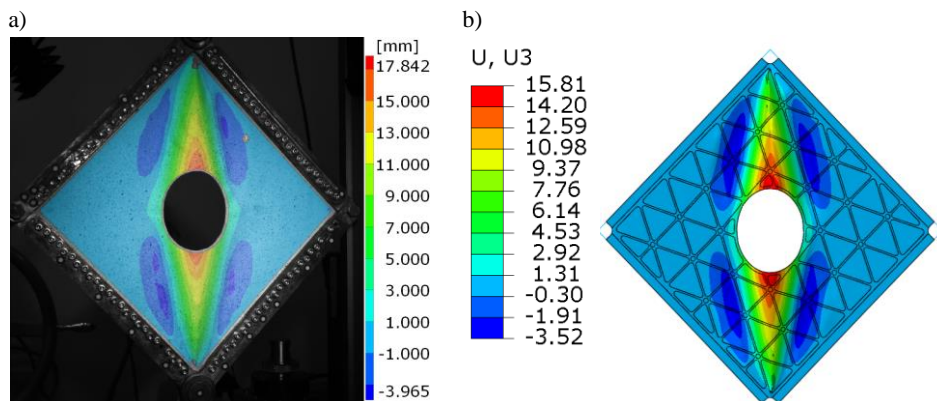
Rys. 5.79. Ugięcie w punkcie określonym przez przecięcie głównej przekątnej pionowej z obrysem wykroju. Dla płyty pełnej wybrano punkt na powierzchni płyty odpowiadający temu samemu położeniu wzdłuż przekątnej



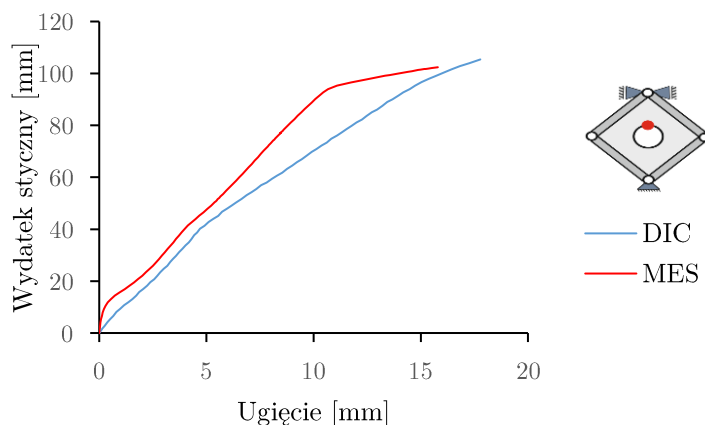
Rys. 5.80. Wstępna imperfekcja geometryczna płyty usztywnianej z wykrojem

Rysunek 5.81 przedstawia rozkład ugięcia płyty w warunkach maksymalnego obciążenia, otrzymany w wyniku pomiarów dokonanych metodą DIC oraz obliczeń numerycznych MES, które przeprowadzono w sposób analogiczny do opisanych w pkt 5.2.6. Uwagę zwraca zgodność charakteru rozkładu deformacji. Różnica w wartościach otrzymanych wyników wiąże

się z niedokładnościami wykonawczymi i wstępną imperfekcją geometryczną płyty, które nie były uwzględnione w wystarczającym stopniu w modelu MES (rys. 5.82).



Rys. 5.81. Pole ugięcia płyty obciążonej wydatkiem  $q = 103 \text{ N/mm}$ : a) rezultat badań eksperymentalnych (DIC), b) wynik obliczeń MES

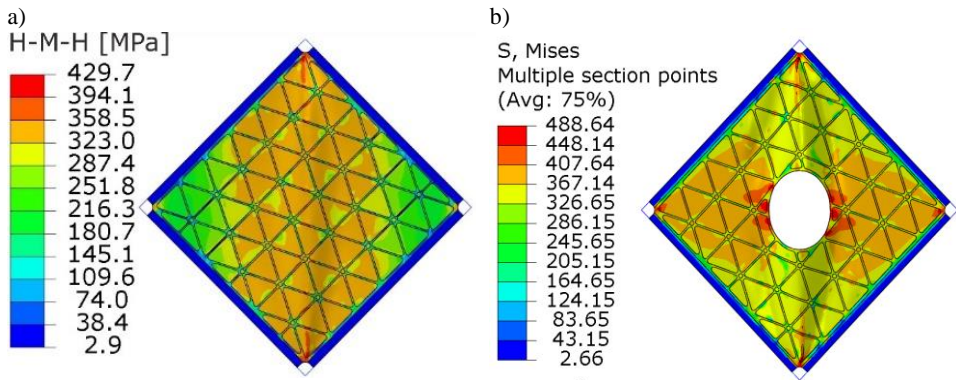


Rys. 5.82. Porównanie ścieżek równowagi uzyskanych w badaniach doświadczalnych i analiz numerycznych dla płyty usztywnianej osłabionej wykrojem

Zadowolająca zbieżność wyników analiz numerycznych oraz badań eksperymentalnych pozwala wnioskować, że rozkład wyężenia będący rezultatem obliczeń w ujęciu MES jest poprawny. Możliwa staje się zatem analiza porównawcza zmierzająca do określenia wpływu wykroju na właściwości użytkowe płyty usztywnianej.

Porównanie rozkładu wyężenia dla pełnej płyty usztywnianej i osłabionej wykrojem pozwala stwierdzić, że obecność nieciągłości geometrii w rozpatrywanej formie podwyższa maksymalny poziom wyężenia o około 14% i znacząco wpływa na wzrost gradientu wyężenia, doprowadzając do przedwczesnego zniszczenia struktury.

Wprowadzenie wykroju kołowego skutkowało pojawieniem się obszarów podwyższonego wyężenia zlokalizowanych w sąsiedztwie brzegów wykroju (rys. 5.83b). Na rysunku 5.83a zaprezentowano rozkład wyężenia dla płyty pełnej. Napężenie zredukowane na rys. 5.83b osiągnęło wartość graniczną dla przyjętego w obliczeniach modelu materiału, a strefy najwyższego poziomu wyężenia i wysokiego gradientu, stanowiące sprzyjające warunki dla inkubacji mikroszczelin, były również miejscem pojawienia się pęknięć w trakcie badań eksperymentalnych (rys. 5.73).



Rys. 5.83. Rozkład wyężenia wg H-M-H dla płyty pełnej (a) i osłabionej wykrojem (b) przy maksymalnym poziomie obciążenia

### 5.2.12. Wnioski i podsumowanie badań nad strukturami usztywnianymi żebrami geodetycznymi

W punkcie 5.2 zawarto wyniki badań eksperymentalnych i obliczeń numerycznych dla cienkościenniej płyty integralnie usztywnianej niskoprofilowymi żebrami tworzącymi siatkę równoramiennych trójkątów. Tego rodzaju wzmocnienia są nazywane usztywnieniami geodetycznymi. Rozważano zachowanie się struktury obciążonej czystym ścinaniem w zakresie deformacji nieliniowych, biorąc pod uwagę zarówno utratę stateczności, jak

i efekty plastyczne. Główne wnioski, jakie można sformułować, przedstawiają się następująco:

1. Wprowadzenie usztywnień w postaci regularnej siatki o kształcie trójkątów równoramiennych spowodowało wzrost obciążenia krytycznego o 300% w stosunku do płyty gładkiej o identycznej masie. Fakt ten może zostać wykorzystany w sytuacji, gdy pożądane jest zachowanie kształtu struktury (np. w związku z aerodynamiką), lub gdy utrata stateczności jest niedozwolona i jednoznaczna z obciążeniem granicznym struktury.
2. Porównanie deformacji pokrytycznych rozważanych struktur udowodniło, że w zakresie deformacji sprężystych płyta usztywniana może posiadać znacząco wyższe właściwości w przypadku ugięcia i poziomu naprężenia, bez wzrostu masy ustroju nośnego.
3. Wykorzystanie integralnego usztywnienia umożliwia również obniżenie masy ustroju nośnego, pozostawiając obciążenia krytyczne i graniczne na tym samym poziomie. Temat ten będzie przedmiotem przyszłych rozważań.
4. Pomimo wprowadzenia uproszczeń w geometrii i modelu materiału w obliczeniach MES należy zauważyć, że udało się uzyskać wyniki o zadowalającej zbieżności w stosunku do rezultatów badań doświadczalnych.
5. Obniżenie właściwości płyty usztywnianej w zakresie deformacji plastycznych jest związane z wystąpieniem koncentracji naprężenia. Zjawisko to jest spowodowane najprawdopodobniej błędną geometrią usztywnień w okolicach naroży płyty, skutkując zmianami sztywności struktury w tych obszarach. W kolejnych badaniach celowe byłoby wypracowanie metodologii wyboru poprawnej geometrii w pobliżu miejsc mocowania płyty. Zjawisko to powinno być również brane pod uwagę w przypadku projektowania rzeczywistych rozwiązań konstrukcyjnych.
6. Rozważając występowanie znacznych obszarów koncentracji naprężenia, koniecznie należy przeprowadzić również badania zmęczeniowe, które mogłyby wykazać wpływ wprowadzonego typu usztywnień na trwałość eksploatacyjną tego rodzaju struktur nośnych.

7. Wyniki próby niszczącej płyty usztywnionej osłabionej kołowym wykrojem potwierdzają słuszność tezy, że wykroje w konstrukcjach, w szczególności w ustrojach pracujących w warunkach odpowiadających deformacjom zakrytycznym, stanowią newralgiczne strefy, podlegające szczególnym obserwacjom w trakcie eksploatacji.

Zaobserwowana, zadowalająca zgodność wyników pozwala stwierdzić poprawność przyjętej metody postępowania w procesie projektowania ustroju nośnego wspomagającego identyfikację i, jeśli jest to możliwe, eliminację obszarów newralgicznych.

Zaprezentowane rezultaty umożliwiają sformułowanie stwierdzenia, że w zakresie obciążeń statycznych wprowadzenie integralnych, niskoprofilowych usztywnień tworzących siatkę równoramiennych trójkątów ma pozytywny wpływ na poziom deformacji i stan naprężenia w strukturach cienkościennych.

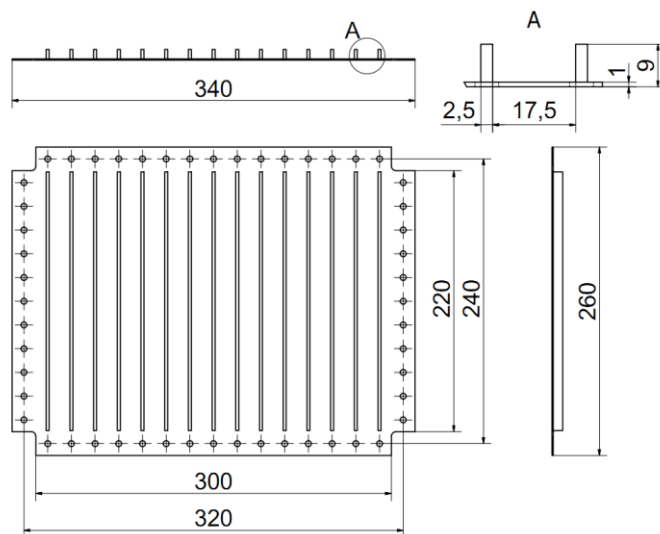
### **5.3. Płyty wzmacniane niskimi, równoległymi żebrami w stanach zaawansowanych deformacji**

Skutecznym sposobem racjonalnego zwiększania obciążeń ustrojów cienkościennych bez powiększania ich masy jest stosowanie żeberowań umieszczonych równoległe do siebie. Rozważania na temat statyki i stateczności tego rodzaju struktur opisano w wielu publikacjach [13, 17, 53, 62, 86, 147].

Specjalną rolę odgrywa tutaj niskoprofilowe pośrednie żebrowanie, tzw. *sub-stiffening*, które występuje pomiędzy głównymi elementami usztywnień wzdłużnych i poprzecznych [56, 65, 75, 106]. Wzmacnianie płyty lub powłoki niskimi żebrami rozmieszczanymi równoległe do boku płyty jest prostsze w wykonaniu i tańsze w stosunku do struktur typu isogrid prezentowanych w pkt 5.2. Gdy podziałka żeber jest mała w porównaniu z wymiarami gabarytowym płyty, wówczas konstrukcja może być utożsamiona z jednolitą strukturą ortotropową.

Zachowując tok postępowania prezentowany w odniesieniu do uprzednio rozważanych zagadnień, w niniejszym zadaniu dotyczącym płyt nisko żeberowanych przeprowadzono badania doświadczalne oraz analizy numeryczne, traktując płyty jako półskorupowe struktury lotnicze, osiągające w warunkach eksploatacji stany deformacji zakrytycznych.

Przedmiot rozważań stanowiły zatem jednokierunkowo niskożebrowane płyty prostokątne poddawane obciążeniu w postaci czystego ścinania. Wymiary płyty przedstawiono na rys. 5.84.



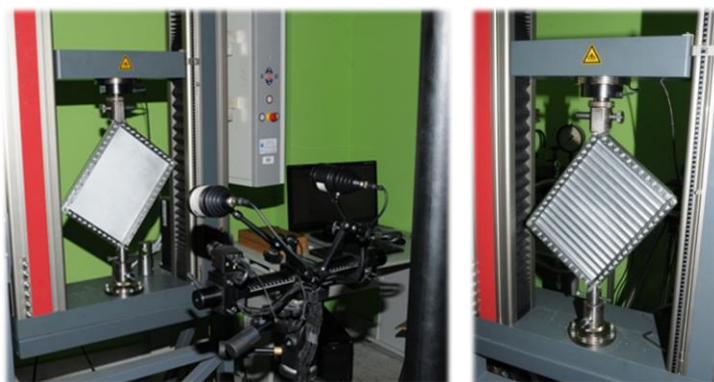
Rys. 5.84. Wymiary badanych płyt

Na potrzeby eksperymentu zaprojektowano i wykonano układ mocowania płyty w postaci sztywnej, czteroprzegubowej ramy. Elementy ramy łączono z badaną płytą za pomocą mechanizmów śruba–nakrętka, utrzymując w trakcie montażu kontrolę równomiernego docisku śrub. Zastosowany rodzaj połączenia zapewniał występowanie dostatecznie dużej siły tarcia pomiędzy powierzchniami pozostającymi w kontakcie. Sztywność elementów ramy nie pozwalała na zaistnienie obrotów brzegów płyty, co umożliwiło przyjęcie warunków zamocowania płyty w postaci utwierdzenia.

Dolny węzeł ramy połączono z podstawą maszyny wytrzymałościowej, górny zaś łączono z jej trawersą ruchomą. Zastosowany sposób wprowadzania sił zewnętrznych zapewniał wprowadzenie na brzegach płyty obciążenia w postaci wydatku stycznego symulującego oddziaływanie elementów struktury płatowca na element pokrycia. Schemat obciążenia był zatem zgodny z rys. 5.13.

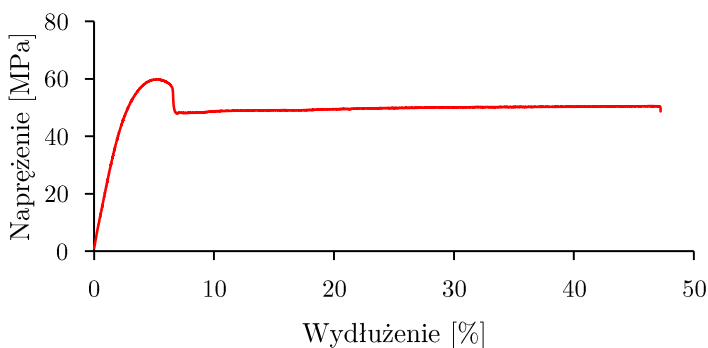
Eksperymentalne badania przeprowadzono z zaangażowaniem uniwersalnej maszyny wytrzymałościowej Zwick Z050 (rys. 5.85). Cyfrowy układ sterująco-rejestrujący maszyny pozwalał na sterowanie zarówno wielkością

przesunięcia trawersy, jak i poziomem obciążania. Maszynę wyposażono w tensometryczną głowicę pomiaru siły o nominalnej wielkości 50 kN, z możliwością rejestracji z dokładnością 0,12% obciążenia nominalnego. Zmiany pola deformacji w trakcie obciążania płyt rejestrowano, podobnie jak w poprzednim przypadku, z wykorzystaniem systemu pomiarowego opartego na metodzie DIC. Połączenie z maszyną wytrzymałościową umożliwiło rejestrację w czasie rzeczywistym zarówno aktualnego poziomu siły, jak i przesunięcia trawersy obciążającej, które utożsamiano z przesunięciem górnego węzła stanowiska badawczego.



Rys. 5.85. Stanowisko badawcze wraz ze skanerem DIC

Badania wpływu uźebrowania na sposób reagowania płyty w stanach deformacji pokrytycznej przeprowadzono dla konstrukcji wykonanych z tworzywa sztucznego o nazwie poliwęglan, o znanej charakterystyce fizycznej (rys. 5.86).

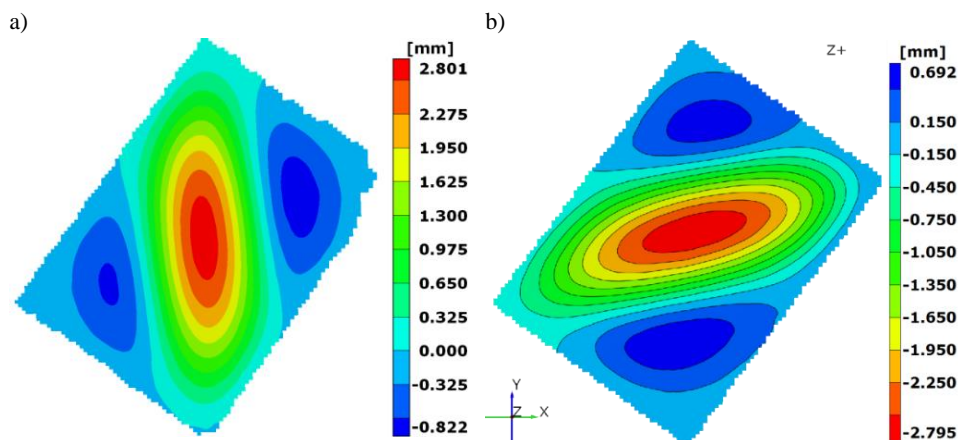


Rys. 5.86. Wykres rozciągania poliwęglanu



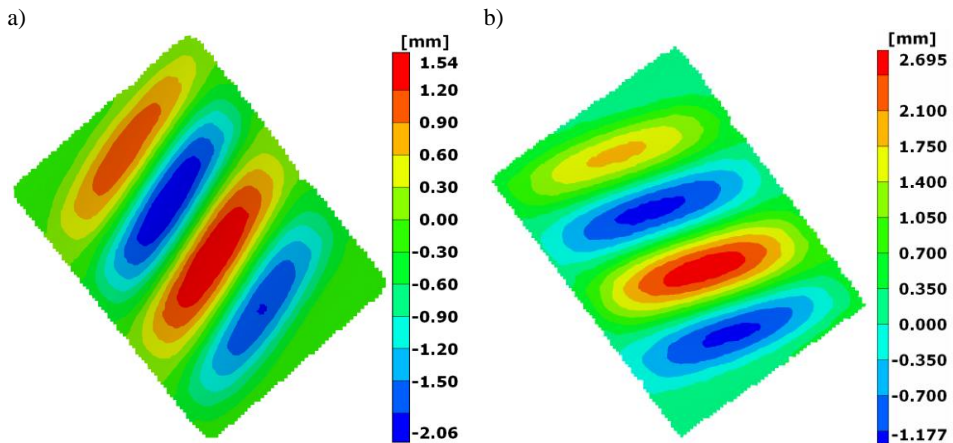
Jako strukturę referencyjną przyjęto płytę bez usztywnień o grubości 2 mm i masie 206 g. Konstrukcję żebrowaną stanowiła płyta o grubości 1 mm, usztywniona 15 żebrami o szerokości 2,5 mm i wysokości 8 mm (rys. 5.84). Masa płyty z żebrami usztywniającymi wynosiła 181 g, była zatem mniejsza o 12% od masy płyty referencyjnej. Część pomiarowa, znajdująca się pomiędzy belkami ramy obciążającej miała identyczną masę w obydwu przypadkach, równą 158 g. Strukturę badawczą wykonano w technologii obróbki ubytkowej z płyty poliwęglanu o grubości 10 mm. W trakcie pomiarów niedokładności wykonania badany egzemplarz płyty żebrowanej wykazał odchyłki grubości poniżej 0,1 mm.

Bazę odniesienia dla wyników obliczeń płyty żebrowanej stanowiły wyniki badań deformacji pokrytycznej płyty referencyjnej. Jako wielkości porównywane brano pod uwagę rezultaty ilościowe w postaci pola ugięć w funkcji zadawanych w trakcie eksperymentu wartości obciążenia. Utrata stateczności płyty stanowiąca nową postać równowagi uwidoczniła się w postaci trzech półfal na jej powierzchni z jedną dominującą na przekątnej oraz dwoma mniejszymi, rozłożonymi względem niej symetrycznie. Postać taka utrzymywała się w pełnym zakresie obciążania płyty. Identyczną postać wybożenia otrzymano niezależnie od kierunku działania obciążenia (rys. 5.87).



Rys. 5.87. Ugięcie powierzchni płyty gładkiej wyznaczone eksperymentalnie, z wykorzystaniem metody DIC: a) obciążenie  $q = 8 \text{ N/mm}$  („rozciąganie”), b) obciążenie  $q = -8 \text{ N/mm}$  („ściskanie”)

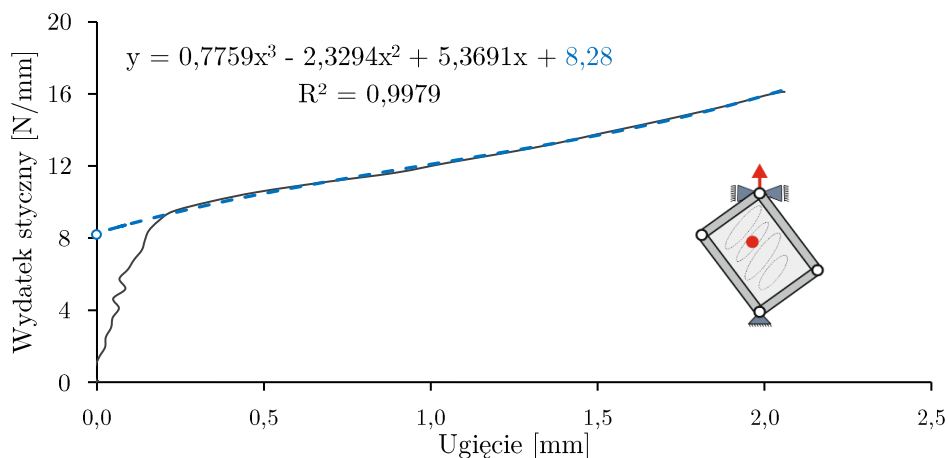
Jako drugą w kolejności badano płytę żebrowaną. Płyta traciła stateczność w sposób znacząco różny w stosunku do struktury gładkiej. Zaobserwowano cztery półfale o zbliżonej wielkości ugięcia, ułożone pod kątem około  $30^\circ$  w stosunku do kierunku krótszego boku płyty. W trakcie obciążania również nie obserwowano zmian postaci wybočenja, a jedynie dalsze pogłębianie się wielkości półfal (rys. 5.88). Niezależnie od kierunku działania obciążenia (wydatku) otrzymano analogiczną postać deformacji pokrytycznej. W przypadku „ściskania” wielkość ugięcia okazała się nieznacznie większa. Fakt ten można tłumaczyć brakiem idealnej symetrii geometrycznej płyty żebrowanej w stosunku do kierunku działania obciążenia.



Rys. 5.88. Ugięcie powierzchni płyty integralnie żebrowanej wyznaczone eksperymentalnie, z wykorzystaniem metody DIC: a) obciążenie  $q = 16 \text{ N/mm}$  („rozciąganie”), b) obciążenie  $q = -16 \text{ N/mm}$  („ściskanie”)

Na rysunku 5.89 przedstawiono ścieżkę równowagi uzyskaną w wyniku pomiarów DIC w formie relacji pomiędzy maksymalnym ugięciem a poziomem obciążenia. Wykorzystując metodę poszukiwania obciążenia krytycznego, opisaną w pkt 5.2.5, wyznaczono wydatki krytyczne na poziomie  $8,3 \text{ N/mm}$ .

Badania modeli numerycznych płyt w ujęciu MES w zakresie zarówno liniowych, jak i nieliniowych procedur poszukiwania rozwiązania prowadzono, stosując komercyjny program ABAQUS CAE.



Rys. 5.89. Ścieżka równowagi płyty żebrowanej dla punktu maksymalnego ugięcia (wartość bezwzględna)

W pierwszej kolejności wykonano zlinearyzowaną analizę stateczności, w celu wyznaczenia obciążeń krytycznych oraz geometrii powierzchni stanu krytycznego płyty. Stany pokrytyczne analizowano, stosując procedury nieliniowe, a ściślej – zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona. Umożliwiło to otrzymywanie rezultatów w postaci redystrybucji naprężeń oraz geometrii zaawansowanych stanów deformacji.

W dążeniu do otrzymania zgodności wyników analiz numerycznych z rezultatami eksperymentu zwracano szczególną uwagę na rolę i wpływ, na wspomnianą zgodność, wstępnej imperfekcji geometrycznej. Dotyczyło to przede wszystkim płyty gładkiej, dla której wyznaczanie deformacji w trakcie analizy nieliniowej wymagało założenia wstępnej imperfekcji geometrycznej lub jej wymuszenia przez realizację niewielkiego obciążenia poprzecznego, powodującego zaburzenie stanu równowagi płyty w fazie początkowej. W wyniku prób przyjęto, że rezultaty analiz zlinearyzowanych stanowią podstawę do zaistnienia wstępnej postaci geometrii płyty.

Zarówno badania doświadczalne, jak i analizy numeryczne potwierdzają, że warunkiem otrzymania adekwatnego modelu numerycznego jest jak najdokładniejsze odwzorowanie sztywności konstrukcji. W rozważanym zagadnieniu newralgicznym obszarem, decydującym o zgodności wyników badań i obliczeń, okazały się strefy brzegowe łączenia płyty z ramą. Ostatecznie, na podstawie wielu prób płytę łączono z elementami ramy za

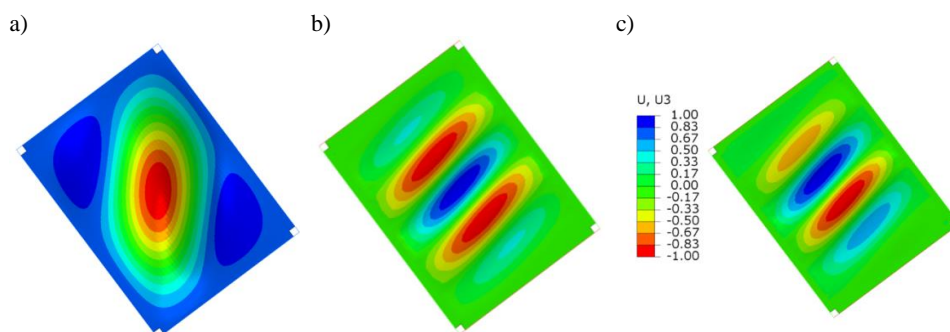
pomocą mechanizmów śrubowych. W modelu numerycznym idealne odwzorowanie tego rodzaju połączenia jest kłopotliwe. W istocie, zastosowanie mechanizmów śrubowych prowadzi do uwzględnienia oddziaływania ramy na powierzchnię płyty za pomocą siły tarcia. Sprowadza się to do uwzględnienia kontaktu, będącego formą nieliniowego oddziaływania współpracujących elementów. Możliwe jest jednak założenie upraszczające, zakładające ciągły kontakt pomiędzy elementami płyty z ramą mocującą.

Sposób budowy modelu numerycznego i wykorzystane elementy skończone były analogiczne do opisanych w poprzednim punkcie. Płyty gładką oraz żebrowaną odwzorowywano elementami powłokowymi. Ramę modelowano elementami belkowymi. Cztery elementy ramy kojarzono między sobą za pomocą elementu MPC-HINGE, symulującego połączenie przegubowe w zadanej płaszczyźnie. Ramę z płytą łączono więzami typu TIE, zmuszając tym samym połączone węzły do tożsamyh deformacji. Warunki brzegowe dla górnego i dolnego węzła zastosowano analogiczne do warunków realizowanych w eksperymencie. Górny węzeł posiadał wyłącznie jeden translacyjny stopień swobody w postaci możliwości swobodnego przemieszczania się wzdłuż osi pionowej, natomiast węzeł dolny symulował podporę stałą. Węzłom pozostawiono swobodę obrotu w płaszczyźnie płyty, odtwarzając tym samym przegubowy charakter podpór. Wymiary charakterystyczne wykorzystanych elementów skończonych wynosiły 5 mm. Ze względu na stosunkowo prostą geometrię badanych płyt wymiar ten był wystarczający do uzyskania zadowalających wyników. Opracowane w ten sposób modele zastosowano do analiz nieliniowych zarówno w przypadku płyt gładkich, jak i żebrowanych.

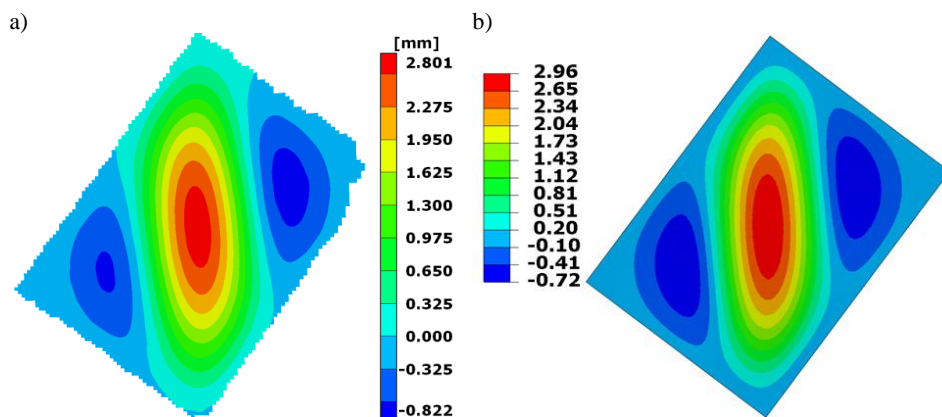
W pierwszej kolejności wykonano analizę stateczności metodą zlinearyzowaną. W przypadku płyty gładkiej (rys. 5.90a) postać wyboczenia okazała się analogiczna do zaobserwowanej w trakcie przeprowadzonych badań eksperymentalnych (rys. 5.87a), a krytyczna wartość wydatku wskazana przez algorytm numeryczny wynosiła 4,15 N/mm. W przypadku płyty integralnie żebrowanej pierwsza i druga postać wyboczenia (rys. 5.90b i 5.90c) pojawiała się przy niemal identycznych wielkościach obciążenia krytycznego (różnica poniżej 1%). W przypadku pierwszej postaci deformacja uwidoczniła się w formie pięciu półfal, natomiast w przypadku postaci drugiej zaobserwowano jedynie cztery półfale. Poprawna, czyli zgodna z ekspery-

mentem, była druga postać wybożenia, dla której wartość obciążenia krytycznego wyniosła 7,22 N/mm.

W ocenie skuteczności przyjętej metodyki, podczas analizy problemu dużych deformacji płyty żebrowanej, jako kryterium przyjmowano zgodność wyników analiz numerycznych z eksperymentem. Porównanie wyników badań doświadczalnych z obliczeniami numerycznymi dla referencyjnej płyty gładkiej prezentuje rys. 5.91. Obrazuje on zadowalającą zbieżność rezultatów zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Rozkłady ugięć cechują się wysoką zgodnością, ale model numeryczny wskazał na nieco mniejszą sztywność (różnica wartości maksymalnego ugięcia wynosi około 5,5%).

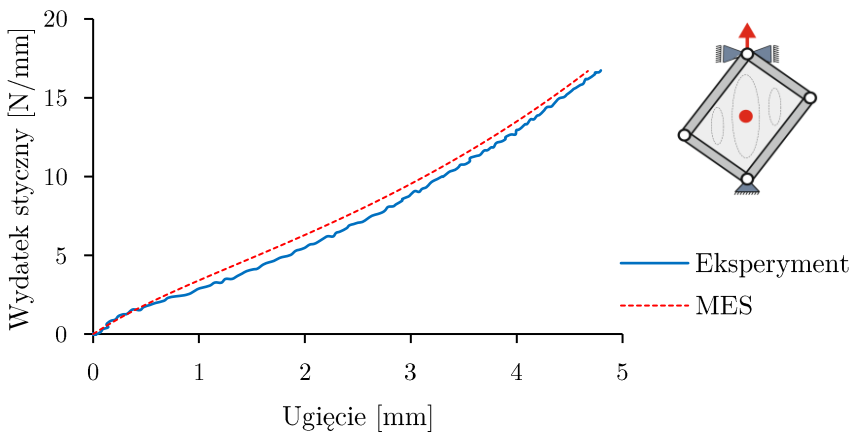


Rys. 5.90. Powierzchnie ugięcia płyt: a) pierwsza postać wybożenia płyty gładkiej,  $q = 4,15$  N/mm, b) pierwsza postać wybożenia płyty żebrowanej,  $q = 7,16$  N/mm, c) druga postać wybożenia płyty żebrowanej,  $q = 7,22$  N/mm

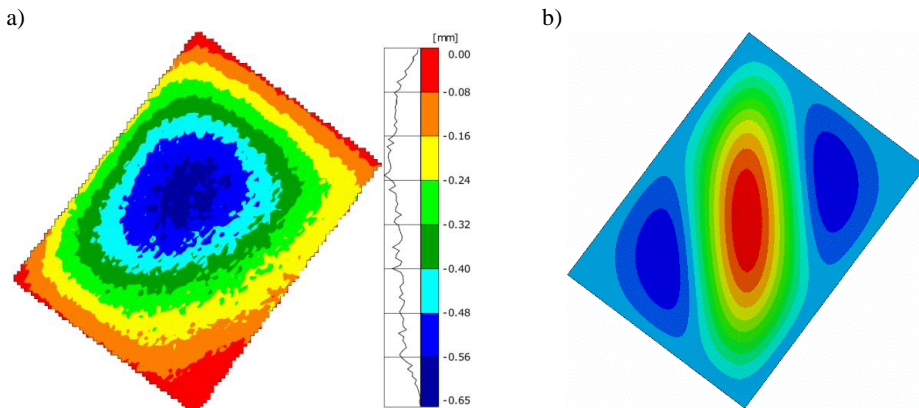


Rys. 5.91. Powierzchnia ugięcia płyty [mm] dla obciążenia  $q = 8$  N/mm: a) wynik eksperymentalny, b) wynik MES

Na rysunku 5.92 porównano ścieżki równowagi sporządzone dla punktu usytuowanego w środku geometrycznym powierzchni, w którym zaobserwowano maksymalne ugięcie płyty gładkiej. Zwraca uwagę fakt, że w pełnym zakresie obciążenia realizowanym w trakcie eksperymentu zaobserwowano zgodność z wynikami obliczeń numerycznych. Można to uzasadnić dostatecznie dobrym dopasowaniem wstępnej imperfekcji geometrycznej w modelu numerycznym do odpowiadającej mu postaci wykazanej w trakcie eksperymentu (rys. 5.93).

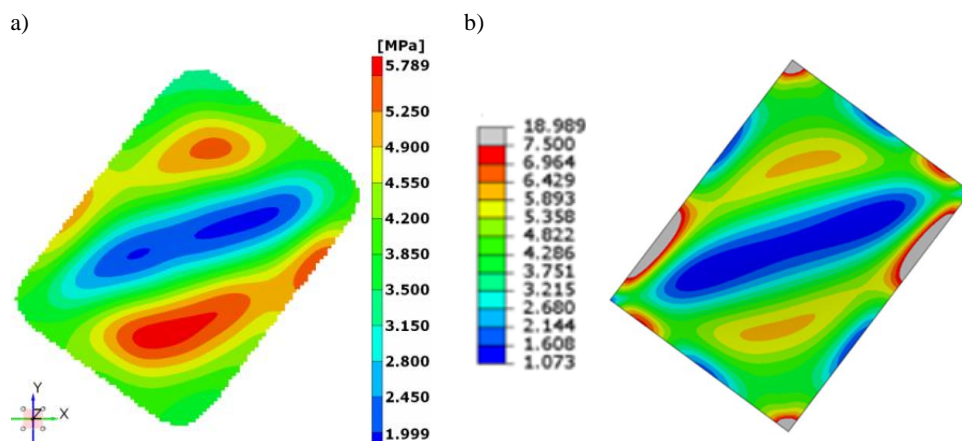


Rys. 5.92. Porównanie eksperymentalnej i obliczeniowej ścieżki równowagi wykreślonych dla punktu środkowego płyty



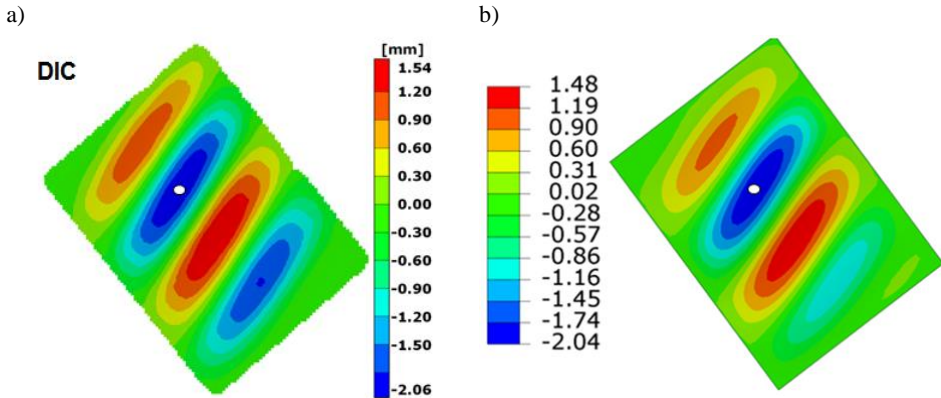
Rys. 5.93. Porównanie rozkładu wstępnej imperfekcji geometrycznej dla płyty gładkiej: a) zarejestrowanej w trakcie badań doświadczalnych, b) przyjętej w analizach numerycznych

Na podstawie znajomości pola odkształceń oraz równania konstytutywnego, w przypadku stałej grubości badanego elementu oprogramowanie wykorzystanego skanera DIC umożliwia wyznaczenie pola naprężenia. W przypadku płyty gładkiej sporządzono rozkład naprężeń głównych, który porównano z wynikiem analizy numerycznej. Na rysunku 5.94 w części przedstawiającej wynik MES (rys. 5.94b) szarymi polami oznaczono obszary niemieszczące się w zawężonej legendzie. Porównując obydwie wyniki, podobnie jak w przypadku ugięcia, można zaobserwować wysoką zbieżność. Należy jednak zaznaczyć, że pomiary wykonywane skanerem DIC nie obejmują pełnego obszaru płyty – wąski obszar na brzegu płyty nie jest brany pod uwagę w trakcie przeliczeń. Ciekawie przedstawia się również sam rozkład naprężenia. Obydwie metody wskazują, że najwyższe wartości naprężenia można obserwować nie w narożach płyty, ale w ograniczonym obszarze na jej przeciwległych brzegach. Na poprawność otrzymanych wyników wskazują również przeprowadzone w dalszej kolejności badania zmęczeniowe [134].



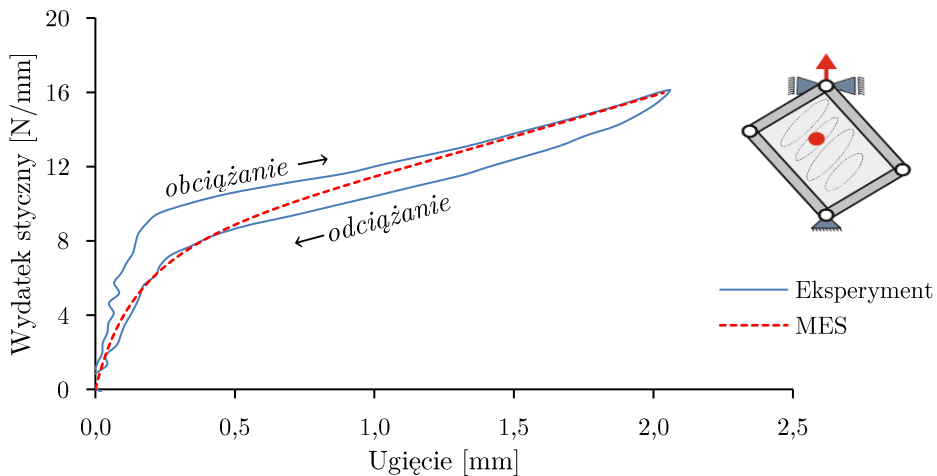
Rys. 5.94. Rozkład składowej naprężenia głównego [MPa] na powierzchni płyty gładkiej dla obciążenia  $q = 16 \text{ N/mm}$ : a) wynik badań eksperymentalnych, b) wynik obliczeń MES

Analiza porównawcza rezultatów badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych dla powierzchni ugięcia płyty gęsto żebrowanej wykazuje dobrą zbieżność wyników zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Przy maksymalnym obciążeniu różnica wyników w punkcie największego ugięcia wynosi niespełna 4% (rys. 5.95).



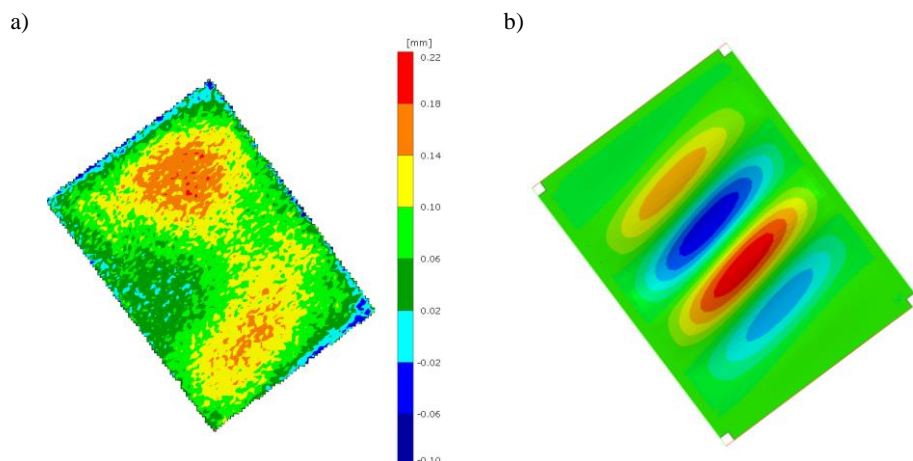
Rys. 5.95. Powierzchnia ugięcia płyty (obciążenie  $q = 16 \text{ N/mm}$ ):  
 a) wynik badań eksperymentalnych, b) wynik obliczeń MES

W przypadku płyty żebrowanej nie uzyskano pełnej zbieżności wyników w całym zakresie obciążeń (rys. 5.96). Rozbieżność wyników, zauważalna w warunkach niskich poziomów obciążenia, wynikała z różnicy kształtów wstępnej imperfekcji geometrycznej, której nie zdołano odwzorować wystarczająco dokładnie w przypadku analiz numerycznych. Przyjęta postać wyboczenia pochodząca z wyniku zlinearyzowanych analiz stateczności nie odpowiadała w pełni postaci wynikającej z zamocowania płyty w trakcie eksperymentu (rys. 5.97). Zapewne nie bez wpływu na wyniki pozostawały



Rys. 5.96. Porównanie reprezentatywnych ścieżek równowagi płyty żebrowanej wyznaczonych w badaniach doświadczalnych i analizie MES dla punktu maksymalnego ugięcia płyty



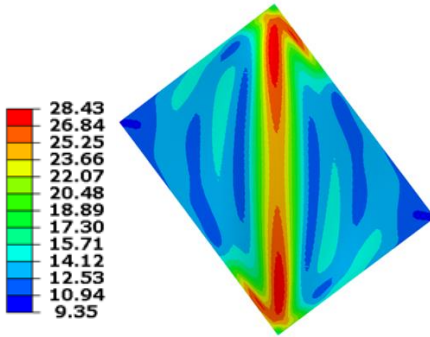


Rys. 5.97. Porównanie rozkładu wstępnej imperfekcji geometrycznej dla płyty żebrowanej: a) zarejestrowanej w trakcie badań doświadczalnych, b) przyjętej w analizach numerycznych

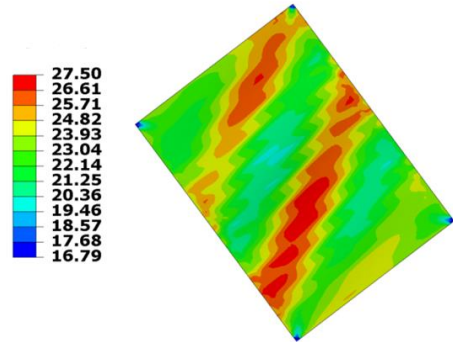
również odchyłki od idealnej geometrii powstałe w procesie technologicznym oraz kasowanie luzów pomiędzy elementami ramy a samą płytą oraz mocowaniem do maszyny wytrzymałościowej. Niemniej, podobnie jak w przypadku płyty gładkiej, zbieżność wyników w zakresie zaawansowanych deformacji pokrytycznych okazała się dostatecznie duża. Prawdopodobnie ta w szerokim zakresie była niezależna od parametrów sterowania procedurą poszukiwania rozwiązania numerycznego.

Na rysunku 5.98 porównano rozkłady wyęźnienia wg hipotezy Hubera dla płyty gładkiej i żebrowanej. Konfrontacja ta wskazuje na różnicę poziomów wyęźnienia struktur, wynoszącą około 1 MPa. Różnicę tę można uznać za pomijalnie małą, jeśli wziąć pod uwagę złożoność nieliniowych, numerycznych procedur wyznaczania rozwiązania. Uwagę zwraca znaczna różnica w zaangażowaniu wielkości stref przenoszących obciążenia. W przypadku płyty gładkiej jedynie strefa środkowa, wokół przekątnej płyty, wykazuje udział w dystrybucji obciążenia. Struktura integralnie usztywniana cechuje się zdecydowanie korzystniejszym rozkładem oraz gradientem wyęźnienia. Fakt ten posiada znaczący wpływ nie tylko na nośność graniczną, lecz również na trwałość zmęczeniową rozwiązania.

a)



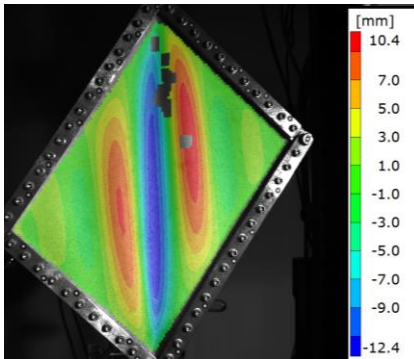
b)



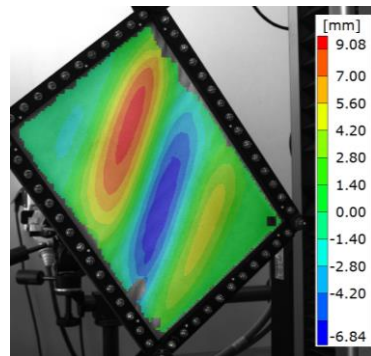
Rys. 5.98. Rozkład wyężenia według hipotezy H-M-H [MPa] uzyskany przez analizy numeryczne MES dla obciążenia  $q = 16 \text{ N/mm}$ : a) płyta gładka, b) płyta żebrowana

Zastosowanie skanera w trakcie pomiarów umożliwiło rejestrację fotograficzną deformacji struktur w całym zakresie realizowanego eksperymentalnie obciążenia, a co za tym idzie – również w fazie zniszczenia. Na rysunku 5.99 przedstawiono deformację płyty gładkiej i żebrowanej w momencie bezpośrednio poprzedzającym destrukcję badanych struktur. Rozkłady ugięć w obu płytach zwracają uwagę na różnicę kształtów pól, dowodzącą istnienia zróżnicowanych gradientów ugięcia. Rysunki 5.100-5.102 prezentują postać deformacji zaistniałych w wyniku dalszego zwiększania obciążenia do stanu całkowitej degradacji.

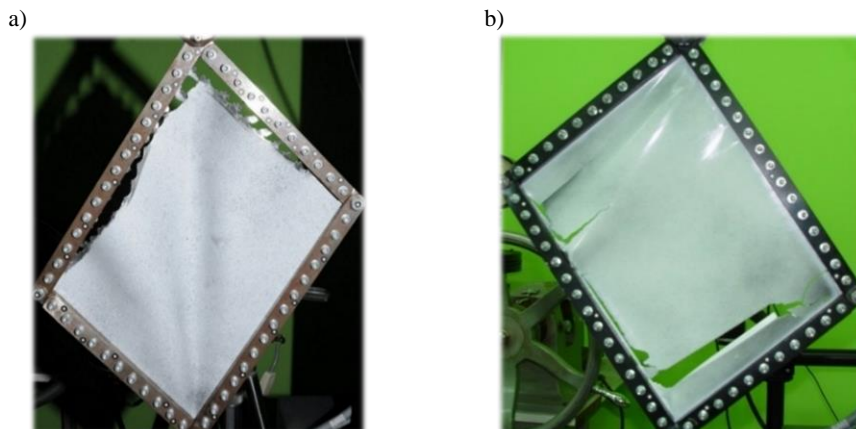
a)



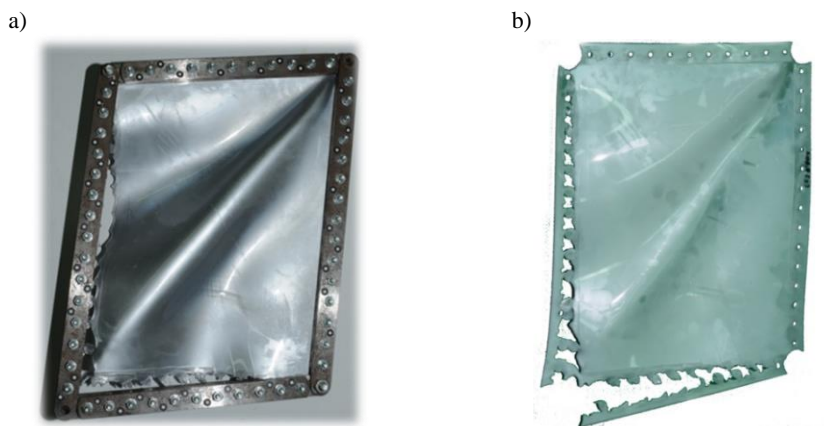
b)



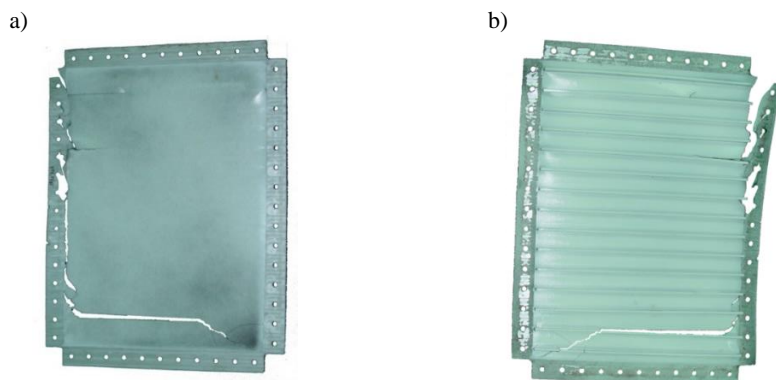
Rys. 5.99. Ugięcie płyt w momencie poprzedzającym zniszczenie: a) gładka – obciążenie 67,50 N/mm, b) integralna – obciążenie 35,75 N/mm



Rys. 5.100. Postać zniszczenia struktury: a) płyta gładka, b) płyta żebrowana



Rys. 5.101. Deformacja trwała płyty gładkiej



Rys. 5.102. Deformacja trwała płyty żebrowanej

Maksymalne wartości obciążenia zarejestrowane w trakcie eksperymentu wynosiły odpowiednio 67,47 N/mm w przypadku płyty gładkiej oraz 35,75 N/mm dla płyty gęstożebrowanej.

O ile płyta gładka ulegała zniszczeniu na skutek pojawienia się odkształcenia plastycznego w strefie brzegu osłabionego obecnością otworów pod śruby, to płyta żebrowana ulegała zniszczeniu wskutek nagłego, lokalnego wzrostu naprężeń oraz ich gradientów, do wartości wykraczających poza nośność graniczną. Zjawisko to było spowodowane kontaktem pomiędzy brzegami bocznymi żeber a powierzchnią ramy obciążającej, zaistniałym na skutek pogłębiającego się ugięcia płyty. Postać zniszczenia należy zatem uznać za niepoprawną, bo wynikającą z warunków zamocowania badanej struktury. Z uwagi na to, maksymalna nośność płyty gęstożebrowanej może się okazać wyższa niż wynikająca z przeprowadzonych badań.

W tabeli 5.4 zebrano obliczone wartości obciążenia krytycznego dla płyty gładkiej oraz żebrowanej. Wyniki uzyskano, prowadząc analizę MES na wartości własne oraz z zastosowaniem funkcji aproksymacyjnych, wykorzystując metodykę opisaną w pkt 5.2.5.

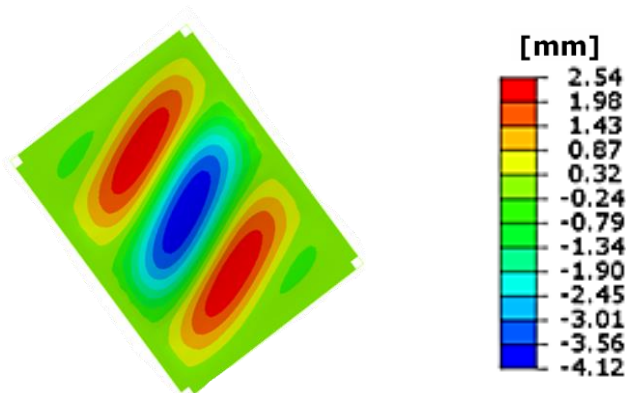
Tabela 5.4. Krytyczne wartości wydatku stycznego otrzymane na podstawie funkcji aproksymacyjnych oraz zlinearyzowanych analiz dla stateczności

Struktura	Badanie	Obciążenie krytyczne, $q_{kr}$ [N/mm]
Płyta gładka	Eksperyment (DIC)	8,28
	MES (analizy nieliniowe)	5,41
	MES (wartości własne)	7,22
Płyta żebrowana	Eksperyment (DIC)	0,54
	MES (analizy nieliniowe)	0,43
	MES (wartości własne)	4,15

Przeprowadzone badania eksperymentalne i numeryczne analizy w ujęciu MES wykazały znaczący wpływ integralnych uźebrowań na zachowanie się ustroju w stanach deformacji pokrytycznych. Bezsprznaną zaletą badanego rozwiązania jest wzrost wartości obciążenia krytycznego, wynikający z analiz na wartości własne, sięgający blisko 75%. Należy jednak pamiętać, że zlinearyzowane analizy stateczności odnoszą się do struktur z geometrią idealną, tj. bez wstępnych imperfekcji geometrycznych.

Porównując wyniki badań eksperymentalnych dla wybranych punktów reprezentatywnych (rys. 5.92 i 5.96), w których zarejestrowano największą wartość ugięcia, zaobserwowano piętnastokrotny wzrost sztywności struktury, rozumiany jako wzrost obciążenia krytycznego. Podobne wartości wykazuje porównanie wyników nieliniowych analiz numerycznych. W obydwu przypadkach trzeba brać pod uwagę istnienie wstępnej imperfekcji geometrycznej, która w przypadku płyty gładkiej objawiła się jako wstępne ugięcie płyty sięgające 30% grubości płyty. Niemniej jednak wyniki wskazują, że płyta żebrowana jest bardziej odporna na niekorzystny wpływ wstępnej imperfekcji.

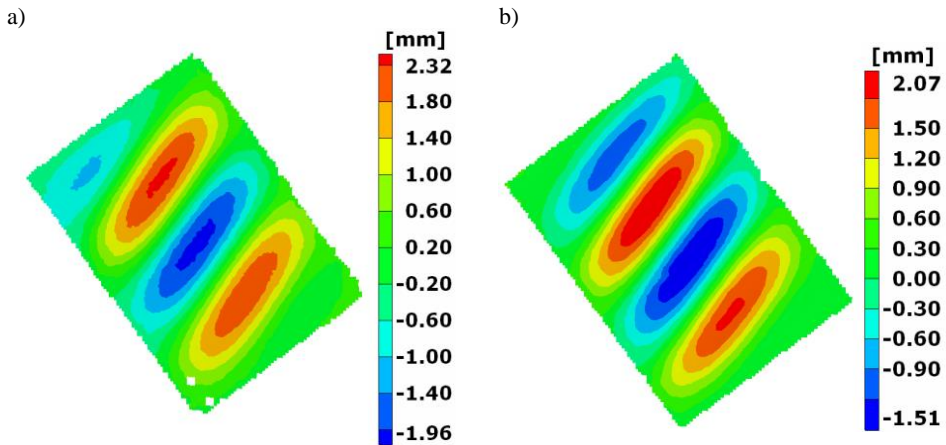
Zaproponowana metodyka bieżąco kontrolowanych badań i obliczeń uwidoczniała wiele ważnych elementów o istotnym znaczeniu dla procesu projektowania. I tak przykładowo, w sposób ewidentny uwidoczniał się wyraźny wpływ początkowej geometrii struktury na możliwość otrzymania wyników obliczeń numerycznych zgodnych z eksperymentem w początkowej fazie obciążenia. Chociaż analiza płyt żebrowanych nie wymagała założenia *a priori* wstępnej deformacji, to procedury poszukiwania rozwiązania w większości przypadków w pierwszej kolejności „wybierały” nieprawidłową fizycznie ścieżkę równowagi. Pominięcie, względnie przyjęcie dowolnie założonej postaci deformacji wstępnej skutkowało otrzymywaniem błędnej formy deformacji (rys. 5.103). Wskutek tego obliczony rozkład naprężenia w znaczący sposób odbiegał od rzeczywistego. Deformacja przy wyższych



Rys. 5.103. Niezadawalająca forma deformacji płyty żebrowanej otrzymana w wyniku analiz numerycznych bez uwzględnienia wstępnej imperfekcji geometrycznej (ugięcie w [mm])

wartościach obciążenia, bliskich stanom granicznym okazała się jednak łatwiejsza do odwzorowania i nie jest w sposób znaczący zależna od stanu początkowego.

Zwraca uwagę fakt, że stosowanie struktur żebrowanych wymaga zachowania wysokich tolerancji wykonawczych, w szczególności grubości płyty. Uzasadnienie przedstawiono na rys. 5.104. Odchyłka grubości wynosząca około 0,1 mm (w tym przypadku 10% wartości nominalnej) powodowała wzrost wartości ugięcia od 10 do 30% w stosunku do płyty o geometrii referencyjnej.

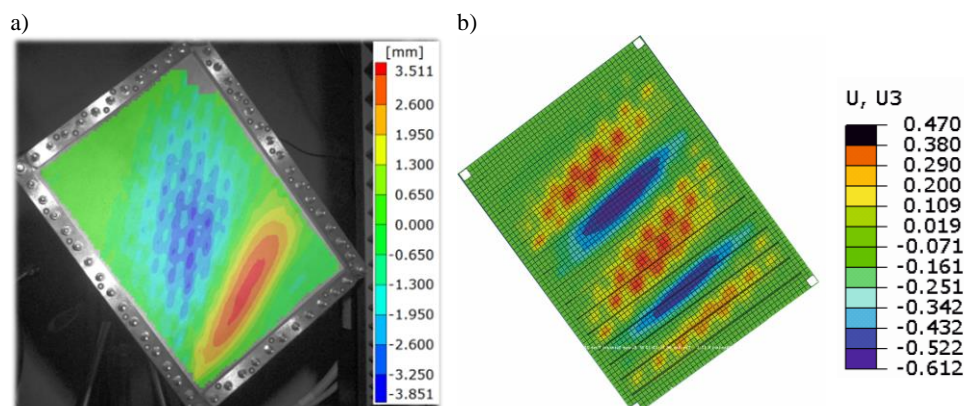


Rys. 5.104. Powierzchnia ugięcia płyt żebrowanych o zróżnicowanej grubości:  
a) 0,9 mm, b) 0,95-1,00 mm (wynik DIC)

Osobliwej deformacji ulegały płyty, których geometria wykazywała znaczne odchyłki grubości w stosunku do założonego wymiaru nominalnego (od  $\pm 30$  do nawet  $\pm 50\%$ ). Powodowało to zaistnienie obszarów lokalnej utraty stateczności płyty między żebrami usztywniającymi (rys. 5.105 i 5.106a), prowadząc do znacznego wzrostu poziomu naprężenia w takich strefach, co w efekcie wywołało uplastycznienie struktury. Zaobserwowany stan deformacji okazał się kłopotliwy do odtworzenia w nieliniowych analizach numerycznych. Trudność była spowodowana koniecznością odwzorowania zmiennej grubości płyty. Rysunek 5.106b prezentuje jedno z otrzymanych rozwiązań numerycznych, które można przyjąć za formę przybliżoną.



Rys. 5.105. Wyboczenie lokalne



Rys. 5.106. Ugięcie powierzchni płyty z widocznym efektem lokalnym:

a) wyniki eksperymentu (DIC), b) wynik MES [mm]

## 5.4. Analiza struktur nośnych wytwarzanych w technologii druku przestrzennego

### 5.4.1. Wprowadzenie

W zbiorze metod badań ustrojów nośnych zaliczanych do kategorii komplementarnych coraz szersze zastosowania znajdują techniki oparte na badaniu struktur wytwarzanych w technologii addytywnej FDM (ang. *Fused Deposition Modeling*), szeroko rozpowszechnionej w pierwszej dekadzie

XXI w. [24, 33]. Są to metody technologiczne zwane powszechnie drukiem 3D. Technika tworzenia obiektu polega na nakładaniu na siebie kolejnych warstw podgrzanego do wysokiej temperatury materiału (filamentu), przeciskanego przez dyszę o określonej średnicy.

Z względu na niskie wartości naprężenia granicznego materiałów wykorzystywanych w technice FDM, z których jednymi z najczęściej stosowanych są obecnie ABS<sup>1</sup> i PLA<sup>2</sup>, nie należy oczekiwać ich wykorzystywania w budowie elementów o pierwszorzędnym znaczeniu w strukturach nośnych. Jeśli chodzi o przydatność w lotnictwie, to znajdują one zastosowanie w budowie obiektów o niewielkich wymiarach, na przykład w bezzałogowych aparatach latających. Próby tego rodzaju były podejmowane między innymi przez autora [135, 136].

Z poznawczego punktu widzenia perspektywiczne zastosowania struktur wytwarzanych w technologii druku przestrzennego wydają się bliskie badaniom modelowym [35, 41]. Metoda nie wymaga specjalistycznego oprzyrządowania, co znacząco obniża zarówno koszt, jak i czas wykonania obiektu badań.

Jak każda z metod, posiada ona ograniczenia. W przypadku badań modelowych należy brać pod uwagę implikacje wynikające z techniki tworzenia obiektu. Struktury te składają się bowiem z warstw o ukierunkowanych właściwościach, które zależą od wybranej trajektorii ruchu ekstrudera, czyli głowicy zawierającej dyszę przeciskającą materiał. W rezultacie każda warstwa, z której składa się model, może mieć cechy zbliżone do ciała ortotropowego [30, 39]. Podobnie jak w przypadku kompozytów zbrojonych włóknami, otrzymuje się zatem konstrukcję o programowanych właściwościach fizycznych.

Budowa adekwatnego modelu numerycznego struktury wytworzonej w technologii druku 3D wymaga więc przeprowadzenia badań materiałowych w celu określenia podstawowych stałych fizycznych warunkujących możliwość wykorzystania wybranego równania konstytutywnego.

W celu przeprowadzenia badań z materiału PLA autor wykonał próbki zgodne z normą ASTM D638-14 typu I [4] o grubości 3,2 mm i szerokości 13 mm mierzonej w części pomiarowej. W trakcie badań materiałowych

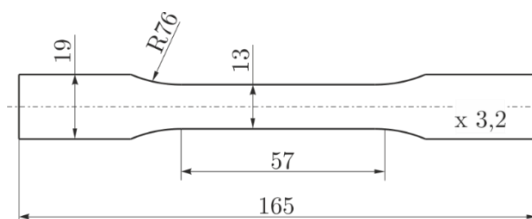
---

<sup>1</sup> ABS – terpolimer akrylonitrylo-butadieno-styrenowy (ang. *Acrylonitrile Butadiene Styrene*).

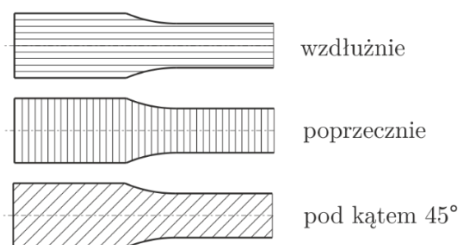
<sup>2</sup> PLA – polilaktyd (ang. *PolyLactic Acid*).



wykorzystano metodykę stosowaną w przypadku wyznaczania stałych dla kompozytów wzmacnianych włóknami [30, 92]. W celu określenia wpływu ukierunkowania parametrów druku na właściwości fizyczne, próbki wykonano bez obwodów usztywniających (perymetrów) oraz ze stałym kierunkiem wypełnienia: w kierunku wzdłużnym, poprzecznym oraz pod kątem  $\pm 45^\circ$  w stosunku do długości próbki (rys. 5.107). Do druku wykorzystano dyszę o średnicy 0,4 mm. Grubość każdej warstwy wynosiła 0,1 mm. Wydrukowano po 10 próbek dla każdej z konfiguracji.

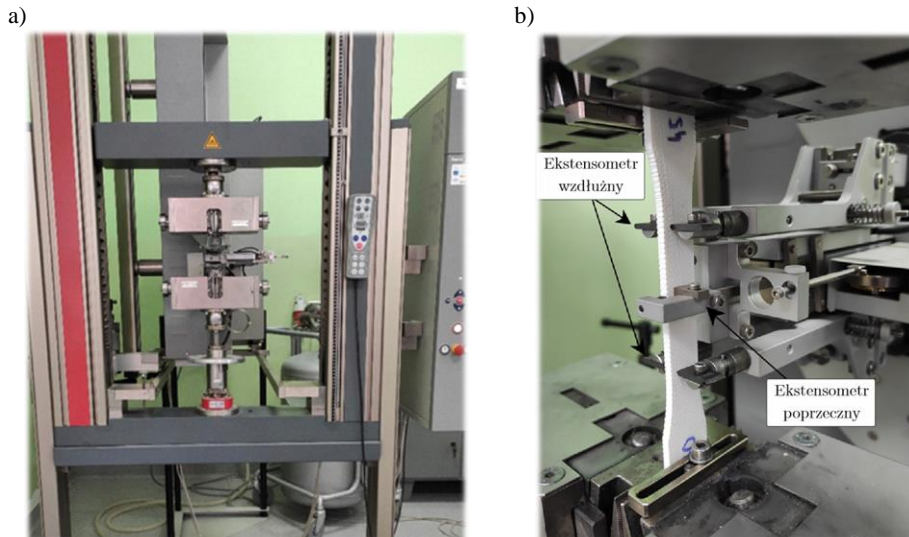


Kierunek druku w stosunku do długości próbki



Rys. 5.107. Wymiary i sposób drukowania próbek do badań materiałowych

Badania przeprowadzono z wykorzystaniem maszyny wytrzymałościowej Zwick Roell Z030, wyposażonej w układ ekstensometrów umożliwiający pomiar wydłużenia w kierunku wzdłużnym i poprzecznym próbki (rys. 5.108). W wyniku badań wyznaczono stałe materiałowe oraz naprężenie graniczne, których wartości zestawiono w tab. 5.5. Stosunkowo niewielka różnica pomiędzy modułem sprężystości wzdłużnej  $E_1$  a modułem sprężystości poprzecznej  $E_2$  wynika z faktu, że mimo pozornej ortotropowości struktury wynikającej ze sposobu układania włókien filamentu roztopiony materiał spaja się z sąsiadującymi włóknami.



Rys. 5.108. Stanowisko badawcze do badań materiałowych: a) maszyna wytrzymałościowa, b) dwukierunkowy ekstensometr służący do pomiaru odkształcenia próbki

Tabela 5.5. Nominalne właściwości mechaniczne materiału PLA

Moduł $E_1$ [GPa]	Moduł $E_2$ [GPa]	Współczynnik $\nu_{12}$ [-]	Moduł $G_{12}$ [GPa]	$Rm_1$ [MPa]	$Rm_2$ [MPa]
$3,52 \pm 5\%$	$3,11 \pm 4\%$	$0,33 \pm 2\%$	$1,73 \pm 6\%$	$58 \pm 4\%$	$18 \pm 10\%$

Wyniki przeprowadzonych przez autora badań materiałowych dla PLA cechują się dobrą zgodnością z rezultatami publikowanymi w pracach innych autorów [15, 107, 158].

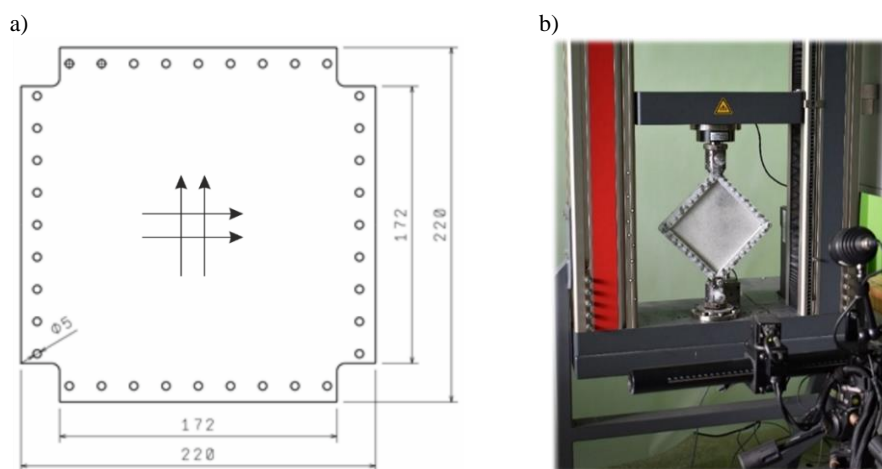
Należy jednak podkreślić, że właściwości wytrzymałościowe elementów wytwarzanych w technologii druku przestrzennego mogą być znacząco zróżnicowane w zależności od przyjętych parametrów druku, temperatury ekstruzji i grubości nakładanej warstwy materiału.

#### 5.4.2. Badania płyt poddanych ścinaniu

Na podstawie wykonanych badań materiałowych autor podjął próbę przeprowadzenia badań doświadczalnych struktury płaskiej wykonanej w technologii druku 3D. W tym celu wykonał model płyty z identycznego materiału jak ten zastosowany w trakcie sporządzania próbek, z wykorzy-

staniem identycznych parametrów druku. Płyta o grubości 2 mm oraz wymiarach obszaru badawczego 172 x 172 mm składała się z dwudziestu warstw, których kierunkowość zmieniała się naprzemiennie o dziewięćdziesiąt stopni (rys. 5.109a).

Płyte umieszczono w duraluminiowej ramce tworzącej czworobok przegubowy. Sposób zamocowania umożliwił przyłożenie obciążenia w postaci siły skupionej w jednym z węzłów ramki. Reakcje elementów ramki stanowiły obciążenie płyty w postaci wydatku stycznego, powodując wystąpienie w płycie stanu czystego ścinania (rys. 5.109b). W trakcie badania zakładano stały przyrost siły o wielkości 100 N/s, do uzyskania obciążenia równego 4 kN, co odpowiadało wydatkowi stycznemu na poziomie 16,49 N/mm. Następnie płytę odciążano z identycznym gradientem siły. Do pomiarów deformacji płyty wykorzystano skaner optyczny, którego zasada działania opierała się na metodzie cyfrowej korelacji obrazu.



Rys. 5.109. Płyta przeznaczona do badań: a) wymiary oraz sposób druku, b) stanowisko do badań eksperymentalnych

Równolegle opracowano model numeryczny płyty w ujęciu MES. Wyniki otrzymane w wyniku badań materiałowych umożliwiły uściślenie związku konstytutywnego, zgodnie z równaniem (2.43), dla ustroju ortotropowego. W ocenie wyników skupiono się na właściwościach makrostrukturalnych, uznając je za wystarczające w rozważanym przypadku. W litera-

turze można również znaleźć prace poświęcone analizie wpływu mikrostruktury wydruku na właściwości mechaniczne [124].

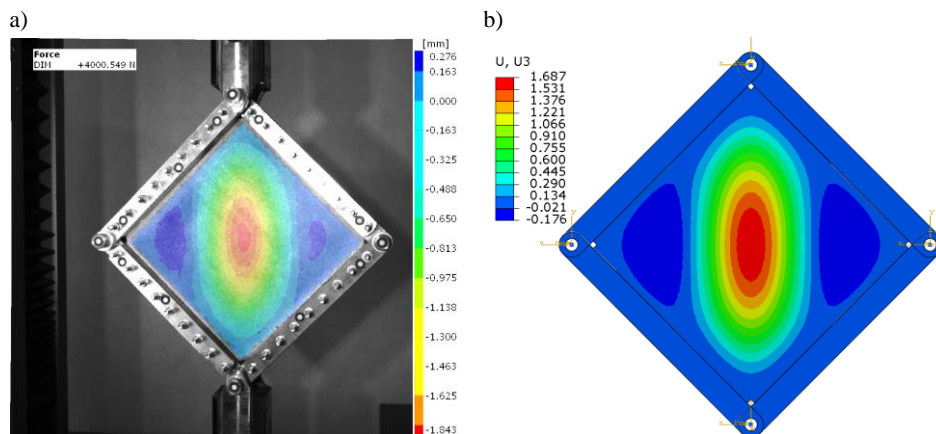
Model numeryczny odtwarzał sztywność struktury zastosowanej w trakcie badań eksperymentalnych. Składał się z płyty oraz czterech elementów ramy połączonych w węzłach tworzących równoległobok przegubowy. Wszystkie elementy modelowano jako powierzchnie, którym przyporządkowano odpowiednie grubości. W górnym węźle ramy przyłożono siłę skupioną. Przyjęto warunki brzegowe odpowiadające podporze przesuwnej, pozostawiając możliwość przemieszczania się na kierunku pionowej przekątnej płyty i swobodny obrót względem osi przechodzącej przez otwór w ramie. W węźle dolnym pozostawiono jedynie swobodny obrót względem osi przechodzącej przez otwór w ramie.

Analizy numeryczne podzielono na dwa etapy. W pierwszej kolejności przeprowadzono obliczenia z wykorzystaniem procedur dla wyboczenia liniowego, w celu wyznaczenia postaci utraty stateczności, która po odpowiednim przeskalowaniu została przyjęta jako wstępna imperfekcja geometryczna w kolejnym etapie obliczeń. Analizy nieliniowe, uwzględniające skończone deformacje, rozwiązywano z zastosowaniem zmodyfikowanej metody Newtona-Raphsona. Maksymalną wartość obciążenia przyjęto, podobnie jak w trakcie badań eksperymentalnych, na poziomie  $P_{max} = 4$  kN. Do sterowania rozwiązaniem przyjęto następujące parametry:

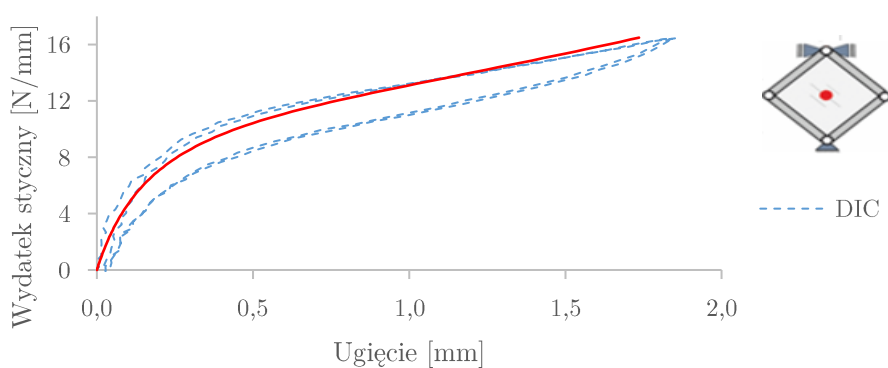
- pierwszy przyrost obciążenia  $10^{-3} P_{max}$ ,
- najmniejszy dozwolony przyrost  $10^{-6} P_{max}$ ,
- największy dozwolony przyrost  $10^{-2} P_{max}$ .

Rozwiązanie otrzymano po 105 przyrostach obciążenia.

Przemieszczenia punktów powierzchni płyty związane z utratą stateczności i postępującą deformacją pokrytyczną uwidoczniły się w postaci trzech półfal, z dominującą półfalą na przekątnej płyty. Podobny wynik zaobserwowano zarówno w trakcie badań eksperymentalnych, jak i obliczeń numerycznych (rys. 5.110). Maksymalną wartość ugięcia zarejestrowano w środku geometrycznym płyty, w miejscu przecięcia przekątnych (rys. 5.111). W przypadku badań eksperymentalnych wartość ta wyniosła 1,84 mm, natomiast wynik analizy modelu MES wskazał na ekstremalne ugięcie o wartości 1,69 mm, co świadczy o wzroście sztywności prostopadłej do płaszczyzny o około 8%.



Rys. 5.110. Powierzchnia ugięcia przy maksymalnym obciążeniu (16,49 N/mm):  
a) wynik eksperymentalny, b) wynik obliczeń numerycznych MES

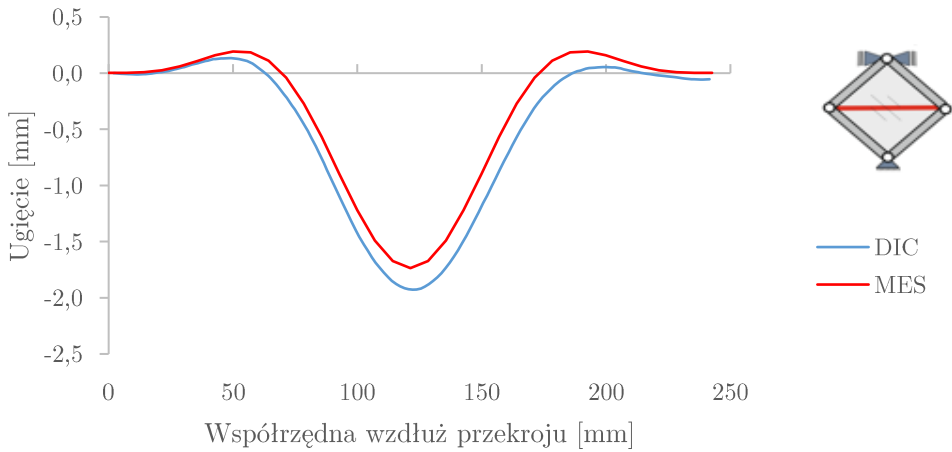


Rys. 5.111. Porównanie ścieżek równowagi dla punktu środkowego płyty drukowanej uzyskanych w badaniach doświadczalnych i analizach numerycznych

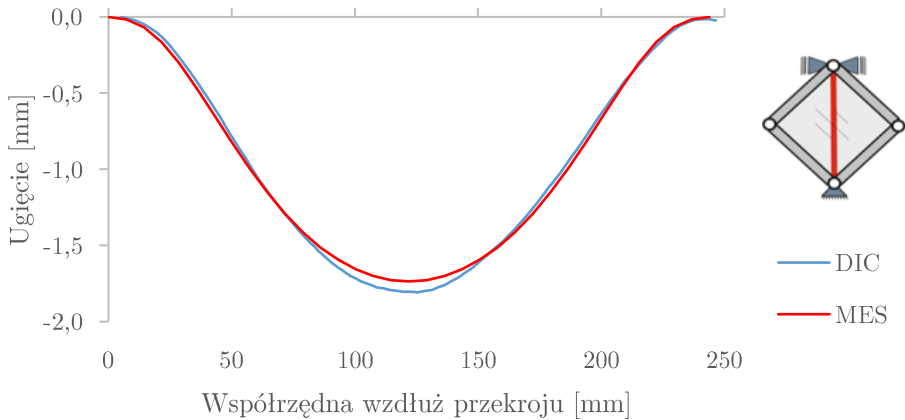
Podobne rezultaty, w postaci większej sztywności modelu numerycznego, można zaobserwować, przeprowadzając analizę ugięcia głównych przekątnych płyty (rys. 5.112 i 5.113). W celu porównania sztywności w płaszczyźnie płyty mierzono również zmianę długości przekątnej pomiędzy jej skrajnymi punktami na kierunku pionowym (rys. 5.114).

Zadowolająca zgodność deformacji płyty badanej eksperymentalnie i obliczeń numerycznych MES stanowiła dowód poprawności przyjętego sposobu modelowania i założonego prawa fizycznego. Można zatem uznać, że traktowanie struktury powstałej w technologii druku przestrzennego jako

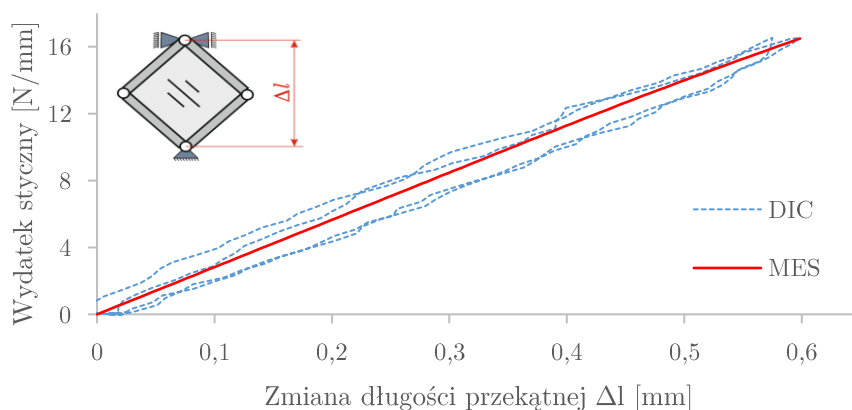
konstrukcji warstwowej o ortotropowych właściwościach jest wystarczające do numerycznego odwzorowania zachowania się układu w warunkach statycznych zaawansowanych deformacji.



Rys. 5.112. Ugięcie przekroju poprowadzonego wzdłuż poziomej przekątnej płyty drukowanej poddanej działaniu maksymalnego obciążenia



Rys. 5.113. Ugięcie przekroju poprowadzonego wzdłuż pionowej przekątnej płyty drukowanej poddanej działaniu maksymalnego obciążenia



Rys. 5.114. Porównanie zmiany odległości pomiędzy węzłami ramy obciążającej dla płyty drukowanej

### 5.4.3. Badania wielosegmentowych ustrojów nośnych poddanych skręcaniu

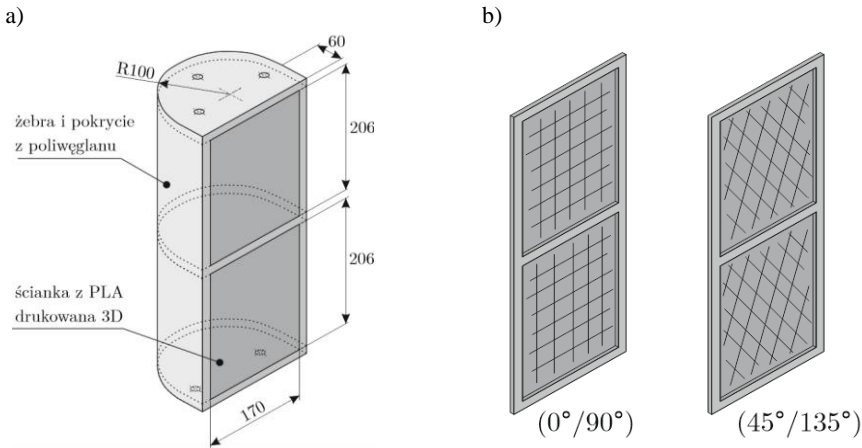
W kolejnym etapie badań analizie poddano cienkościenną strukturę przestrzenną obciążoną w sposób wywołujący skręcanie nieswobodne. W tym celu wykonano uproszczony model jednoobwodowego kesonu skrzydła składający się z powłokowego pokrycia, poprzecznych żeber oraz ścianki zamykającej (rys. 5.115a). Żebra brzegowe posłużyły jako punkty zamocowania i wprowadzania obciążenia, natomiast żebro środkowe dzieliło strukturę na dwa identyczne segmenty. Płaskie, drukowane elementy stanowiły ścianki dźwigara.

Żebra oraz pokrycie w części powłokowej struktury wykonano z poliwęglanu, którego właściwości są izotropowe, natomiast moduł Younga wynoszący około 2,4 GPa jest rzędu stałych wyznaczonych dla struktur drukowanych.

Płaską ściankę wykonano w technologii druku przestrzennego w postaci cienkiej płyty z integralnymi wzmocnieniami (strefy o większej grubości) w obszarach zamierzonych lokalizacji połączeń śrubowych.

Wykonano dwie wersje drukowanego modelu ścianki z różnymi kierunkami druku. Obszary badawcze o mniejszej grubości (1 mm) w obu przypadkach wykonano z naprzemiennie kładzionych warstw o wzajemnie prostopadłych kierunkach nakładania materiału. W pierwszym modelu

kierunki te odpowiadały kierunkom krawędzi ścian ( $0^\circ/90^\circ$ ), a w drugim modelu były zorientowane względem nich pod kątem  $45^\circ$  (rys. 115b). Ściankę wytwarzano z wykorzystaniem dyszy o średnicy 0,4 mm, nakładając warstwy o stałej grubości wynoszącej 0,1 mm.

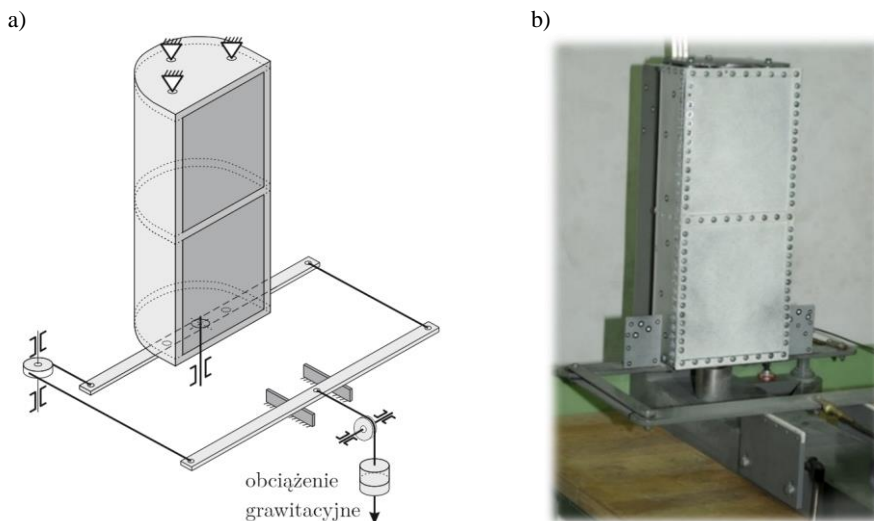


Rys. 5.115. Schemat kesonu (a) oraz kierunki drukowania dla dwóch wersji modelu ścianki (b)

Modele mocowano na stanowisku badawczym, zapewniając możliwość obciążenia w postaci skręcania. Górne żebro modelu zostało przymocowane do ramy stojaka za pomocą trzech śrub. W ramie dolnej jako łożysko zastosowano pojedynczą śrubę w osi obrotu. Obciążenie przeprowadzono metodą grawitacyjną, a układ obciążający umożliwił zmianę punktowo przykładanego obciążenia na moment skręcający działający na badaną strukturę (rys. 5.116).

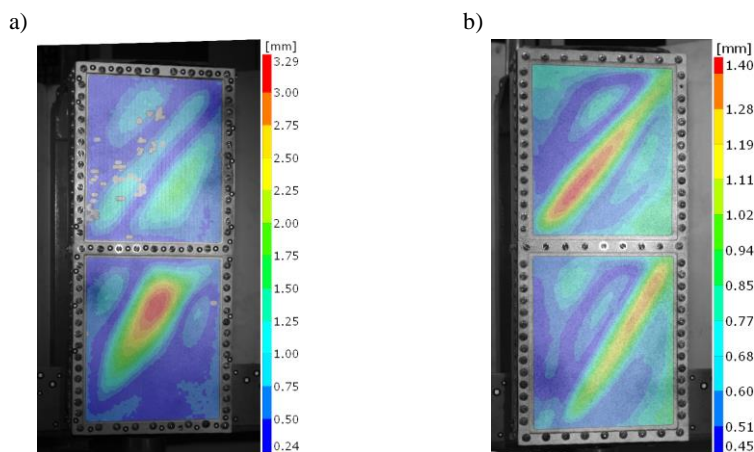
Pomiary przemieszczeń przeprowadzono przy użyciu skanera optycznego pracującego z zastosowaniem metody cyfrowej korelacji obrazu. Eksperyment realizowano w 23 etapach obciążenia, rozpoczynając od rejestracji położenia punktów powierzchni modelu w etapie referencyjnym (bez obciążenia). Obciążenie zwiększano w 11 etapach, do uzyskania momentu skręcającego o wartości 75,3 Nm, po czym model odciążono etapowo w odwrotnej kolejności.





Rys. 5.116. Schemat obciążenia (a) oraz fotografia stanowiska badawczego (b)

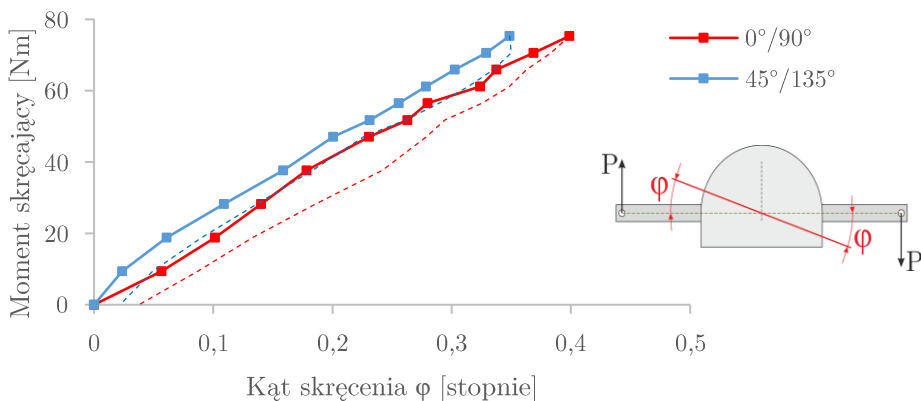
W obu przypadkach modeli na ścianach dźwigarów utworzyły się ukosne półfale ugięcia, dowodzące utraty stateczności (rys. 5.117). Ta forma deformacji pokrywyczej wynika z charakteru współpracy poszczególnych elementów kesonu. Moment skręcający powoduje wystąpienie w obszarze ścianek naprężenia stycznego, zbliżonego do stanu czystego ścinania. Ścianki jako elementy o najmniejszej sztywności tracą stateczność w pierwszej kolejności.



Rys. 5.117. Wypadkowa deformacja ścianek kesonu przy maksymalnym obciążeniu:  
a) model o układzie warstw  $0^\circ/90^\circ$ , b) model o układzie warstw  $45^\circ/135^\circ$

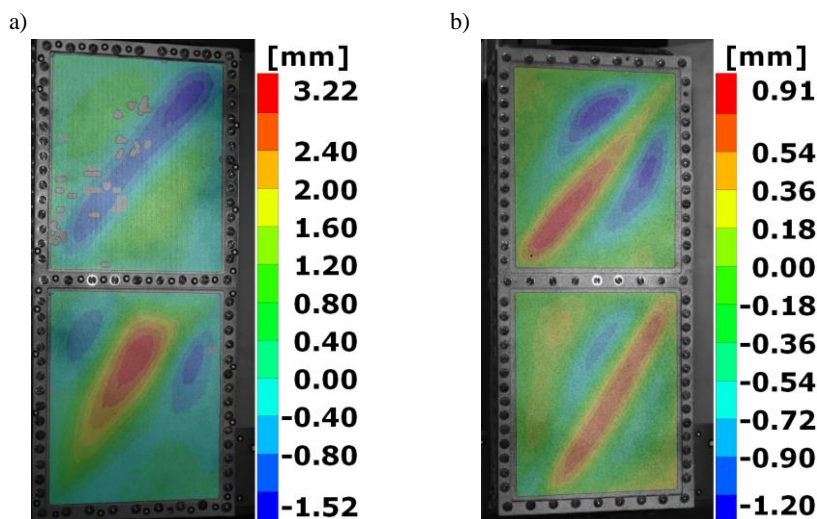
Analizując rozkład ugięcia powierzchni ścianek w modelu o kierunku drukowania warstw  $0^\circ/90^\circ$ , można zaobserwować odmienne zachowanie ścianki górnego i dolnego segmentu (rys. 5.117a). W przypadku modelu o kierunkowości druku  $45^\circ/135^\circ$  różnica ta jest mniej widoczna (rys. 5.117b). Fakt ten można wytłumaczyć niedoskonałościami konstrukcji modelu i stanowiska eksperymentalnego. W wyniku kasowania luzu w połączeniach śrubowych podczas próbnego obciążania modeli pojawiło się naprężenie wstępne, w wyniku którego rozkłady naprężenia stycznego odbiegały od rozkładu idealnego wynikającego ze statyki układu.

W trakcie badań eksperymentalnych, poza obserwacją pola deformacji powierzchni ścianek, dokonano również rejestracji zmian kąta skręcenia (rys. 5.118). Zależność ta może stanowić podstawę sporządzenia ścieżki równowagi, która obrazuje zarówno zmiany w sztywności całej konstrukcji, jak również dowodzi zaistnienia globalnej utraty stateczności. W rozważanych przypadkach zależności te w całym zakresie realizowanego obciążenia pozostają liniowe, co świadczy o tym, że pomimo wyboczenia ścianek konstrukcja jako całość zachowuje stateczność. Analiza przebiegu zmian kąta skręcenia wskazuje również, że model o kierunkowości druku  $0^\circ/90^\circ$  cechował się mniejszą sztywnością skrętną niż model o kierunkach druku  $45^\circ/135^\circ$ . W modelu  $45^\circ/135^\circ$  kierunek układania włókien pokrywał się z kierunkiem działania naprężenia głównego.



Rys. 5.118. Zmiana kąta skręcenia w funkcji obciążenia dla kesonu o drukowanej przestrzennie ściance zamykającej

Na rysunku 5.119 przedstawiono rozkład ugięcia powierzchni ścianek dla etapu maksymalnego obciążenia w lokalnym układzie odniesienia podążającym za deformacją, dla którego skrócenie konstrukcji jest ruchem bryły sztywnej.

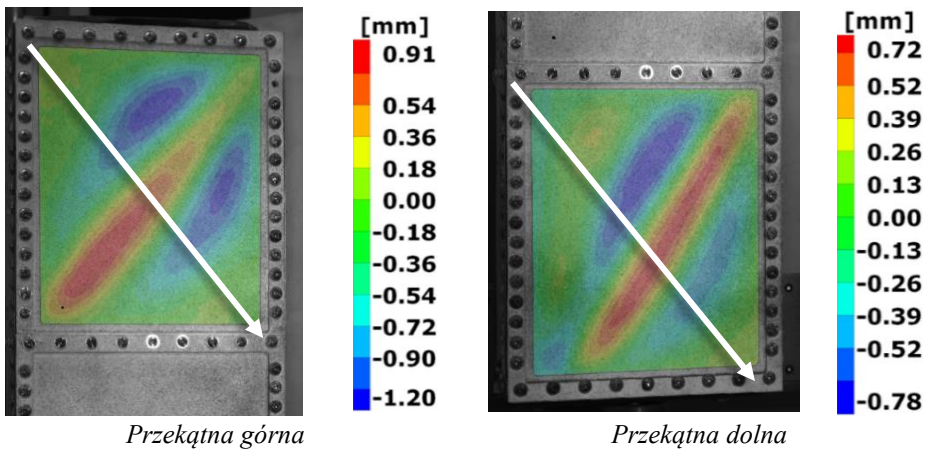
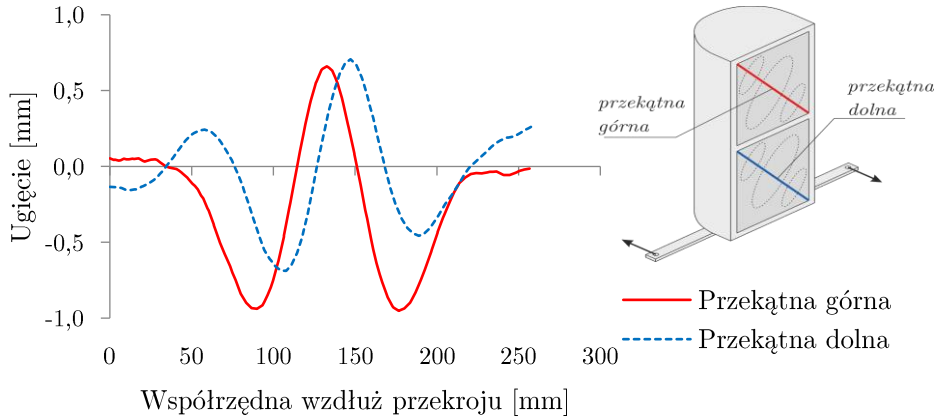


Rys. 5.119. Składowa deformacji normalna do płaszczyzny ścianki dla maksymalnego obciążenia: a) model o układzie warstw  $0^\circ/90^\circ$ , b) model o układzie warstw  $45^\circ/135^\circ$

Na rysunkach 5.120 i 5.121 przedstawiono przyrost ugięcia powierzchni ścianek wzdłuż głównych przekątnych segmentu górnego i dolnego, dla obydwu rozpatrywanych modeli, przy maksymalnym obciążeniu realizowanym w trakcie badań eksperymentalnych. W celu bardziej szczegółowego zobrazowania ugięcia powierzchni, poza wykresami wzdłuż długości przekroju pokazano również wyizolowane rozkłady deformacji dla każdej ze ścianek. Długość przekroju liczono od górnego lewego punktu przekroju w kierunku prawego dolnego punktu.

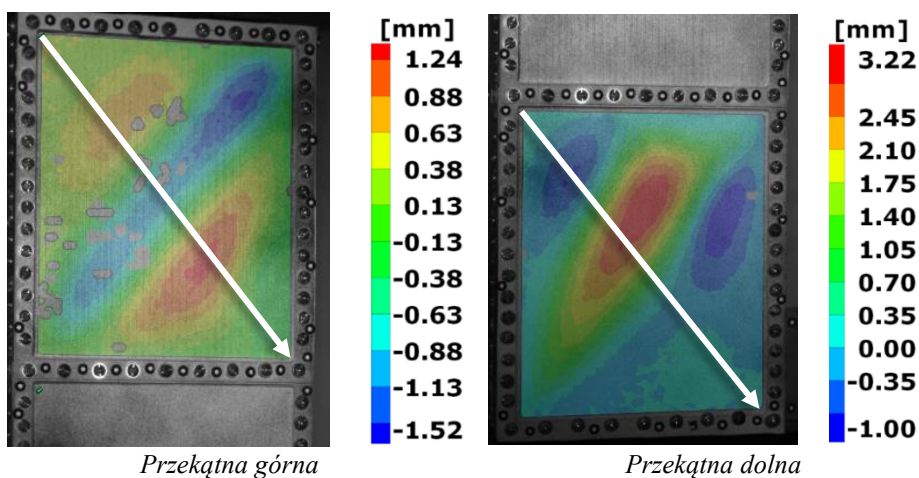
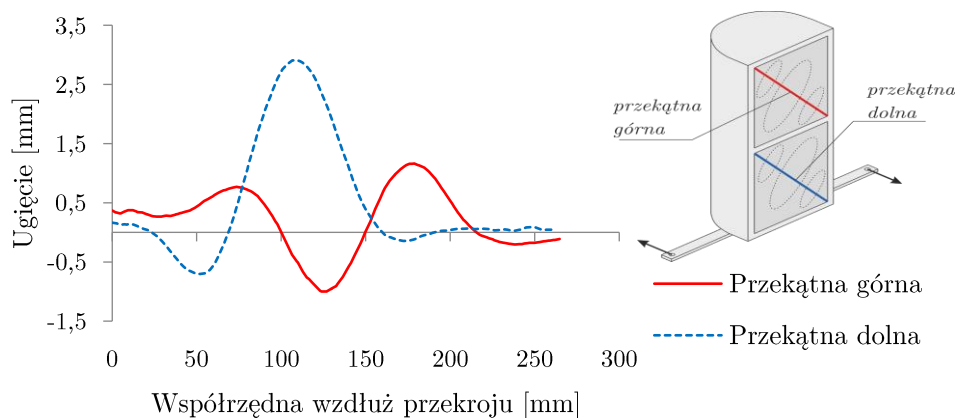
Analizując ugięcie, można zauważyć, że w przypadku modelu o kierunkach druku  $45^\circ/135^\circ$ , na ściance górnej pojawiły się trzy półfale deformacji o podobnych wartościach. W przypadku centralnej półfali maksymalna wartość ugięcia pojawiła się w okolicach dolnego, lewego naroża ścianki, natomiast w przypadku symetrycznie rozłożonych półfal o przeciwnym kierunku ugięcia punkty ekstremalnych wartości wystąpiły bliżej przeciwnego naroża. Ścianka dolna tego modelu doznała utraty stateczności

w formie czterech półfal, a ich kierunek nie pokrywał się z przekątną, co miało miejsce w przypadku deformacji ścianki górnej.



Rys. 5.120. Ugięcie powierzchni ścianki wzdłuż przekątnych segmentu górnego i dolnego dla modelu o układzie warstw  $45^\circ/135^\circ$  w warunkach działania maksymalnego obciążenia

Odmienne zachowanie zaobserwowano w przypadku modelu, którego warstwy były drukowane naprzemiennie pod kątami  $0^\circ$  i  $90^\circ$  w stosunku do brzegów ścianek (rys. 5.121). W tym przypadku ścianka dolna doznała wyboczenia w postaci trzech półfal o wyraźnie dominującej strefie w środkowym obszarze płyty. Ścianka górna po osiągnięciu obciążenia krytycznego zachowała się podobnie jak w przypadku modelu  $45^\circ/135^\circ$ , ale kierunki ugięcia półfal były odwrotne, tzn. półfala na głównej przekątnej ugięła się do wnętrza modelu.



Rys. 5.121. Ugięcie powierzchni ścianki wzdłuż przekątnych segmentu górnego i dolnego dla modelu o układzie warstw  $0^\circ/90^\circ$  w warunkach działania maksymalnego obciążenia

Przeprowadzone badania modeli wykonanych w technologii druku przestrzennego potwierdzają ewidentną przydatność, stwarzającą możliwość poszerzenia i doskonalenia tego rodzaju metod. Realizacja szybkiego i taniego eksperymentu może pozwolić na eliminację wielu problemów konstrukcyjnych wymagających niezwłocznych decyzji, w szczególności gdy projektowanie obejmuje ustroje o złożonej geometrii.



## **6. STOSOWANIE OPTYCZNYCH METOD POMIAROWYCH DO BADAŃ KONSTRUKCJI LOTNICZYCH**

### **6.1. Wprowadzenie**

Podjęmowanie działalności wytwórczej statku powietrznego jest poprzedzane licznymi analizami dokumentującymi mocne strony projektowanego obiektu. Problemami o znaczeniu pierwszorzędym są z natury rzeczy zagadnienia trwałości i niezawodności. Finalna czynność, jaką stanowi certyfikacja, jest rezultatem liczących badań. Do kategorii obligatoryjnych, o podstawowym znaczeniu należą badania statyczne i zmęczeniowe, na podstawie których są wyznaczane: bezpieczny czas życia struktury, okresy międzyremontowe oraz czasookresy eksploatacji elementów podlegających wymianie.

Czynny udział autora w realizacji wielu powierzanych zadań z kategorii badań dowodowych (łącznie z kierowaniem badaniami) stanowił podstawę liczących spostrzeżeń odnoszących się do ich realizacji.

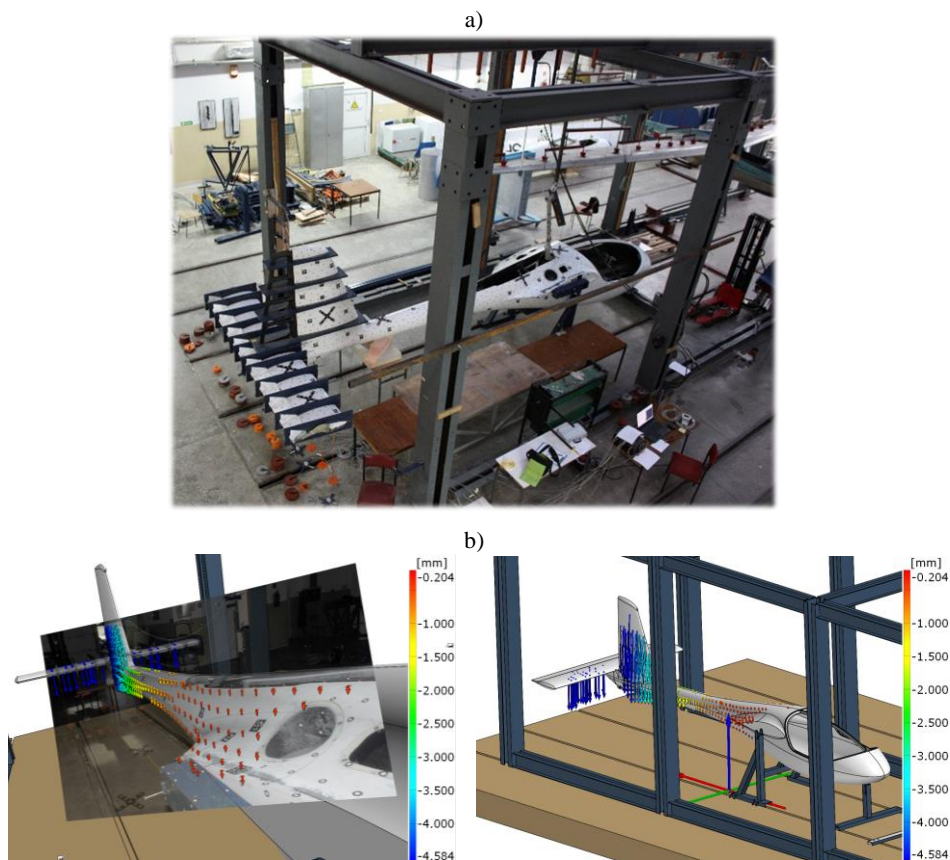
Na różnych etapach awansowania rozległych czynności badawczych projektowanego statku powietrznego coraz szerzej są stosowane optyczne systemy pomiarowe. Uzyskiwane wyniki dostarczają cennych informacji, stanowiąc podstawę oceny jakości modeli numerycznych i poziomu wykonawstwa.

W przypadku projektowania rozległych struktur analizy z wykorzystaniem algorytmów komputerowych stają się problematyczne ze względu na stopień skomplikowania rozważanych konstrukcji. Dodatkowo pojawiają się trudności związane z aspektami technologicznymi. Przykładowo, w strukturach wykonanych z kompozytów zbrojonych włóknami odtworzenie sztywności konstrukcji staje się kłopotliwe nie tylko ze względu na rozrzut właściwości materiałowych, ale również z uwagi na problemy technologiczne, obejmujące między innymi konieczność odwzorowania połączeń klejonych, których jakość zależy od umiejętności wykonawcy.

## 6.2. Przykłady

### 6.2.1. Przykład badania tylnej części kadłuba motoszybowca

Realizację statycznych badań doświadczalnych motoszybowca AOS-H2 [133, 143] autor przygotował i realizował, opierając się między innymi na metodach optycznych. Fotografia (rys. 6.1a) przedstawia stanowisko badawcze przygotowane do realizacji jednego z analizowanych przypadków. Cel badań stanowiło wykazanie spełniania wymaganych warunków sztywności i wytrzymałości tylnej części kadłuba z usterzeniem wysokości oraz prawidłowego funkcjonowania steru wysokości dla przypadku brutalnego sterowania. Rysunek 6.1b przedstawia wektory przemieszczenia punktów



Rys. 6.1. Widok ogólny na stanowisko badawcze do realizacji prób tylnej części kadłuba i usterzenia (a) oraz przemieszczenia wybranych punktów struktury kadłuba w trakcie próby na tle wykonanych fotografii i modelu CAD stanowiska badawczego (b)



zaznaczonych na konstrukcji w trakcie próby, uzyskane z pomiarów przy użyciu aparatury badawczej opartej na metodzie cyfrowej korelacji obrazu oraz metodzie fotogrametrycznej. Zastosowanie systemów tego rodzaju umożliwiło uściślenie położenia dużej liczby punktów pomiarowych, a w konsekwencji szczegółowe zapoznanie się z charakterem deformacji rozległej konstrukcji. Należy wspomnieć, że w przypadku stosowania klasycznych metod pomiarowych (teodolity, potencjometry linkowe) pozyskanie tak dużej ilości informacji byłoby skomplikowane i czasochłonne, a w wielu przypadkach wręcz niemożliwe.

### **6.2.2. Badania zmęczeniowe kompozytowego dźwigara skrzydła motoszybowca**

W ramach realizacji programu badań motoszybowców AOS-71<sup>3</sup> i AOS-H2<sup>4</sup> przeprowadzono badania zmęczeniowe newralgicznego elementu konstrukcji, jaki stanowił dźwigar skrzydła. Po ukończeniu programu badań zmęczeniowych przeprowadzono próbę wytrzymałości resztkowej, która umożliwia określenie zapasu bezpieczeństwa konstrukcji po założonym okresie jej eksploatacji.

Zważywszy, że cechą kompozytów zbrojonych włóknami jest to, iż są one niewrażliwe na obciążenia zmienne o niskich wartościach, natomiast ich trwałość zmęczeniowa ulega znacznemu zmniejszeniu wskutek występowania pojedynczych obciążeń bliskich granicy wytrzymałości doraźnej [54], zdecydowano, by w miejsce kosztownych badań kompletnego szybowca podejmować wnikliwie, ekonomicznie uzasadnione badania trwałości zmęczeniowej wybranych stref newralgicznych struktury nośnej. Elementem tym okazał się dźwigar skrzydła łączony z kadłubem motoszybowca za pomocą okuć znajdujących się w części bagnetowej.

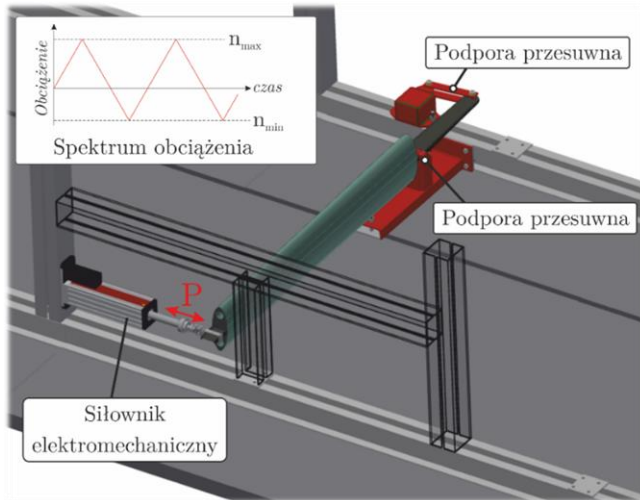
Podczas badań zmęczeniowych fragment dźwigara skrzydła o długości całkowitej 4500 mm i części bagnetowej pomiędzy okuciami wynoszącej 1010 mm umieszczono na specjalnie przygotowanym stanowisku badawczym, którego schemat przedstawia rys. 6.2. Realizację techniczną zaprezentowano na fotografiach (rys. 6.3). W trakcie badań konstrukcję

---

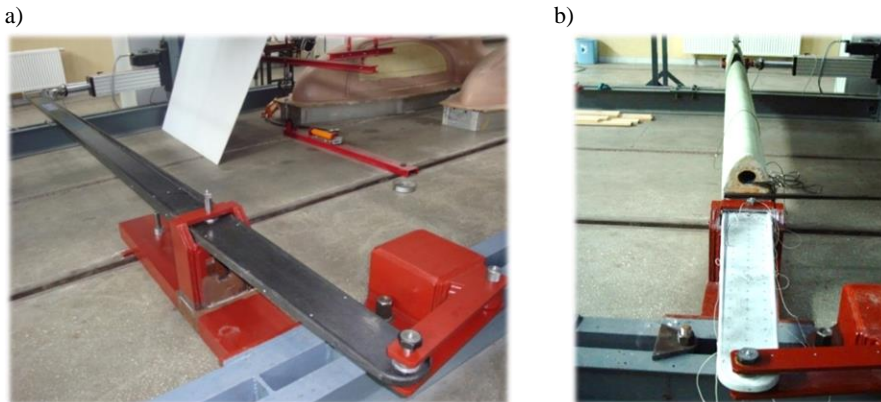
<sup>3</sup> Wielofunkcyjny dwumiejscowy motoszybowiec nowej generacji (KB/68/12823/IT1-B/U/08).

<sup>4</sup> Napęd hybrydowy wykorzystujący ogniwa paliwowe lekkiego statku powietrznego (PBS3/A6/24/2015).

obciążano przy użyciu siłownika elektromechanicznego Zwick-Roell, umożliwiającego sterowanie poziomem siły przykładanej do struktury.



Rys. 6.2. Schemat stanowiska badawczego (model CAD)



Rys. 6.3. Widok ogólny stanowiska do badań z zamocowanym dźwigarem

Monocykliczne spektrum obciążenia, któremu poddawana była struktura, cechowało się współczynnikiem asymetrii cyklu  $R = -0,65$ , co odpowiadało zmianom współczynnika obciążenia w zakresie od  $n_{max} = 5,7$  do  $n_{min} = -3,7$ . Przeprowadzony program prób obejmował 22 000 cykli obciążenia. Szczegółowe omówienie wyników badań zmęczyeniowych wraz

z zastosowaniem tensometrów światłowodowych do pomiaru zmian odkształcenia w newralgicznych obszarach bagnetu dźwigara opisano w pracy [95].

Badany dźwigar jest konstrukcją kompozytową, wykonaną jako belka dwuteowa (rys. 6.4). W tego rodzaju strukturach newralgiczny obszar stanowi część bagnetowa, łącząca skrzydło z kadłubem. Jej zadaniem jest zapewnienie poprawnego przenoszenia sił tnących i momentu gnącego ze skrzydła na kadłub.

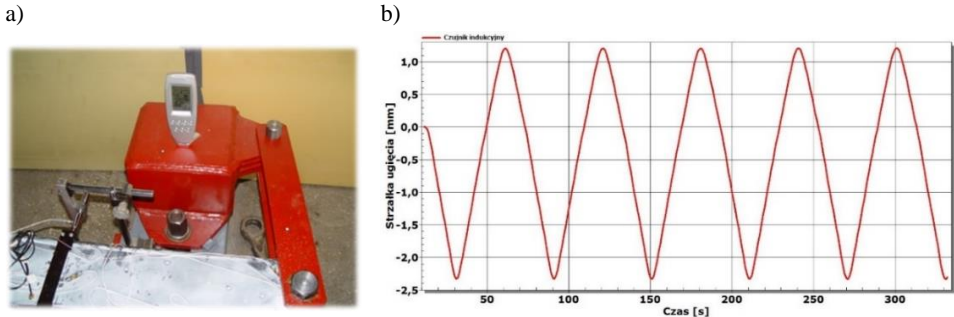


Rys. 6.4. Schemat struktury kompozytowego dźwigara (a) oraz konstrukcja zamka labiryntowego (b)

Część bagnetowa dźwigara stanowiła strukturę przekładkową o rdzeniu wykonanym z pianki poliuretanowej DIV-60 umieszczonej pomiędzy dwudziestoma sześcioma warstwami tkaniny węglowej SGL KDK 8042. W obszarach szczególnie obciążonych, zawierających okucia zastosowano odmiennie kierunkowanie warstw, tzw. dekoncentratory naprężenia. Całość przykryto warstwą licową tkaniny szklanej. Pasy dźwigara wykonano z węglowego kompozytu jednokierunkowego (rowingu) Torayca T700G. Ściankę części dźwigara znajdującą się wewnątrz skrzydła tworzyła struktura laminatowa z odpowiednio stopniowanej tkaniny i rowingu węglowego.

Uszkodzenia zmęczeniowe struktury mogły się objawiać między innymi przez odsztywnienie konstrukcji w trakcie eksploatacji. Łatwo mierzalnym parametrem świadczącym o zmianach sztywności struktury jest pomiar strzałki ugięcia części bagnetowej.

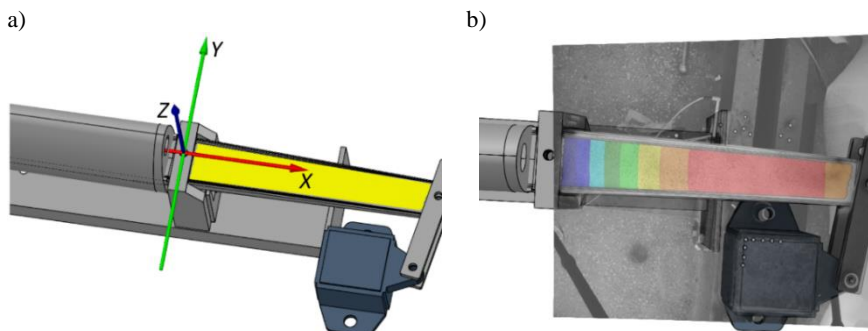
W trakcie próby zmęczeniowej wykonano pomiary strzałki ugięcia w połowie rozpiętości podpór bagnetu dźwigara za pomocą czujnika indukcyjnego (rys. 6.5a). Rejestracji dokonywano przy użyciu mostka tensometrycznego firmy HBM typu Spider 8. Wielkości ugięć rejestrowane za pomocą czujnika indukcyjnego zawierały się w przedziale od  $-2,35$  mm dla obciążenia  $n = 5,7$  do  $1,3$  mm dla obciążenia  $n = -3,7$  (rys. 6.5b).



Rys. 6.5. Zamocowanie czujnika indukcyjnego (a) oraz przykładowe przebiegi wielkości ugięć bagnetu dźwigara (b)

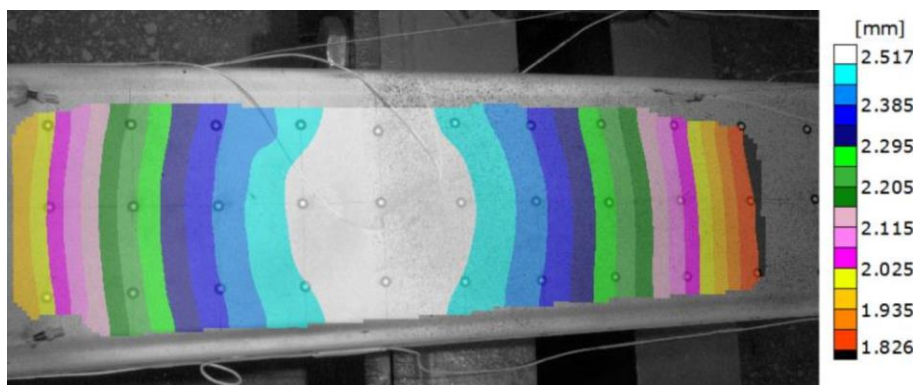
W trakcie badań rejestrowano również pole deformacji powierzchni części bagnetowej za pomocą skanera optycznego, którego działanie opiera się na metodzie cyfrowej korelacji obrazu. Dostępne pole pomiarowe umożliwiło rejestrację pola przemieszczeń powierzchni bagnetu na długości około jednego metra. Kamery systemu pomiarowego umieszczono w sposób umożliwiający obserwację środkowej części badanego obszaru, co skutkowało pominięciem obszaru okuc dźwigara (rys. 6.6). Rysunki 6.7 i 6.8 prezentują składowe przemieszczenia bagnetowej części dźwigara zarejestrowane w momencie wystąpienia maksymalnego, dodatniego obciążenia w trakcie badań zmęczeniowych.

Badania doświadczalne uzupełniono analizami numerycznymi w ujęciu MES, co umożliwiło konfrontację wyników obliczeń z rezultatami badań z zastosowaniem skanera DIC. Obliczenia zostały przeprowadzone przy użyciu programu MSC Nastran, wykorzystującego procedury liniowej analizy statycznej.

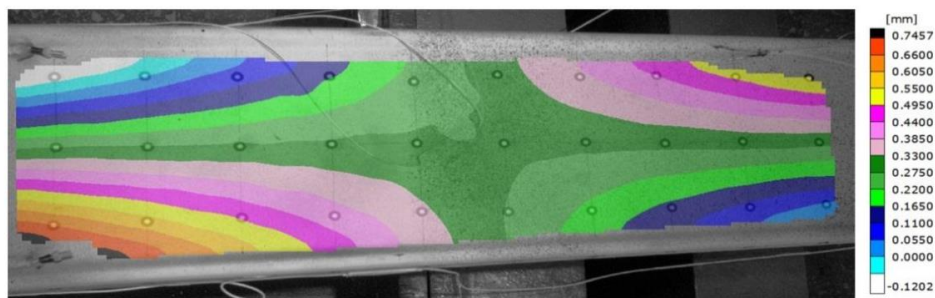


Rys. 6.6. Obszar bagnetu poddany rejestracji skanerem DIC:

a) przyjęty układ współrzędnych na tle modelu CAD stanowiska, b) dopasowanie obrazu z kamer cyfrowych na tle fotografii stanowiska badawczego i modelu CAD

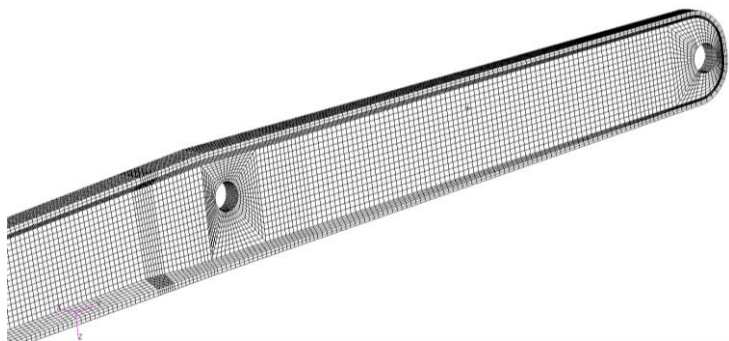


Rys. 6.7. Rozkład ugięcia powierzchni (składowa normalna do długości w płaszczyźnie dźwigara) części bagnetowej dźwigara zarejestrowanego dla maksymalnej wartości obciążenia realizowanego w trakcie badań zmęczeniowych



Rys. 6.8. Pole deformacji (składowa wzdłuż rozpiętości) części bagnetowej dźwigara zarejestrowane dla maksymalnej wartości obciążenia realizowanego w trakcie badań zmęczeniowych

Na podstawie szczegółowej geometrii stworzono uproszczony model bryłowo-powierzchniowy dźwigara (rys. 6.9), który posłużył do przeprowadzenia obliczeń. Ze względu na konstrukcję dźwigara (skos oraz wznios) zdecydowano się na odtworzenie całego badanego fragmentu, co wyeliminowało konieczność wprowadzania obciążeń jako sił wewnętrznych. Sposób zamocowania oraz obciążenia odpowiadał warunkom eksperymentalnym.

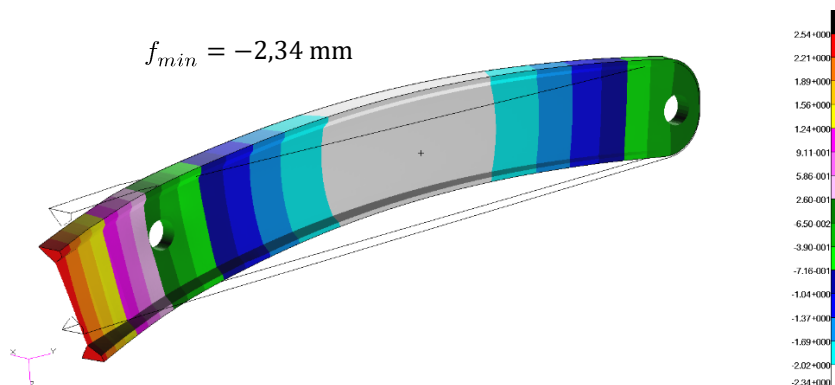


Rys. 6.9. Fragment siatki modelu MES w obszarze bagnetu badanego dźwigara

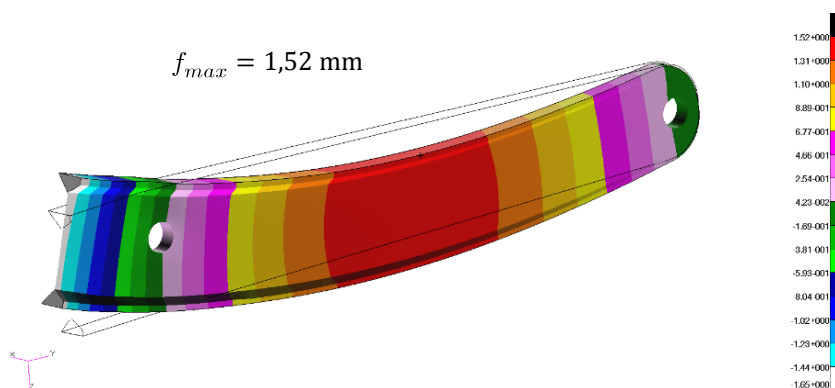
Model zbudowano zarówno z elementów 1D, 2D, jak i 3D. Pasy dźwigara oraz piankową część bagnetu dyskretyzowano z wykorzystaniem osmiowęzłowych elementów bryłowych. Tkaninę węglową okalającą rdzeń bagnetu oraz pozostałą część ścianki modelowano czterowęzłowymi elementami powłokowymi. W celu uniknięcia kłopotliwego zjawiska kontaktowego stalowe okucia zastąpiono sztywnymi elementami 1D. Wszystkim użytym elementom przyporządkowano właściwości mechaniczne odpowiadające rzeczywistym materiałom.

Obciążenie, podobnie jak w czasie eksperymentu, zrealizowano przez przyłożenie siły tnącej do ścianki dźwigara. Przeprowadzono dwie serie analiz, obciążając dźwigar siłami odpowiadającymi współczynnikowi obciążenia  $n = 5,7$  oraz  $n = -3,7$ .

Rezultaty analiz numerycznych w postaci pola ugięcia dla obydwu przypadków obciążenia zaprezentowano na rys. 6.10 i 6.11. Niemal identyczne wyniki otrzymano, przeprowadzając badania doświadczalne.



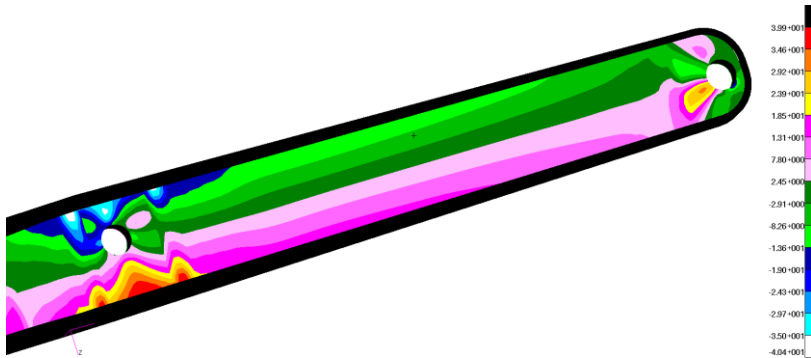
Rys. 6.10. Ugięcie bagnetu [mm]. Wynik analizy MES. Obciążenie  $n = 5,7$



Rys. 6.11. Ugięcie bagnetu [mm]. Wynik analizy MES. Obciążenie  $n = -3,7$

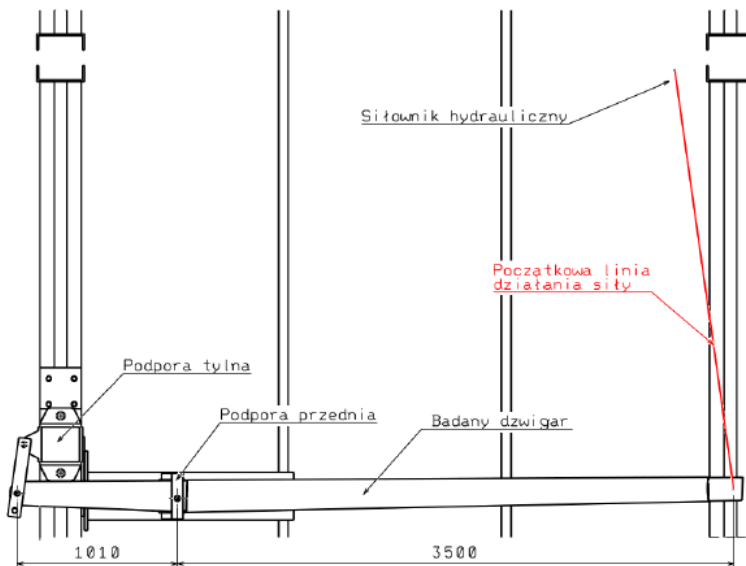
Zważywszy na fakt, że uzyskano zadowalającą zbieżność pomiędzy rezultatami badań doświadczalnych a wynikami analiz numerycznych, a deformacje nie wykraczały poza zakres sprężysty, rozkład naprężenia uzyskany na drodze obliczeń MES uznano za wiarygodny. Na rysunku 6.12 przedstawiono rozkład maksymalnej składowej naprężenia głównego. Zauważalne są znaczne gradienty naprężenia w obszarach sąsiadujących z okuciami dźwigara, co stwarza niebezpieczeństwo wystąpienia nieodwracalnych odkształceń.

Po zakończonym etapie badań zmęczeniowych przeprowadzono próbę niszczącą, która miała na celu wyznaczenie zapasu bezpieczeństwa struktury po określonym czasie eksploatacji, czyli tzw. wytrzymałości resztkowej [132].



Rys. 6.12. Rozkład naprężenia głównego w części bagnetowej dźwigara [MPa]

Do mocowania dźwigara wykorzystano zmodyfikowane stanowisko badawcze stworzone na potrzeby próby zmęczeniowej. Modyfikacja ta polegała na zastąpieniu siłownika elektromechanicznego przez siłownik hydrauliczny. Zmiana była podyktowana ograniczeniami skoku cylindra w pierwotnie wykorzystanej aparaturze, co mogłoby uniemożliwić prawidłowe przeprowadzenie badania. Początkową linię działania siły obciążającej dobrano w taki sposób, aby kierunek ten był prostopadły do przewidywanej przez konstruktora linii ugięcia dźwigara w momencie działania obciążenia równego 100% obciążeń dopuszczalnych (rys. 6.13).



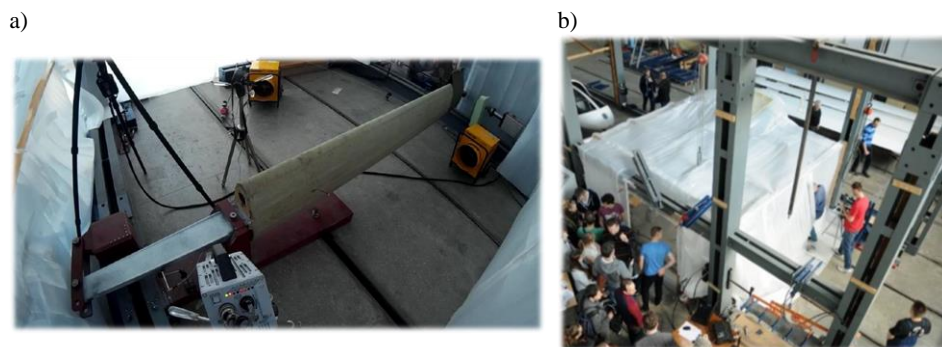
Rys. 6.13. Schemat stanowiska badawczego do próby wytrzymałości resztkowej dźwigara



Poziom działającego obciążenia rejestrowano z zastosowaniem siłomierza tensometrycznego AXIS 20kN połączonego z mostkiem tensometrycznym Quantum X firmy HBM. Do mostka przyłączono również indukcyjny czujnik przemieszczenia HBM WA-10, który posłużył do pomiaru strzałki ugięcia w połowie długości części bagnetowej. Częstotliwość próbkowania sygnału pomiarowego wynosiła 300 Hz.

W trakcie próby rejestrowano również deformację części bagnetowej dźwigara, wykorzystując system cyfrowej korelacji obrazu ARAMIS, z częstotliwością wykonywania zdjęć równą 2 Hz.

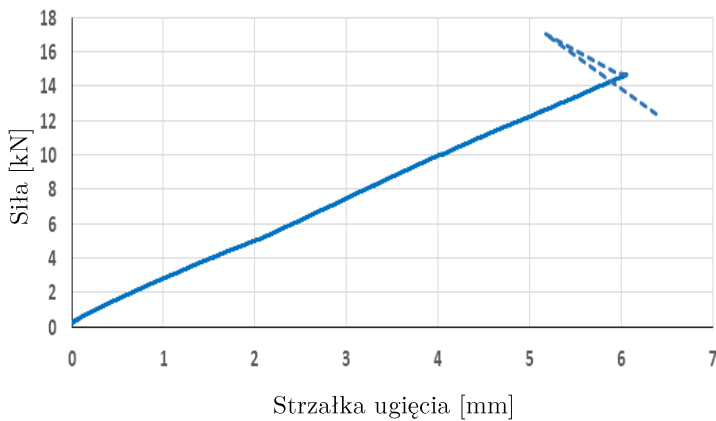
Nominalna temperatura przeprowadzania próby miała wynosić 54°C. W tym celu w klatce wydzielono obszar odizolowany termicznie i zwiększono temperaturę przy użyciu dwóch nagrzewnic elektrycznych o mocy 18 kW każda (rys. 6.14). Zmianę temperatury rejestrowano za pomocą termometru, którego końcówka pomiarowa była umieszczona wewnątrz kesonu zapobiegającego zwichrzeniu dźwigara.



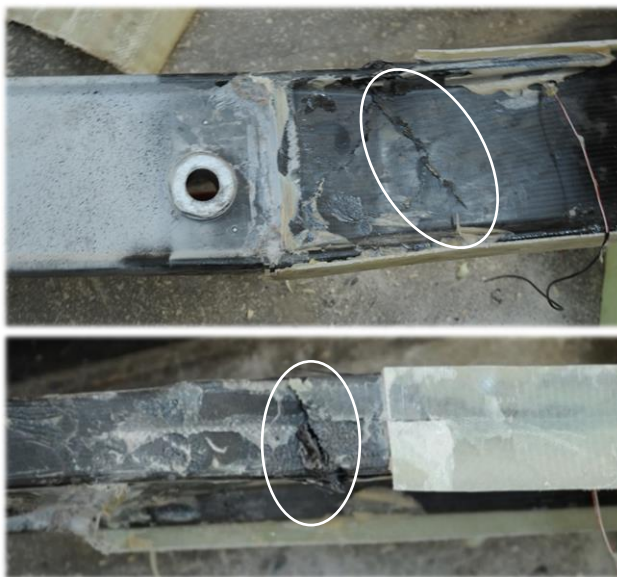
Rys. 6.14. Stanowisko badawcze do próby wytrzymałości resztkowej dźwigara:  
a) widok ogólny, b) zabezpieczenie termiczne obszaru badawczego

Przeprowadzona próba wytrzymałości resztkowej dowiodła, że siła niszcząca dźwigar, po przeprowadzonych uprzednio badaniach zmęczeniowych, odpowiadała wartości 146% obciążenia dopuszczalnego skrzydła motoszybowca, co wskazuje na wystarczający zapas bezpieczeństwa (rys. 6.15).

Dźwigar uległ zniszczeniu na skutek pęknięcia górnego pasa w odległości około 215 mm od okucia bliższego końcówce skrzydła oraz ścianki na całej wysokości, natomiast pas dolny nie uległ zniszczeniu (rys. 6.16).



Rys. 6.15. Zależność wielkości strzałki ugięcia bagnetu od siły obciążającej



Rys. 6.16. Stan struktury po przeprowadzeniu próby

### 6.2.3. Badania wpływu dodatkowego zasobnika na aparaturę pomiarową na właściwości lotne szybowca

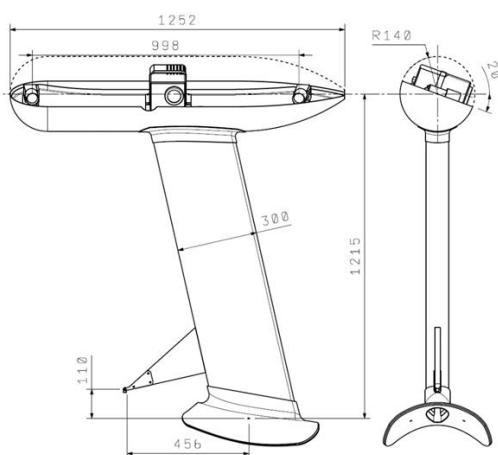
W ramach prac nad europejskim projektem *Advanced In-flight Measurement Techniques 2 (AIM<sup>2</sup>)*<sup>5</sup> podjęto próbę dokonania pomiarów w locie

<sup>5</sup> Projekt badawczy AIM<sup>2</sup> (ACP0-GA-2010-266107) był realizowany w ramach siódmego programu ramowego Wspólnoty Europejskiej w zakresie badań, rozwoju technologicznego i demonstracji.

z wykorzystaniem metod optycznych. Jedno z zadań wymagało skonstruowania uchwytu na aparaturę badawczą, w postaci wysięgnika z gondolą montowanego na kadłubie szybowca PW-6. W uchwycie umieszczono poza kamerą termowizyjną również zestaw kamer systemu IPCT (ang. *Image Pattern Correlation Technique*) [6].

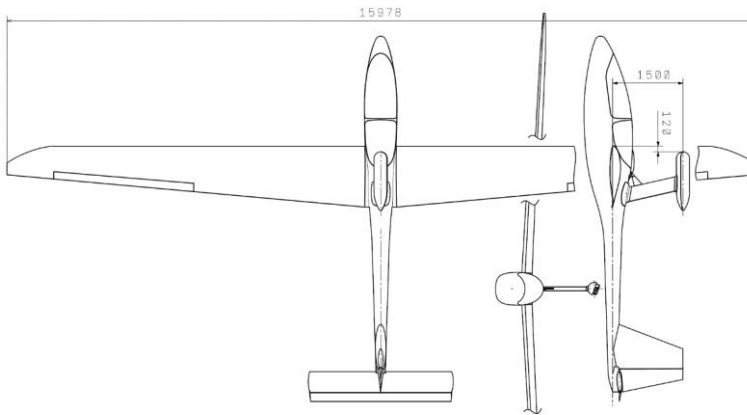
Zgodnie z przepisami zdolności do lotu statków powietrznych wytrzymałość i niezawodność podobnych elementów będących w opływie w trakcie lotu musi zostać potwierdzona eksperymentem przed zastosowaniem w locie. Przedstawione dalej badania doświadczalne obejmowały serię wytrzymałościowych prób statycznych oraz wyniki badań w tunelu aerodynamicznym, których celem było określenie sztywności projektowanej struktury oraz jej wpływu na stateczność i sterowność w trakcie lotu zmodyfikowanego szybowca.

Zasadniczą część wytrzymałościową konstrukcji stanowił pylon o wysokości około 1200 mm, wykonany jako półskorupowa struktura z kompozytu polimerowego na bazie żywicy epoksydowej, wzmocnianego włóknem węglowym. W górnej części pylonu zamontowano gondolę na aparaturę pomiarową wykonaną z kompozytu zbrojonego włóknem szklanym. Geometrię uchwytu przedstawiono na rys. 6.17. Konstrukcja i funkcjonalność uchwytu stała się przedmiotem patentu [49], którego jednym ze współautorów jest autor niniejszej pracy.



Rys. 6.17. Geometria uchwytu na aparaturę badawczą do szybowca PW-6 [53]

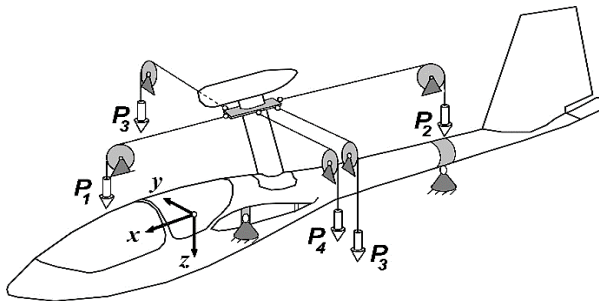
Uchwyt zamocowano do kadłuba szybowca przez okucia, przygotowane pierwotnie dla rozwojowej wersji PW-6 wyposażonej w zespół napędowy. Sposób usytuowania uchwytu na tle konstrukcji szybowca przedstawiono na rys. 6.18.



Rys. 6.18. Poglądowy schemat zamocowania uchwytu na szybowcu [48]

Pierwszy etap badań stanowiła seria naziemnych prób statycznych mających na celu udowodnienie dostatecznej wytrzymałości i sztywności uchwytu zgodnie z wymaganiami przepisów CS-22 dla szybowców [21]. Przeprowadzono badania pięciu wymiarujących przypadków obciążenia.

Na rysunku 6.19 przedstawiono zbiorczy układ obciążenia dla realizowanych przypadków. Próby obejmowały zginanie uchwytu w kierunku lotu (obciążenie  $P_1$  na rys. 6.19) oraz w kierunku przeciwnym (obciążenie  $P_2$ ), skręcanie uchwytu (obciążenie  $P_3$ ), zginanie boczne (obciążenie  $P_4$ ) oraz przypadek jednoczesnego zginania i skręcania (obciążenie  $P_1$  i  $P_4$ ).



Rys. 6.19. Schemat obciążenia w trakcie statycznych badań szybowca z zamontowanym uchwytem

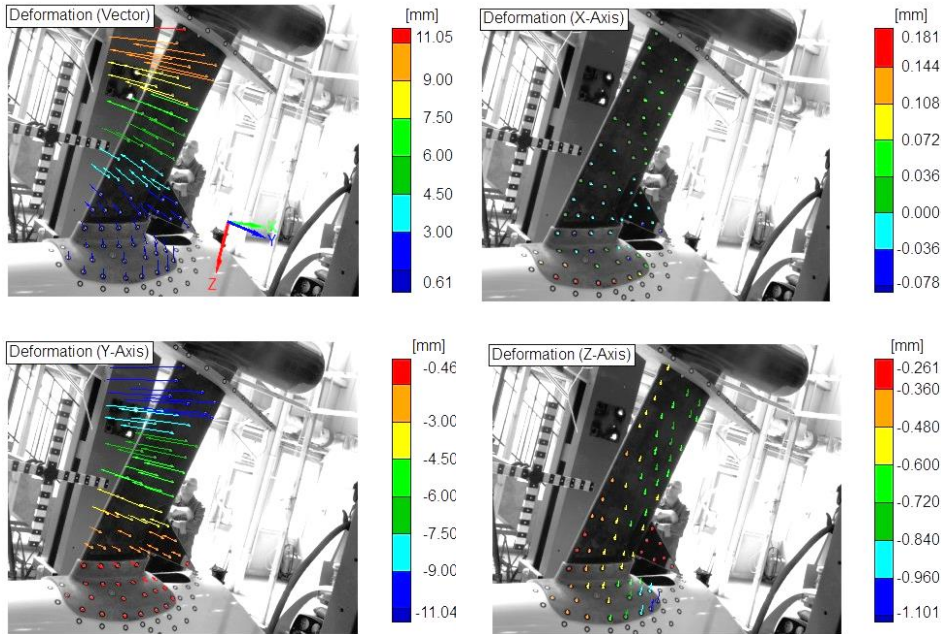
Wielkości sił, których działaniu poddawano szybowiec z zamontowanym uchwytem, były równe obciążeniom granicznym działającym na zmodyfikowaną konstrukcję podczas najbardziej niekorzystnych manewrów, które były spodziewane w locie, zgodnie z CS.22.337, CS.22.363(a)(b) i CS.22.473(b)(ii).

Obciążenie przykładano do konstrukcji przez układ bloczków i cięgien w sposób grawitacyjny. Realizację techniczną próby przedstawiono na rys. 6.20.



Rys. 6.20. Realizacja techniczna prób statycznych szybowca

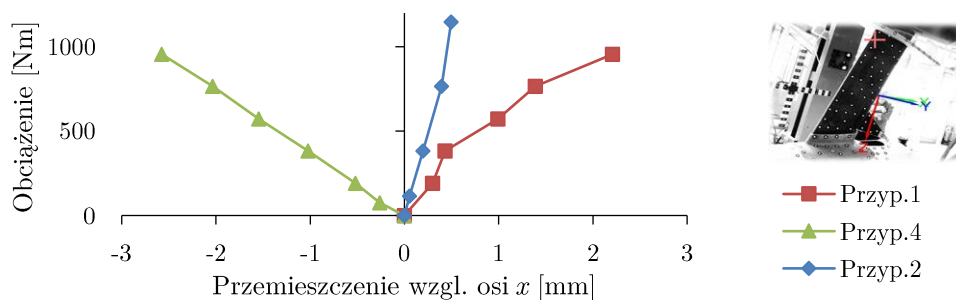
Do pomiarów deformacji wykorzystano optyczny skaner 3D typu GOM PONTOS oparty na metodzie cyfrowej korelacji obrazu. Na powierzchnię badanych elementów naklejono punkty pomiarowe, dla których wyznaczano wektory przemieszczenia w każdym etapie obciążenia. Rysunek 6.21 przedstawia przykładowy rozkład wypadkowego przemieszczenia oraz jego składowych względem kartezjańskiego układu odniesienia dla czwartego przypadku obciążenia, czyli zginania bocznego.



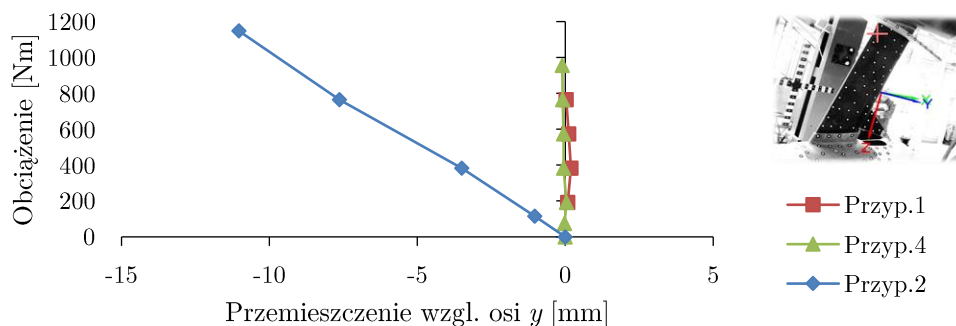
Rys. 6.21. Przesunięcia punktów pomiarowych dla przypadku zginania bocznego na etapie maksymalnego obciążenia

Na rysunkach 6.22 i 6.23 zaprezentowano wykresy zmian składowych przemieszczenia wybranego punktu pomiarowego na powierzchni pylonu uchwytu w funkcji wzrastającego obciążenia. Otrzymane wyniki pozwalają wnioskować, że sztywność konstrukcji uchwytu jest wystarczająca dla planowanych badań w locie. Maksymalna deformacja względna, odniesiona do wysokości uchwytu, na kierunku zgodnym z osią kadłuba wyniosła 0,2%, natomiast ugięcie boczne przy maksymalnym obciążeniu nie przekroczyło wartości 0,9%.

Jako podsumowanie etapu statycznych badań sztywności i wytrzymałości uchwytu można stwierdzić, że nie zaobserwowano znaczących ani niespodziewanych deformacji, a także nie stwierdzono uszkodzeń struktury. W związku z tym wynik ten spełniał wymagania prawne dotyczące zdolności do lotu statku powietrznego z modyfikacją w postaci zabudowy dodatkowego uchwytu na aparaturę pomiarową.



Rys. 6.22. Przemieszczenie wzdłuż kierunku zgodnego z osią kadłuba w funkcji kolejnych etapów obciążenia



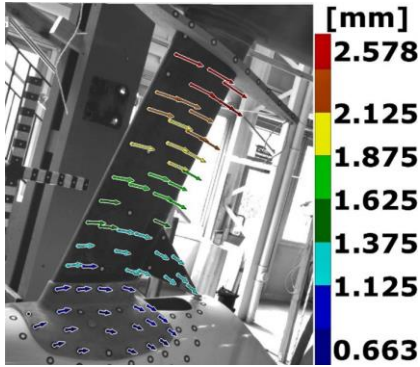
Rys. 6.23. Przemieszczenie na kierunku rozpiętości skrzydeł w funkcji kolejnych etapów obciążenia

Na etapie projektowania uchwytu przygotowano również jego model numeryczny w ujęciu MES, który posłużył do oceny sztywności i wyboru najkorzystniejszego ułożenia warstw tkanin tworzących strukturę. Na rysunku 6.24 skonfrontowano wyniki pomiarów eksperymentalnych oraz analiz numerycznych dla pierwszego przypadku obciążenia, tj. zginania w kierunku przedniej części kadłuba. Różnica w otrzymanych wynikach nie przekraczała 3%, przy czym sztywniejszy był model numeryczny.

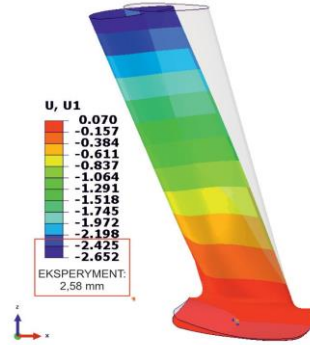
Oprócz wytrzymałościowych badań statycznych, w tunelu aerodynamicznym T-3 w Instytucie Lotnictwa w Warszawie przeprowadzono badania stateczności lotu szybowca z zamontowanym uchwytem. Rysunek 6.25 przedstawia przygotowany do badań szybowiec w przestrzeni pomiarowej tunelu, zawieszony na wadze aerodynamicznej. Badania miały na celu zidentyfikowanie potencjalnego wpływu zamontowania uchwytu na właści-

wości lotne objawiające się przez zmianę sił i momentów aerodynamicznych działających na szybowiec.

a)



b)



Rys. 6.24. Rozkład deformacji na kierunku osi kadłuba uchwytu w przypadku obciążenia wywołującego zginanie: a) wynik badań doświadczalnych, b) wynik analiz MES

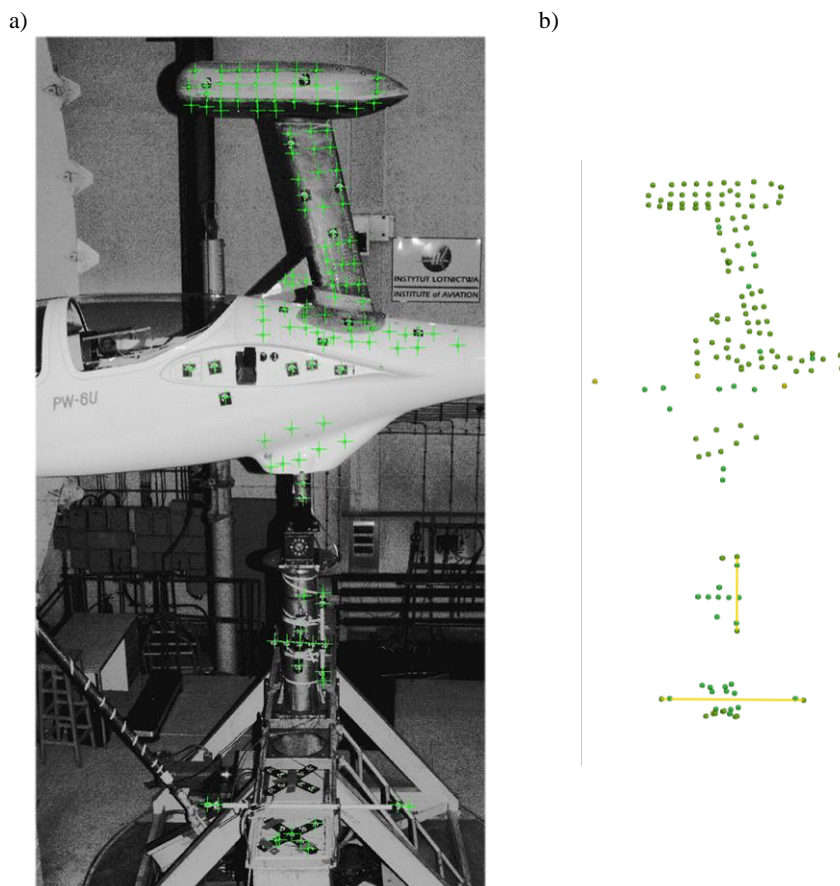


Rys. 6.25. Badany szybowiec zamontowany w przestrzeni pomiarowej tunelu aerodynamicznego

W trakcie badania dokonywano zmian prędkości przepływu powietrza, kąta natarcia, kąta ślizgu oraz kąta wychylenia steru wysokości.



Do pomiarów wykorzystano również system fotogrametrii cyfrowej GOM TRITOP, który umożliwia pomiary deformacji z zastosowaniem metody cyfrowej korelacji obrazu. W pierwszym etapie badania zarejestrowano zbiór punktów pomiarowych w położeniu referencyjnym (rys. 6.26), a następnie wykonywano serię zdjęć umożliwiającą określenie deformacji tych punktów w różnych warunkach symulowanego lotu szybowca.

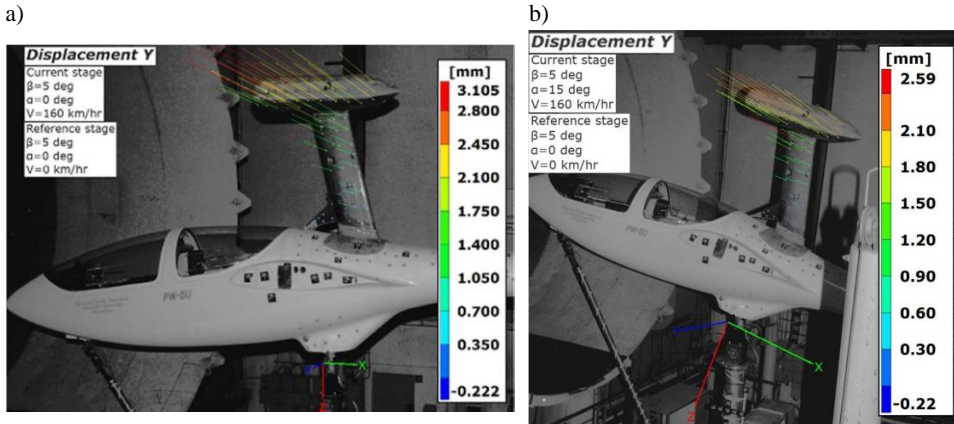


Rys. 6.26. Szybowiec z zaznaczonymi punktami pomiarowymi (a) oraz zidentyfikowane, przestrzenne położenie punktów

Podobnie jak w przypadku prób statycznych, w trakcie badań tunelowych nie stwierdzono krytycznych ani też niespodziewanych efektów, które mogłyby zagrażać bezpieczeństwu lotu. Na rysunku 6.27 przedstawiono rozkład deformacji poprzecznej, na kierunku rozpiętości skrzydeł, dla dwóch

przykładowych etapów badań ze stałym kątem ślizgu  $\beta = 5^\circ$  i przy stałej prędkości przepływu  $V = 160$  km/h, dla zmiennego kąta natarcia  $\alpha = 0^\circ$  i  $\alpha = 15^\circ$ .

Badania przeprowadzone w tunelu aerodynamicznym dowiodły, że maksymalne deformacje dodatkowego uchwytu na aparaturę pomiarową nie powinny przekroczyć wartości  $3 \pm 0,2$  mm.



Rys. 6.27. Deformacja poprzeczna zarejestrowana w trakcie badań w tunelu aerodynamicznym przy prędkości  $V = 160$  km/h i kącie ślizgu  $\beta = 5^\circ$  dla kątów natarcia:

a)  $\alpha = 0^\circ$ , b)  $\alpha = 15^\circ$

Informacje o deformacji struktury rejestrowane w kolejnych quasistatycznych warunkach lotu szybowca zostały następnie wykorzystane jako niepewność położenia przestrzennego aparatury pomiarowej w trakcie badań w locie prowadzonych z wykorzystaniem systemów IPCT. Dalsze badania, obejmujące pomiary deformacji skrzydeł szybowca w trakcie lotu przedstawiono w pracach [5, 6].

## 7. UWAGI KOŃCOWE

### 7.1. Realizacja pracy

W monografii przedstawiono przykłady zastosowania kompilacji metod doświadczalnych oraz analiz numerycznych, spełniających funkcje badań komplementarnych w projektowaniu cienkościennych ustrojów nośnych pracujących w stanach zaawansowanych deformacji. Analizy prowadzono na podstawie metodyki skojarzonych badań i obliczeń:

- w badaniach doświadczalnych uwzględniono zakresy deformacji nieliniowych zarówno w ujęciu geometrycznym, jak i fizycznym. W trakcie badań eksperymentalnych wykorzystano system pomiarowy oparty na trójwymiarowej wersji cyfrowej korelacji obrazu (DIC), umożliwiającą rejestrację pola przemieszczenia rozpatrywanych struktur nośnych w każdym etapie obciążenia,
- analizę numeryczną opierano na Metodzie Elementów Skończonych z wykorzystaniem metod obliczeniowych uwzględniających nieliniowości geometryczne oraz nieliniowe związki konstytutywne.

Konfrontacja wyników uzyskanych w badaniach doświadczalnych i analizach numerycznych stanowiła podstawę do określenia poprawności rozwiązania. Porównaniu podlegały zarówno pola deformacji na powierzchni badanych elementów, jak również wybrane, reprezentatywne relacje pomiędzy przemieszczeniem a obciążeniem, zwane ścieżkami równowagi.

Rezultaty badań otrzymane z wykorzystaniem przyjętych systemów pomiarowych i obliczeniowych pozwalają stwierdzić, że prawidłowo skojarzone, stanowią wysoce skuteczne narzędzie badawcze w określaniu deformacji konstrukcji w pełnym spektrum realizowanego obciążenia. Rejestracja pola przemieszczenia na całym obszarze badanej struktury umożliwia identyfikację zarówno globalnej postaci deformacji, jak i efektów lokalnych. Rejestracja może się odbywać z określoną częstotliwością, co w połączeniu z przyporządkowaną dla każdego etapu informacją o poziomie obciążenia

pozwała na analizę historii deformacji struktury. Niewątpliwą zaletą stosowanej metody jest również uniezależnienie możliwości prowadzenia badań od rodzaju materiału, z jakiego jest wykonany obiekt. Dzięki temu badania nie ograniczają się jedynie do badań modelowych, lecz są możliwe do prowadzenia również w przypadku rzeczywistych obiektów. Same badania można prowadzić w niemal każdych warunkach eksploatacyjnych, w zależności od konfiguracji systemu pomiarowego.

Ograniczenie w stosowaniu systemów cyfrowej korelacji obrazu stanowi fakt, że wynikiem badań jest pole deformacji rejestrowane jedynie na powierzchni badanego obiektu, co poza przypadkami obiektów o stosunkowo mało skomplikowanej geometrii i stałej grubości uniemożliwia bezpośrednie określenie stanu naprężenia w badanych elementach. W takich sytuacjach niezbędne jest posłużenie się wynikami obliczeń numerycznych. Uwzględniając zamiary wynikające z realizacji zadań objętych pracą, przygotowano modele obliczeniowe, które uwzględniały zależności geometryczne oraz równania konstytutywne dla trójwymiarowego continuum materialnego aproksymowanego układem dyskretnym w ujęciu Metody Elementów Skończonych w sformułowaniu przemieszczeniowym.

Analizy numeryczne w ujęciu nieliniowym, które w istocie sprowadzają się do rozwiązywania układu równań algebraicznych odpowiadających dyskretyzacji analizowanego ciała, rozwiązywano z zastosowaniem zmodyfikowanej metody prognostycznej Newtona-Raphsona z procedurami korekcji obciążenia. W trakcie realizacji pracy wykorzystywano również korekcję rozwiązania opartą na koncepcji kontroli długości łuku w sformułowaniu Riksa-Wempnera. Jednak w przypadku rozważanych struktur, które nie wykazują na swoich ścieżkach równowagi punktów zwrotnych i punktów bifurkacji, zastosowanie bardziej zaawansowanych algorytmów poszukiwania rozwiązania nie wpływa na wzrost jego zbieżności. Zauważalny jest natomiast wzrost zapotrzebowania na moc obliczeniową komputera, co ma znaczący wpływ na czas obliczeń i powoduje, że w takich przypadkach nie zawsze jest celowe wykorzystanie owych procedur.

W nawiązaniu do powyższego należy wspomnieć, że wyniki badań i analiz wskazują na istotny wpływ dyskretyzacji badanej struktury na rozwiązanie zadania. W przypadku określania globalnej postaci deformacji po-

krytycznej nadmierne zmniejszanie wymiarów charakterystycznych elementów, a co za tym idzie – zwiększanie ich liczby z jednoczesnym wzrostem liczby węzłów, nie wpływa jednak znacząco na zbieżność rozwiązania, a jedynie zwiększa wymiar zadania numerycznego. Podobne wnioski można sformułować w odniesieniu do typu wykorzystanych elementów. W ramach analiz stosowano elementy powłokowe cztero- i trójwęzłowe o zredukowanej liczbie punktów całkowania, będące standardowymi elementami z biblioteki wykorzystanego programu. Umożliwiły one uzyskanie zadowalającej zbieżności w całym spektrum obciążenia.

Jak już wspomniano, analizy były prowadzone zarówno z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych, jak i fizycznych. Wyniki dowodzą, że możliwe jest uzyskanie zadowalającej zbieżności przy wykorzystaniu uproszczonych równań konstytutywnych wyrażanych w modelu ciała sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem. Fakt ten odgrywa również znaczącą rolę w obniżeniu czasochłonności rozwiązania w zakresie deformacji plastycznych, zwłaszcza w stanach pokrytycznych, gdzie jednocześnie należy się mierzyć z nieliniowymi relacjami natury geometrycznej.

W trakcie realizacji prac wykazano również, że wysoka zbieżność rozwiązania numerycznego w stosunku do eksperymentu jest możliwa do uzyskania pod warunkiem poprawnej identyfikacji początkowego stanu rozważanej struktury, przez co należy rozumieć zarówno odchyłki wykonawcze, jak i wstępne imperfekcje wynikające ze sposobu zamocowania obiektu w stanowisku badawczym. Fakt ten nabiera szczególnego znaczenia w przypadku analiz struktur o ścieżkach równowagi cechujących się punktami bifurkacji, w których zmianie ulega postać deformacji.

Sformułowane wnioski wynikają z analiz szczegółowo przedstawionych w poprzednich rozdziałach. Badania prowadzono na przykładzie płyt o skomplikowanej geometrii integralnych usztywnień. Wnioski mogą mieć jednak odniesienie do wielu struktur cienkościennych, obejmujących również konstrukcje powłokowe.

Metodyka opisana w pracy była również stosowana pośrednio oraz bezpośrednio w pracach autora obejmujących badania prowadzone w ramach projektów rozwojowych, jak również pracach zleconych przez jednostki przemysłu. Analizie poddawano między innymi wpływ technologii łączenia

elementów struktur półskorupowych na zachowanie się w stanach pokrytycznych i graniczną wartość obciążenia [69, 71]. W pracy [55] rozpatrywano deformacje pokrytyczne cienkościennych struktur usztywnianych rowkami (tzw. ryfle) kształtowanymi w technologii przyrostowego tłoczenia. Przedmiot badań autora stanowiła również analiza wpływu procesu kulowania na nośność połączenia wykonanego metodą zgrzewania tarciowego [70]. W przypadku struktur kompozytowych badano wpływ wykroju na postać deformacji oraz nośność w zakresie pokrytycznym kompozytowych płyt przekładkowych poddanych ścinaniu [60]. Określano także odporność na ścinanie obwodowe tego rodzaju konstrukcji [137].

## 7.2. Oryginalne elementy pracy

Przeprowadzone badania doświadczalne oraz analizy numeryczne dowiodły skuteczności przyjętego narzędzia, jakim jest system pomiarowy oparty na metodzie cyfrowej korelacji obrazu (DIC), skojarzony z koncepcją rozległej, bieżącej analizy numerycznej. Koncepcja umożliwia w sposób zadowalający identyfikację stanów deformacji oraz stanów naprężenia struktur w pełnym zakresie warunków eksploatacyjnych. Stosowanie metody DIC pozwala na ocenę i modyfikację modeli numerycznych tworzonych do rozwiązywania zagadnień fizycznie i geometrycznie nieliniowych, w ujęciu Metody Elementów Skończonych. Identyfikacja wstępnej deformacji struktury oraz śledzenie zmian na każdym z etapów obciążenia zezwala na zachowanie daleko idącej dokładności w odtwarzaniu deformacji struktury w stanach pokrytycznych. Stosowanie DIC umożliwia dokonywanie pomiarów deformacji w formie połowej, a co za tym idzie – stwarza możliwość śledzenia efektów lokalnych, często pomijanych w przypadku stosowania tradycyjnych metod pomiarowych mimo ich decydującego wpływu na przedwczesne zniszczenie konstrukcji.

Badania, których rezultaty przedstawiono w monografii, stanowią rozwinięcie prac zapoczątkowanych w ramach realizacji projektu naukowego pt. *Metodyka projektowania cienkościennych, integralnie usztywnianych, lotniczych struktur nośnych* (LIDER/011/443/L-4/12/NCBR/2013), którego autor był kierownikiem.

Do oryginalnych elementów dorobku można zaliczyć zaprojektowanie oraz nadzór nad realizacją warsztatową zarówno stanowisk badawczych, jak i modeli wykorzystanych na etapie badań doświadczalnych.

Opracowanie modeli dyskretnych rozważanych struktur w ujęciu MES również można uznać za oryginalne elementy pracy. Umiejętność poprawnego doboru elementów skończonych, odtworzenia warunków brzegowych oraz dobór parametrów sterujących procesem rozwiązania nieliniowego zagadnienia w odniesieniu do teorii mechaniki nieliniowej jest warunkiem koniecznym do poprawnego rozwiązania problemu.

Oryginalnym elementem pracy jest przede wszystkim wykazanie celowości prowadzenia już na etapie projektowania komplementarnych badań doświadczalnych, które umożliwiają dokonywanie weryfikacji poprawności wyników analiz numerycznych struktur cienkościennych pracujących w stanach deformacji pokrytycznych.

### **7.3. Kierunki dalszych badań**

Przykłady badań przedstawione w pracy oraz ich rezultaty nie wyczerpują podjętej w niej tematyki. Z punktu widzenia współczesnych problemów techniki celowa wydaje się intensyfikacja prac zmierzających do głębszego poznania zagadnienia trwałości eksploatacyjnej cienkościennych ustrojów nośnych pracujących w warunkach pokrytycznych deformacji, co wymaga prowadzenia dalszych badań w zakresie zarówno wytrzymałości zmęczeniowej, jak i rozważania zagadnień reologicznych. Znajomość reologicznych stanów granicznych wydaje się wymagana wobec faktu, że właściwości tych nie powinno się pomijać w konstrukcjach kompozytowych.

Z punktu widzenia zgodności modeli numerycznych z wynikami badań doświadczalnych kluczowe wydają się prace mające na celu określenie wpływu wstępnej imperfekcji geometrycznej na postać deformacji i ustalenie poziomu ufności w stosunku do wyników obliczeń MES.

Warte bliższego poznania wydają się badania integralnie usztywnianych struktur nośnych. Przeprowadzone dotychczas wykazują, że tego rodzaju struktury charakteryzują się wysoką sztywnością i wytrzymałością oraz mogą być alternatywą wobec coraz szerzej stosowanych struktur wytwarzanych z kompozytów włóknistych. Pomimo niewątpliwych zalet tego rodzaju ustrojów kluczowe staje się opracowanie metod projektowania

z uwzględnieniem lokalnych koncentracji naprężenia, mających decydujący wpływ na nośność oraz trwałość eksploatacyjną tego rodzaju konstrukcji.

Pomimo powyższych stwierdzeń obserwacja obecnych trendów w konstrukcji cienkościennych ustrojów nośnych pozwala wnioskować, że w najbliższym czasie będzie się nasilać przede wszystkim wykorzystanie materiałów kompozytowych. Materiały te pomimo coraz szerszego zastosowania, zwłaszcza w technice lotniczej, posiadają jeszcze wiele niepoznanych dostatecznie właściwości, co otwiera szerokie pole dla badań doświadczalnych.

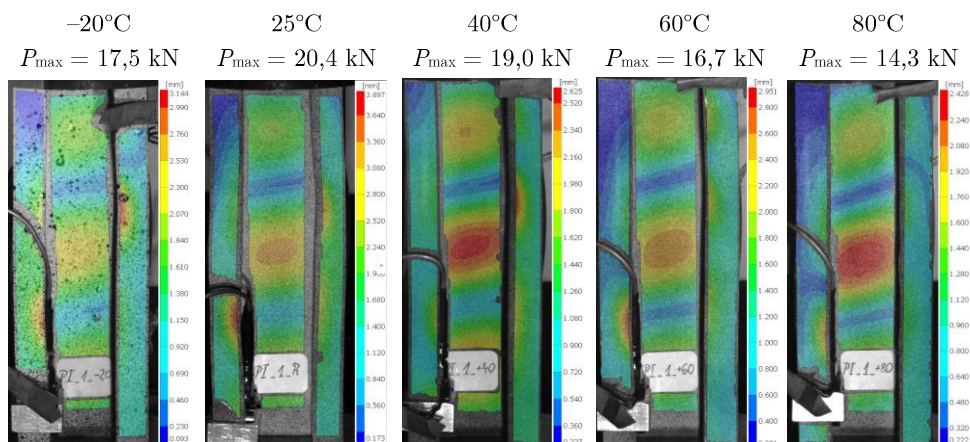
W świetle tego perspektywiczna wydaje się problematyka analizy wpływu ukierunkowania warstw kompozytu zbrojonego włóknem węglowym na postać deformacji pokrytycznej i nośność graniczną cienkościennych struktur nośnych w zależności od temperaturowych warunków pracy (rys. 7.1). Zagadnienie to jest obecnie realizowane przez międzyuczelniany zespół (Politechnika Białostocka, Politechnika Lubelska i Politechnika Rzeszowska), którego członkiem jest autor niniejszej monografii. Omawiane badania są prowadzone w ramach programu VIA CARPATIA<sup>6</sup>, a pierwsze rezultaty badań zostały opublikowane w pracy [27].

Przedstawione w monografii wyniki analiz struktur nośnych wytwarzanych w technologii druku przestrzennego dowodzą ich dużej skuteczności i potencjalnie szerokiego wykorzystania w przypadku badań modelowych. W zespole zajmującym się wytrzymałością konstrukcji lotniczych, działającym w ramach Katedry Inżynierii Lotniczej i Kosmicznej Politechniki Rzeszowskiej, kontynuowane będą prace zmierzające do opracowania metodyki badań oraz zakresu stosowania struktur drukowanych. Obecnie zespół zajmuje się analizą wpływu usztywnień w postaci krzywoliniowych rowków (ryfli) na powierzchni struktur cienkościennych na charakter pracy ustroju w warunkach deformacji pokrytycznych (rys. 7.2). Wykorzystanie druku przestrzennego umożliwi rozpatrywanie wielu nowatorskich podejść do tego rodzaju struktur nośnych, bez konieczności inwestowania w kosztowne przyrządy lub urządzenia niezbędne do wytwarzania w przypadku tradycyjnych technologii.

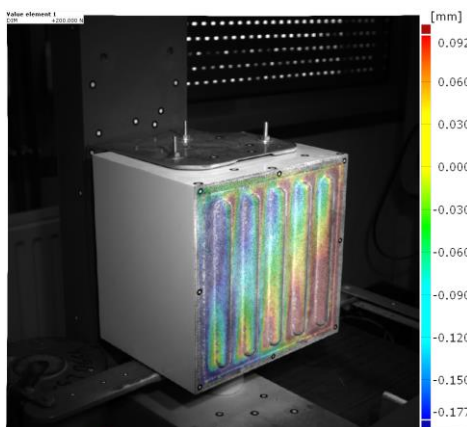
---

<sup>6</sup> Projekt „Wpływ właściwości termomechanicznych na stateczność i nośność ściskanych cienkościennych profili kompozytowych”, realizowany w ramach umowy nr MEIN/2022/DPI/2578.





Rys. 7.1. Wpływ temperatury na postać deformacji przy granicznej wartości obciążenia przykładowej kompozytowej struktury cienkościennej o przekroju omegowym poddanej ścisnaniu (wynik badań DIC)



Rys. 7.2. Deformacja cienkościennej struktury nośnej usztywnianej ryflami, poddanej skręcaniu nieswobodnemu w warunkach deformacji pokrywyczej (wynik badań DIC)

Na zakończenie warto wspomnieć, że zawsze celowe jest prowadzenie szeroko pojętych prac ukierunkowanych na analizę stanów nieliniowych deformacji. W miarę poznawania charakteru pracy konstrukcji po utracie stateczności możliwe staje się przesunięcie poziomu naprężenia dopuszczalnego bliżej obciążeń niszczących strukturę, przy zachowaniu wymaganego zapasu bezpieczeństwa. Takie podejście umożliwia lepsze wykorzystanie materiału, a co za tym idzie – minimalizację masy struktury nośnej. Ma to kluczowe znaczenie zwłaszcza w przypadku wytrzymałości konstrukcji lotniczych.



## LITERATURA

1. *Abaqus: Theory Manual*. Dassault Systèmes Simulia Corp, Providence, RI, 2009.
2. Aben H.: *Integrated Photoelasticity and Its Applications*. [In:] Lagarde A. (ed.) Static and Dynamic Photoelasticity and Caustics: Recent Developments. Springer, Vienna, 1987, s. 1–61.
3. Ainola L., Aben H.: *On the generalized Wertheim law in integrated photoelasticity*. J. Opt. Soc. Am. A., 2008, 25:1843–1849.
4. ASTM D638-14. Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics. ASTM International, West Conshohocken, PA, USA, 2014.
5. Bakunowicz J., Meyer R.: *In-Flight Wing Deformation Measurements on a Glider*, Aeronautical Journal, 2016, 120(1234), 1917-1931. doi: 10.1017/aer.2016.98.
6. Bakunowicz J., Świąch Ł., Meyer R.: *Measuring structure deformations of a composite glider by optical means with on-ground and in-flight testing*. Meas. Sci. Technol., 2016, 27:124013. doi: 10.1088/0957-0233/27/12/124013.
7. Bathe K.J.: *Finite element procedures*. Mass, Boston 2006.
8. Bauchau O.A., Craig J.I.: *Structural analysis: with applications to aerospace structures*. Springer, Dordrecht; New York 2009.
9. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K.I.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Second edition. Wiley, Chichester, West Sussex, United Kingdom, 2014.
10. Besl P.J., McKay N.D.: *A method for registration of 3-D shapes*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 1992, 14:239–256. doi: 10.1109/34.121791.
11. Bhatti M.A.: *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: With Mathematica and MATLAB Computations*. Wiley, 2006.
12. Bhatti M.A.: *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Computations*. Wiley, 2005.
13. Bloom F., Coffin D.: *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
14. Brewster D.: *On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriate of soda, fluor spar, and other substances, by mechanical compression and dilatation*. By David Brewster, LL. D. F. R. S. Lond. and Edin. In a letter addressed to the Right Hon. Sir Joseph Banks, Bart. G. C. B. P. R. S. Philosophical

- Transactions of the Royal Society of London, 1997, 106:156–178. doi: 10.1098/rstl.1816.0011.
15. Brischetto S., Torre R.: *Tensile and Compressive Behavior in the Experimental Tests for PLA Specimens Produced via Fused Deposition Modelling Technique*. J. Compos. Sci., 2020, 4:140. doi: 10.3390/jcs4030140.
  16. Bruck H., McNeill S.R., Sutton M.A., Peters W.H.: *Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction*. Experimental Mechanics, 1989, 29:261–267.
  17. Brzoska Z.: *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*. PWN, Warszawa 1965.
  18. Chu T.C., Ranson W.F., Sutton M.A.: *Applications of digital-image correlation techniques to experimental mechanics*. Experimental Mech., 1985, 25:232–244.
  19. Cook R.D.: *Concepts and applications of finite element analysis*, 4th ed. Wiley, New York, NY, 2001.
  20. Crisfield M.A.: *A fast incremental/iterative solution procedure that handles „snap-through”*. Computers & Structures, 1981, 13:55–62. doi: 10.1016/0045-7949(81)90108-5.
  21. CS-22 Certification Specifications for Sailplanes and Powered Sailplanes, Amdt. 2, 2009.
  22. Dacko M., Borkowski W., Dobrociński S., Niezgoda T., Wieczorek M.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1994.
  23. Dally J.W., Riley W.F.: *Experimental Stress Analysis*, Subsequent edition. McGraw-Hill College, New York 1991.
  24. Dimitrov D., Schreve K., de Beer N.: *Advances in three dimensional printing – state of the art and future perspectives*. Rapid Prototyping Journal, 2006, 12:136–147. doi: 10.1108/13552540610670717.
  25. Dow N.F., Hickman W.A., Rosen B.W.: *Data on the Compressive Strength of Skin-stringer Panels of Various Materials*. 1954.
  26. Doyle J.F.: *Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures*. Springer New York, New York, NY, 2001.
  27. Falkowicz K., Kuciej M., Świech Ł.: *Temperature Effect on Buckling Properties of Thin-Walled Composite Profile Subjected to Axial Compression*. Adv. Sci. Technol. Res. J., 2024, 18:305–313. doi: 10.12913/22998624/186607.
  28. Felippa C.A.: *Nonlinear Finite Element Methods* (ASEN 6107). 2006.
  29. Felippa C.A.: *Procedures for computer analysis of large nonlinear structural systems*. [In:] Large Engineering Systems. Elsevier, 1977, 60–101.
  30. Ferreira R.T.L., Amatte I.C., Dutra T.A., Bürger D.: *Experimental characterization and micrography of 3D printed PLA and PLA reinforced with short carbon*

- fibers*. Composites Part B: Engineering, 2017, 124:88–100. doi: 10.1016/j.compositesb.2017.05.013.
31. Fu Y.B., Ogden R.W.: *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*. Cambridge University Press, London 2001.
  32. Gadamchetty G., Pandey A., Gawture M., Gadamchetty G., Pandey A., Gawture M.: *On Practical Implementation of the Ramberg-Osgood Model for FE Simulation*. SAE International Journal of Materials and Manufacturing, 2016, 9:200–205. doi: 10.4271/2015-01-9086.
  33. Gao W., Zhang Y., Ramanujan D., Ramani K., Chen Y., Williams C.B., Wang C.C.L., Shin Y.C., Zhang S., Zavattieri P.D.: *The status, challenges, and future of additive manufacturing in engineering*. Computer-Aided Design, 2015, 69:65–89. doi: 10.1016/j.cad.2015.04.001.
  34. Garrick A.J.H., Toumpis A.I., Galloway A.M.: *Developing a novel manufacturing method to produce stiffened plate structures*. Int. J. Adv. Manuf. Technol., 2021, 112:2805–2813.
  35. Gibbings J.C.: *Dimensional Analysis*, Springer, 2011.
  36. GOM GmbH: *Digital Image Correlation and Strain Computation Basics*; v. 2016. GOM GmbH, Braunschweig, Germany, 2016.
  37. GOM GmbH: *Gom Atos*; v. 2019. GOM GmbH, Braunschweig, Germany, 2019.
  38. GOM GmbH: *GOM Tritop*; v. 2019. GOM GmbH, Braunschweig, Germany, 2019.
  39. Hanon M.M., Dobos J., Zsidai L.: *The influence of 3D printing process parameters on the mechanical performance of PLA polymer and its correlation with hardness*. Procedia Manufacturing, 2021, 54:244–249. doi: 10.1016/j.promfg.2021.07.038.
  40. Helm J.D., McNeill S.R., Sutton M.A.: *Improved three-dimensional image correlation for surface displacement measurement*. Optical Engineering, 1996, 35:1911–1920.
  41. Hossdorf H.: *Statyka modelowa*. Arkady, Warszawa 1975.
  42. Hughes T.J.R., Liu W.K.: *Nonlinear finite element analysis of shells-part II. two-dimensional shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981, 27:167–181. doi: 10.1016/0045-7825(81)90148-1.
  43. Hughes T.J.R., Cohen M., Haroun M.: *Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates*. Nuclear Engineering and Design, 1978, 46:203–222. doi: 10.1016/0029-5493(78)90184-X.
  44. Huybrechts S., Tsai S.W.: *Analysis and behavior of grid structures*. Composites Science and Technology, 1996, 56:1001–1015. doi: 10.1016/0266-3538(96)00063-2.
  45. Infeld L.: *Leonardo Da Vinci and the Fundamental Laws of Science*. Science & Society, 1953, 17:26–41.

46. Jaunky N., Knight N.F., Ambur D.R.: *Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels*. Composites Part B: Engineering, 1996, 27:519–526. doi: 10.1016/1359-8368(96)00032-7.
47. Johnson G.R., Cook W.H.: *A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates, and High Temperatures*. Proceedings 7th International Symposium on Ballistics, Haga 1983.
48. Kahnjetter Z.L., Chu T.C.: *3-Dimensional Displacement Measurements Using Digital Image Correlation and Photogrammic Analysis*. Experimental Mechanics, 1990, 30:10–16.
49. Kalwara M., Kucaba-Piętal A., Świech Ł., Kopecki T., Bakunowicz J.: *Zasobnik na aparaturę pomiarową*, zgłoszenie nr P.417329, Patent 230264, 25.05.2016.
50. Kalwara M., Kucaba-Piętal A., Świech Ł., Rzucidło P., Rogalski T.: *Removable Container for In-Flight Experiments on PW-6U Glider*. Journal of Aerospace Engineering, 2018, 31:06018003. doi: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000887.
51. Karthick Babu P.R.D., Ramesh K.: *Development of photoelastic fringe plotting scheme from 3D FE results*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2006, 22:809–821. doi: 10.1002/cnm.853.
52. Kashyap R.: *Fiber Bragg Gratings*. Academic Press, 2009.
53. Kączkowski Z.: *Płyty obliczenia statyczne*. Arkady, 1980.
54. Kensch Ch.W.: *Proposal for a certification procedure of extended sailplane lifetime*. Technical Soaring, 2002, 26:32–43.
55. Khalaf H.I., Al-Sabur R., Kubit A., Świech Ł., Żaba K., Novák V.: *Experimental Investigation of Load-Bearing Capacity in EN AW-2024-T3 Aluminum Alloy Sheets Strengthened by SPIF-Fabricated Stiffening Rib*. Materials, 2024, 17:1730. doi: 10.3390/ma17081730.
56. Khvyuzov A., Xu Y.M.: *Initial Buckling of Compressed Rectangular Panels with Variable Stiffener Sizes*. Advanced Materials Research, 2014, 915–916:150–164. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.915-916.150.
57. Kleiber M.: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. PWN, Warszawa 1985.
58. Koiter W.T.: *The Stability of Elastic Equilibrium*. Stanford University, 1970.
59. Kopecki H.: *Problemy analizy stanów naprężenia ustrojów nośnych w świetle badań eksperymentalnych metodami mechaniki modelowej*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, 1991, 26.
60. Kopecki H., Świech Ł.: *Experimental investigation of limit load of composite sandwich plate with cut-out*. [In:] Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 4., CRC Press, 2017.
61. Kopecki H., Świech Ł.: *Modelling problems of the post-critical states of deformation of isogrid plates in the light of the preliminary experimental investigations*.

- Zakopane, Poland, AIP Conf. Proc., 2019, 2060, 020006 <https://doi.org/10.1063/1.5086137>.
62. Kopecki H., Kopecki T., Świąch Ł.: *Zagadnienia wytrzymałości konstrukcji lotniczych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2023.
  63. Kopecki H., Świąch Ł., Zacharzewski J.: *Crack propagation in thin-walled structures under cyclic variable loads*. [In:] Statics, Dynamics and Stability of Structural Elements and Systems: A series of monographs. Łódź 2016, 147–173.
  64. Kopecki H., Zacharzewski J., Świąch Ł.: *Comparative analysis of the stress states obtained as a result of numerical calculations and experimental investigations with the 3D digital image correlation method*. [In:] Statics, Dynamics and Stability of Structural Elements and Systems, A series of monographs. Łódź 2012, 427–446.
  65. Kopecki T.: *Numerical-experimental analysis of the post-buckling state of a multi-segment multi-member thin-walled structure subjected to torsion*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 49:227–242.
  66. Kopecki T.: *Stany zaawansowanych deformacji w projektowaniu cienkościennych ustrojów nośnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2010.
  67. Kopecki T., Mazurek P.: *Determination of stress distribution patterns in post-critical deformation states of thin-walled skins subjected to operating loads*. Eksploatacja i Niezawodność, 2014, Vol. 16.
  68. Kopecki T., Mazurek P., Lis T., Chodorowska D.: *Post-buckling deformation states of semi-monocoque cylindrical structures with large cut-outs under operating load conditions. Numerical analysis and experimental tests*. EiN, 2016, 18:16–24. doi: 10.17531/ein.2016.1.3.
  69. Kubit A., Świąch Ł., Trzepieciński T., Faes K.: *Experimental Analysis of the Post-Buckling Behaviour of Compressed Stiffened Panel with Refill Friction Stir Spot Welded and Riveted Stringers*. Adv. Sci. Technol. Res. J., 2022, 16:159–167. doi: 10.12913/22998624/146899.
  70. Kubit A., Bucior M., Kluz R., Świąch Ł., Ochał K.: *Application of the 3D Digital Image Correlation to the Analysis of Deformation of Joints Welded with the FSW Method After Shot Peening*. Advances in Materials Science, 2019, 19:57–66. doi: 10.2478/adms-2019-0022.
  71. Kubit A., Trzepieciński T., Świąch Ł., Faes K., Slota J.: *Experimental and Numerical Investigations of Thin-Walled Stringer-Stiffened Panels Welded with RFSSW Technology under Uniaxial Compression*. Materials, 2019, 12:1785. doi: 10.3390/ma12111785.
  72. Lagrange J.L.: *Mechanique Analytique*. Courcier, Paris 1788.
  73. Lanczos C.: *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1950, 255–282.

74. Laulusa A., Bauchau O.A., Choi J.Y., Tan V.B.C., Li L.: *Evaluation of some shear deformable shell elements*. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43:5033–5054. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.08.006.
75. Layachi H., Xu Y.: *Performance and Stability Analysis of Sub-stiffening for Mechanical Buckling and Post Buckling: A Selective Study*. MATEC Web. Conf., 2017, 95:01004. doi: 10.1051/mateconf/20179501004.
76. Liang K., Yang C., Sun Q.: *A smeared stiffener based reduced-order modelling method for buckling analysis of isogrid-stiffened cylinder*. Applied Mathematical Modelling, 2020, 77:756–772. doi: 10.1016/j.apm.2019.07.061.
77. Luan Y., Ohlrich M., Jacobsen F.: *Improvements of the smearing technique for cross-stiffened thin rectangular plates*. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330:4274–4286. doi: 10.1016/j.jsv.2011.03.021.
78. Luo P., Chao Y.J., Sutton M.A.: *Application of stereo vision to three-dimensional deformation analyses in fracture experiments*. Optical Engineering, 1994, 33:981–990.
79. Luo P., Chao Y.J., Sutton M.A., Peters W.H.: *Accurate measurement of three-dimensional deformations in deformable and rigid bodies using computer vision*. Experimental Mech., 1993, 33:123–132.
80. Ma Z., Chen X.: *Fiber Bragg Gratings Sensors for Aircraft Wing Shape Measurement: Recent Applications and Technical Analysis*. Sensors, 2018, 19:55. doi: 10.3390/s19010055.
81. Measures R.M., Abrate S.: *Structural Monitoring with Fiber Optic Technology*. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55:B10–B11. doi: 10.1115/1.1445327.
82. Megson T.H.G.: *Introduction to aircraft structural analysis*, Second edition. Butterworth-Heinemann, an imprint of Elsevier, Amsterdam 2014.
83. Meng L.B., Jin G.C., Yao X.F.: *Application of iteration and finite element smoothing technique for displacement and strain measurement of digital speckle correlation*. Opt. Lasers. Eng., 2007, 45:57–63.
84. Merklein M., Geiger M.: *New materials and production technologies for innovative lightweight constructions*. Journal of Materials Processing Technology, 2002, 125–126:532–536. doi: 10.1016/S0924-0136(02)00312-6.
85. Mikhail E.M., Bethel J.S., McGlone J.C.: *Introduction to modern photogrammetry*. Wiley, New York 2001.
86. Naleszkiewicz J.: *Zagadnienia stateczności sprężystej*. PWN, Warszawa 1958.
87. NASA Marshall Space Flight Center.: *Isogrid Design Handbook*. NASA Marshall Space Flight Center, Huntsville, AL, USA, 1973.
88. Nesterenko G.I.: *Comparison of damage tolerance of integrally stiffened and riveted structures*. [In:] Proceedings of the 22nd International Council of the Aero-



- nautical Sciences. Comparison of Damage Tolerance of Integrally Stiffened and Riveted Structures, Harrogate, UK, 27 August–1 September 2000.
89. Neto E.L., Monteiro F.A.C., Ruela H.H.: *A Comparison of Buckling Performance of Rivet and Friction Stir Welding Stiffened Panels*. *Mecánica Computacional*, 2010, 29:4967–4975.
  90. Niu M.C.Y.: *Airframe structural design: practical design information and data on aircraft structures*, 2. ed., 2. publ., with minor corr. Conmilit Press, Hong Kong 2002.
  91. Nowacki W.: *Teoria sprężystości*. PWN, Warszawa 1970.
  92. Ochelski S.: *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów*. WNT, Warszawa 2004.
  93. Ogden R.W.: *Non-linear Elastic Deformations*. Courier Corporation, 1997.
  94. Opper G.: *The Photoelastic Investigation of Three-dimensional Stress and Strain Conditions*. NACA-TM-824 (Translation by Vernier J), 1937.
  95. Orkisz M., Święch Ł., Zacharzewski J.: *Fatigue tests of motor glider wing's composite spar*. *Eksplatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, 2012, 14:228–232.
  96. Orłoś Z.: *Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń*. PWN, Warszawa 1977.
  97. Othonos A., Kalli K., Kohnke G.E.: *Fiber Bragg Gratings: Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing*. *Physics Today*, 2000, 53:61–62. doi: 10.1063/1.883086.
  98. Park V.J.: *The range of speckle metrology*. *Experimental Mechanics*, 1980, 20:181–191.
  99. Paszkiewicz M., Kubiak T.: *Selected problems concerning determination of the buckling load of channel section beams and columns*. *Thin-Walled Structures*, 2015, 93:112–121. doi: 10.1016/j.tws.2015.03.009.
  100. Patterson E.A.: *Digital Photoelasticity*. Principles, Practice and Potential. *Strain*, 2002, 38:27–39. doi: 10.1046/j.0039-2103.2002.00004.x.
  101. Peters W.H., Ranson W.F.: *Digital Imaging Techniques in Experimental Stress Analysis*. *Optical Engineering*, 1982, 21:427–431.
  102. Peters W.H., Ranson W.F., Sutton M.A., Chu T.C., Anderson J.: *Application of Digital Correlation Methods to Rigid Body Mechanics*, *Optical Engineering*, 1983, 22:738–742.
  103. Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K.: *Macierzowa analiza konstrukcji*. Państwowe Wydawn. Naukowe, Warszawa–Poznań 1979.
  104. Post D., Han B., Ifju P.G.: *Moiré Methods for Engineering and Science – Moiré Interferometry and Shadow Moiré*. [In:] Rastogi P.K. (ed.) *Photomechanics*. Springer, Berlin–Heidelberg 2000, 151–196.

105. Quinn D., Murphy A., Glazebrook C.: *Aerospace stiffened panel initial sizing with novel skin sub-stiffening features*. Int. J. Str. Stab. Dyn., 2012, 12:1250060. doi: 10.1142/S0219455412500605.
106. Quinn D., Murphy A., McEwan W., Lemaitre F.: *Stiffened panel stability behaviour and performance gains with plate prismatic sub-stiffening*. Thin-Walled Structures, 2009, 47:1457–1468. doi: 10.1016/j.tws.2009.07.004.
107. Raj S.A., Muthukumaran E., Jayakrishna K.: *A Case Study of 3D Printed PLA and its Mechanical Properties*. Materials Today: Proceedings, 2018, 5:11219–11226. doi: 10.1016/j.matpr.2018.01.146.
108. Rakowski G., Kacprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2016.
109. Ramberg W., Osgood W.R.: *Description of stress-strain curves by three parameters*, NACA-TN-902, 1943.
110. Ramesh K.: *Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications*. Springer, Berlin 2000.
111. Ramesh K., Mangal S.K.: *Data acquisition techniques in digital photoelasticity: a review*. Optics and Lasers in Engineering, 1998, 30:53–75. doi: 10.1016/S0143-8166(97)00105-X.
112. Ramesh K., Sasikumar S.: *Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications*. Optics and Lasers in Engineering, 2020, 135:106186. doi: 10.1016/j.optlaseng.2020.106186.
113. Ramly R., Kuntjoro W., Rahman M.K.A.: *Using Embedded Fiber Bragg Grating (FBG) Sensors in Smart Aircraft Structure Materials*. Procedia Engineering, 2012, 41:600–606. doi: 10.1016/j.proeng.2012.07.218.
114. Rastogi P.K.: *Photomechanics*. Springer, Berlin–Heidelberg 2000.
115. Riks E.: *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. International Journal of Solids and Structures, 1979, 15:529–551. doi: 10.1016/0020-7683(79)90081-7.
116. Riks E.: *The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability*. Journal of Applied Mechanics, 1972, 39:1060–1065. doi: 10.1115/1.3422829.
117. Schumann W., Zürcher J.P., Cuche D.: *Holography and Deformation Analysis*. Springer, Berlin 1985.
118. Sepe R., Armentani E., di Lascio P., Citarella R.: *Crack Growth Behavior of Welded Stiffened Panel*. Procedia Engineering, 2015, 109:473–483. doi: 10.1016/j.proeng.2015.06.251.
119. Shantharaja M., Srinivas K.R.: *Comparison of Riveted Panel and Integral Panel for Damage Tolerance by Using FEA*. Int. J. Sci. Res., 2014, 426–431.
120. Sharpe W.N.: *Springer handbook of experimental solid mechanics*. Springer, New York 2008.

121. Singer J., Arbocz J., Weller T.: *Shell Buckling Experiments*. [In:] *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures* (eds. J. Singer, J. Arbocz, T. Weller), 2002. <https://doi.org/10.1002/9780470172995.ch9>.
122. Sirohi R.S.: *Speckle Metrology*. CRC Press, Boca Raton 2020.
123. Skrzypek J.: *Plastyczność i pełzanie. Teoria, zastosowanie i zadania*. PWN, Warszawa 1986.
124. Somireddy M., Czekanski A.: *Mechanical Characterization of Additively Manufactured Parts by FE Modeling of Mesostructure*. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 2017, 1:18. doi: 10.3390/jmmp1020018.
125. Srinath L.S.: *Scattered Light Photoelasticity*. Tata McGraw-Hill, Delhi 1983.
126. Sutton M.A., Turner J.L., Bruck H., Chao T.A.: *Full-field representation of discretely sampled surface deformation for displacement and strain analysis*. *Experimental Mechanics*, 1991, 31:168–177.
127. Sutton M.A., Cheng M., Peters W.H., Chao Y.J., McNeill S.R.: *Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis*. *Image Vision Comput.*, 1986, 4:143–150.
128. Sutton M., Wolters W., Peters W., Ranson W., McNeill S.: *Determination of displacements using an improved digital correlation method*. *Image and Vision Computing*, 1983, 1:133–139. doi: 10.1016/0262-8856(83)90064-1.
129. Święch Ł.: *Calibration of a Load Measurement System for an Unmanned Aircraft Composite Wing Based on Fibre Bragg Gratings and Electrical Strain Gauges*. *Aerospace*, 2020, 7:27. doi: 10.3390/aerospace7030027.
130. Święch Ł.: *Experimental and numerical investigations of the postbuckling states of deformations of isosceles grid stiffened plate with cut out*, 10-th International Symposium on Mechanics of Materials and Structures, Augustów, June 2-6, 2019, Poland.
131. Święch Ł.: *Experimental and Numerical Studies of Low-Profile, Triangular Grid-Stiffened Plates Subjected to Shear Load in the Post-Critical States of Deformation*. *Materials*, 2019, 12:3699. doi: 10.3390/ma12223699.
132. Święch Ł.: *Experimental investigations of residual strength of a composite sail-plane wing spar after fatigue tests*, 5th International Conference on Mechanics of Composites, 1–4.07.2019, Lisbona, Portugalia.
133. Święch Ł.: *Sprawozdanie z przeprowadzonego programu prób statycznych motoszybowca AOS-71S*. Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 2019.
134. Święch Ł.: *The effect of integral stiffening on the fatigue of thin-walled plates subjected to shear*, Conference: Materials, Methods & Technologies, Burgas, Bulgaria, 2020, Vol. 14, 2020, ISSN 1314-7269 (online).
135. Święch Ł., Bednarz A.: *Badania skrzydła samolotu bezzałogowego wykonanego metodą druku 3d*. *Materiały Kompozytowe*, 2019, 22–27.

136. Świąch Ł., Bednarz A.: *Use of 3D printing technology in the aviation industry on an example of numerical experimental stress state analysis of unmanned aerial vehicle wing*. Journal of KONES Powertrain and Transport, 2017, 24:327–334.
137. Świąch Ł., Kołodziejczyk R., Stącel N.: *Experimental Analysis of Perimeter Shear Strength of Composite Sandwich Structures*. Materials, 2021, 14:12. doi: 10.3390/ma14010012.
138. Szilard R.: *Theory and analysis of plates: classical and numerical methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
139. Teter A., Kolakowski Z.: *On using load-axial shortening plots to determine the approximate buckling load of short, real angle columns under compression*. Composite Structures, 2019, 212:175–183. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.01.009.
140. Tian Q., Huhns M.N.: *Algorithms for subpixel registration*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1986, 35:220–233. doi: 10.1016/0734-189X(86)90028-9.
141. Timoshenko S., Gere J.M.: *Theory of elastic stability*, 2nd ed., Dover ed. Dover Publications, Mineola, N.Y., 2009.
142. Timosenko S.P., Woinowsky-Krieger S.: *Theory of plates and shells*, 2. ed., reissued. McGraw-Hill, New York 1987.
143. Tomaszewicz J.: *Program wybranych prób statycznych motoszybowca AOS-H2*. ITLiMS, 2019.
144. Tong W.: *Detection of plastic deformation patterns in a binary aluminum alloy*. Experimental Mechanics, 1997, 37:452–459.
145. Troitsky M.S.: *Stiffened Plates: Bending, Stability and Vibrations*. Elsevier, Amsterdam 1976.
146. Tsai R.: *A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses*. IEEE J. Robot. Autom., 1987, 3:323–344.
147. Ugural A.C., Ugural A.C.: *Stresses in beams, plates, and shells*, 3rd ed. CRC Press, Boca Raton 2009.
148. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Rasin A.F.: *Anisogrid lattice structures – survey of development and application*. Composite Structures, 2001, 54:361–370. doi: 10.1016/S0263-8223(01)00111-8.
149. Vetyukov Y.: *Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Structures*. Springer Vienna, Vienna 2014.
150. Wang B., Tian K., Hao P., Zheng Y., Ma Y., Wang J.: *Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells*. Composite Structures, 2016, 152:807–815. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.05.096.

151. Wang C.C.B., Deng J.M., Ateshian G.A.: *An automated approach for direct measurement of two-dimensional strain distributions within articular cartilage under unconfined compression*. Journal of Biomechanical Engineering Trans. ASME, 2002, 124:557–567.
152. Wang D., Abdalla M.M.: *Global and local buckling analysis of grid-stiffened composite panels*. Composite Structures, 2015, 119:767–776. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.09.050.
153. Weller R., Bussey J.K.: *Photoelastic analysis of three-dimensional stress system using scattered light*. Washington DC, 1939.
154. Wempner G.A.: *Discrete approximations related to nonlinear theories of solids*. International Journal of Solids and Structures, 1971, 7:1581–1599. doi: 10.1016/0020-7683(71)90038-2.
155. Wriggers P.: *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, Berlin, Heidelberg 2008.
156. Xu G., Zhang Z.: *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition*. Springer Netherlands, Dordrecht 1996.
157. Xu Y., Tong Y., Liu M., Suman B.: *A new effective smeared stiffener method for global buckling analysis of grid stiffened composite panels*. Composite Structures, 2016, 158:83–91. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.09.015.
158. Yao T., Ye J., Deng Z., Zhang K., Ma Y., Ouyang H.: *Tensile failure strength and separation angle of FDM 3D printing PLA material: Experimental and theoretical analyses*. Composites Part B: Engineering, 2020, 188:107894. doi: 10.1016/j.compositesb.2020.107894.
159. Zacharzewski J., Kopecki H., Świech Ł., Zarszyńska M.: *Sprawozdanie z prac prowadzonych w projekcie naukowym: Badania eksperymentalno-numeryczne propagacji szczelin w warunkach obciążeń zmiennych w lotniczych konstrukcjach cienkościennych* (N N501 216338). Politechnika Rzeszowska, Rzeszów 2012.
160. Zandman F., Redner S., Dally J.W.: *Photoelastic Coatings*. Soc. Experimental Stress Analysis, Westport 1977.
161. Zerilli F.J., Armstrong R.W.: *Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations*. Journal of Applied Physics, 1987, 61:1816–1825. doi: 10.1063/1.338024.
162. Zhang S., Yau S.T.: *Three-dimensional shape measurement using a structured light system with dual cameras*. Opt. Eng., 2008, 47:013604. doi: 10.1117/1.2835686.
163. Zhang Z.: *A flexible new technique for camera calibration*. IEEE Trans. Pattern. Anal. Mach. Intell., 2000, 22:1330–1334.

164. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. [In:] The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics (Seventh Edition). Butterworth-Heinemann, Oxford 2014.
165. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. [In:] The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals (Seventh Edition). Butterworth-Heinemann, Oxford 2013.

# Komplementarne badania cienkościennych ustrojów nośnych w warunkach dużych deformacji

## Streszczenie

Przedmiotem rozważań była analiza zasadności prowadzenia komplementarnych badań doświadczalnych cienkościennych ustrojów nośnych pracujących w stanach zaawansowanych deformacji. Wyniki tego rodzaju badań dostarczają materiałów porównawczych do oceny rezultatów obliczeń numerycznych prowadzonych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych i fizycznych.

W pierwszej części monografii przedstawiono zarys teoretycznych podstaw deformacji nieliniowych oraz numerycznych metod rozwiązywania tego typu zagadnień, których znajomość stanowi podstawę poprawnego opracowania modeli dyskretnych rozważanych struktur nośnych. Następnie omówiono główne metody badań doświadczalnych, ze szczególnym uwzględnieniem metody cyfrowej korelacji obrazu (DIC).

Zasadniczą część pracy stanowią analizy porównawcze wyników przeprowadzonych badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych. Rozważane przykłady obejmują przypadki integralnych struktur wzmacnianych usztywnieniami geodezyjnymi wykonanymi z lotniczych stopów aluminium, płyt usztywnianych niskoprofilowymi żebrami usytuowanymi równolegle względem siebie oraz strukturami o programowalnych właściwościach fizycznych wytwarzanych w technologii druku przestrzennego. Modelowe struktury poddawano obciążeniu, które wywoływało w nich stan czystego ścinania. Obserwowane deformacje obejmowały stan pokrytyczny oraz odkształcenia plastyczne.

Badania doświadczalne prowadzono z zastosowaniem optycznych systemów pomiarowych opartych na metodzie cyfrowej korelacji obrazu, co umożliwiło rejestrację pól deformacji w kolejnych etapach badania, dając podstawę do ich ilościowej oceny oraz identyfikacji ścieżek równowagi, czyli relacji pomiędzy reprezentatywnym przemieszczeniem i obciążeniem, które umożliwiają śledzenie zachowania się struktury w warunkach deformacji pokrytycznych.

Równolegle z badaniami eksperymentalnymi prowadzono obliczenia numeryczne w ujęciu Metody Elementów Skończonych w sformułowaniu przemieszczeniowym. Analizy numeryczne w ujęciu nieliniowym, które w istocie sprowadzają się do rozwiązania układu równań algebraicznych odpowiadających dyskretyzacji analizowanego ciała, rozwiązywano z zastosowaniem zmodyfikowanej metody pro-

gnostycznej Newtona-Raphsona z procedurami korekcji obciążenia. Do opisu dyskretnych układów, którymi aproksymowano rozważane struktury, wykorzystywano głównie cienkościenne, powłokowe elementy skończone. Poza nieliniowościami natury geometrycznej związanymi z pojawiającymi się skończonymi deformacjami po utracie stateczności, w analizach numerycznych rozważano również nieliniowe związki konstytutywne. Wykorzystano sprężysto-plastyczny model materiału ze wzmocnieniem, co umożliwiło numeryczne odtworzenie trwałych deformacji.

Przeprowadzone badania doświadczalne oraz analizy numeryczne dowiodły skuteczności przyjętego narzędzia, jakim jest system pomiarowy oparty na metodzie cyfrowej korelacji obrazu skojarzony z koncepcją bieżącej analizy numerycznej. Koncepcja umożliwia w sposób zadowalający identyfikację stanów deformacji oraz stanów naprężenia struktur w pełnym zakresie warunków eksploatacyjnych. Stosowanie metody DIC pozwala na ocenę i modyfikację modeli numerycznych tworzonych do rozwiązywania zagadnień fizycznie i geometrycznie nieliniowych w ujęciu Metody Elementów Skończonych. Identyfikacja wstępnej deformacji struktury oraz śledzenie zmian na każdym z etapów obciążenia zezwala na zachowanie daleko idącej dokładności w odtwarzaniu deformacji struktury w stanach pokrytycznych. Wykorzystanie metody DIC umożliwia dokonywanie pomiarów deformacji w formie polowej, a co za tym idzie – stwarza możliwość śledzenia efektów lokalnych, często pomijanych w przypadku stosowania tradycyjnych metod pomiarowych, mimo ich decydującego wpływu na przedwczesne zniszczenie konstrukcji.

W monografii zaprezentowano również rezultaty badań konstrukcji lotniczych prowadzonych z wykorzystaniem cyfrowych systemów optycznych. Zaprezentowano przykłady obejmujące wyniki uzyskane w trakcie statycznych badań wytrzymałościowych motoszybowca AOS-H2, badań zmęczeniowych kompozytowego dźwigara skrzydła oraz pomiarów deformacji podczas badań w tunelu aerodynamicznym zmodyfikowanego kadłuba szybowca PW-6.

Oryginalnym elementem pracy i jednym z głównych jej celów było wykazanie zasadności prowadzenia już na etapie projektowania, komplementarnych badań doświadczalnych, które umożliwiają dokonywanie weryfikacji poprawności wyników analiz numerycznych struktur cienkościennych pracujących w stanach deformacji pokrytycznych. W miarę poznawania charakteru pracy konstrukcji po utracie stateczności możliwe staje się przesunięcie zakresu naprężenia dopuszczalnego bliżej obciążeń niszczących strukturę, przy zachowaniu wymaganego zapasu bezpieczeństwa. Podejście takie umożliwia lepsze wykorzystanie materiału, a co za tym idzie – minimalizację masy struktury nośnej, co ma kluczowe znaczenie zwłaszcza w przypadku wytrzymałości konstrukcji lotniczych.



# **Complementary tests of thin-walled load-bearing structures in the range of large deformations**

## **Abstract**

The subject of this work was to analyse the validity of conducting complementary experimental research on thin-walled load-bearing structures operating in states of large deformation. The results of this type of research provide comparative materials for assessing the results of numerical calculations carried out taking into account geometric and physical nonlinearities.

The first part of the monograph presents an outline of the theoretical foundations of nonlinear deformations and numerical methods for solving this type of problems, the knowledge of which is the basis for the correct development of numerical models of the considered load-bearing structures. Then, the main experimental research methods are discussed, particularly the digital image correlation (DIC) method.

The main part of the work consists of comparative analyses of the results of experimental tests and numerical calculations. The examples considered include the cases of integral structures reinforced with geodetic stiffeners made of aircraft aluminium alloys, plates stiffened with low-profile ribs located parallel to each other, and structures with programmable physical properties manufactured using 3D printing technology. The model structures were subjected to a load that induced a state of pure shear. The observed deformations included the post-critical state and plastic deformations.

Experimental research was carried out using optical measurement systems based on the digital image correlation method, which enabled the registration of deformation fields in subsequent stages of the study, providing the basis for their quantitative assessment and identification of equilibrium paths, i.e. the relationship between the representative displacement and load, which enable tracking the behaviour of the structure in post-critical deformation conditions.

In parallel with the experimental research, numerical calculations were carried out using the finite element method in the displacement formulation. Numerical analyses in a non-linear approach, which essentially comes down to solving a system of algebraic equations corresponding to the discretization of the analysed body, were solved using a modified Newton-Raphson forecasting method with load correction procedures. Mainly thin-walled, shell finite elements were used to describe discrete systems approximating the considered structures. In addition to geometric

nonlinearities related to finite deformations occurring in the post-buckling stage, nonlinear constitutive relationships were also considered in numerical analyses. An elastic-plastic material model with strain hardening was used, which enabled the numerical simulation of plastic deformations.

The experimental research and numerical analyses carried out proved the effectiveness of the adopted tool, which is a measurement system based on the digital image correlation method combined with the concept of ongoing numerical analysis. The concept enables satisfactory identification of deformation and stress states of structures in the full range of operating conditions. Using the DIC method allows for the evaluation and modification of numerical models created to solve physically and geometrically nonlinear problems, in terms of the finite element method. Identification of the initial deformation of the structure and tracking changes at each stage of loading allows for high accuracy in reproducing structure deformation in post-critical states. The use of DIC makes it possible to measure full-field deformations and therefore makes it possible to track local effects, often ignored when using traditional measurement methods, despite their decisive impact on premature destruction of the structure.

The monograph also presents the results of research on aircraft structures conducted using digital optical systems. Examples were presented, including results obtained during static strength tests of the AOS-H2 motor glider, fatigue tests of the composite wing spar and deformation measurements during wind tunnel tests of the modified PW-6 glider fuselage.

The original element of the work and one of its main goals was, first of all, to demonstrate the validity of conducting complementary experimental tests, already at the design stage, which enables verification of the correctness of the results of numerical analyses of thin-walled structures operating in post-critical deformation states. As the nature of the structure's operation after loss of stability becomes known, it becomes possible to shift the permissible stress range closer to the loads that destroy the structure, while maintaining the required safety margin. This approach allows for better use of the material and, consequently, minimization of the weight of the structure, which is crucial, especially in the case of the strength of aircraft structures.



